

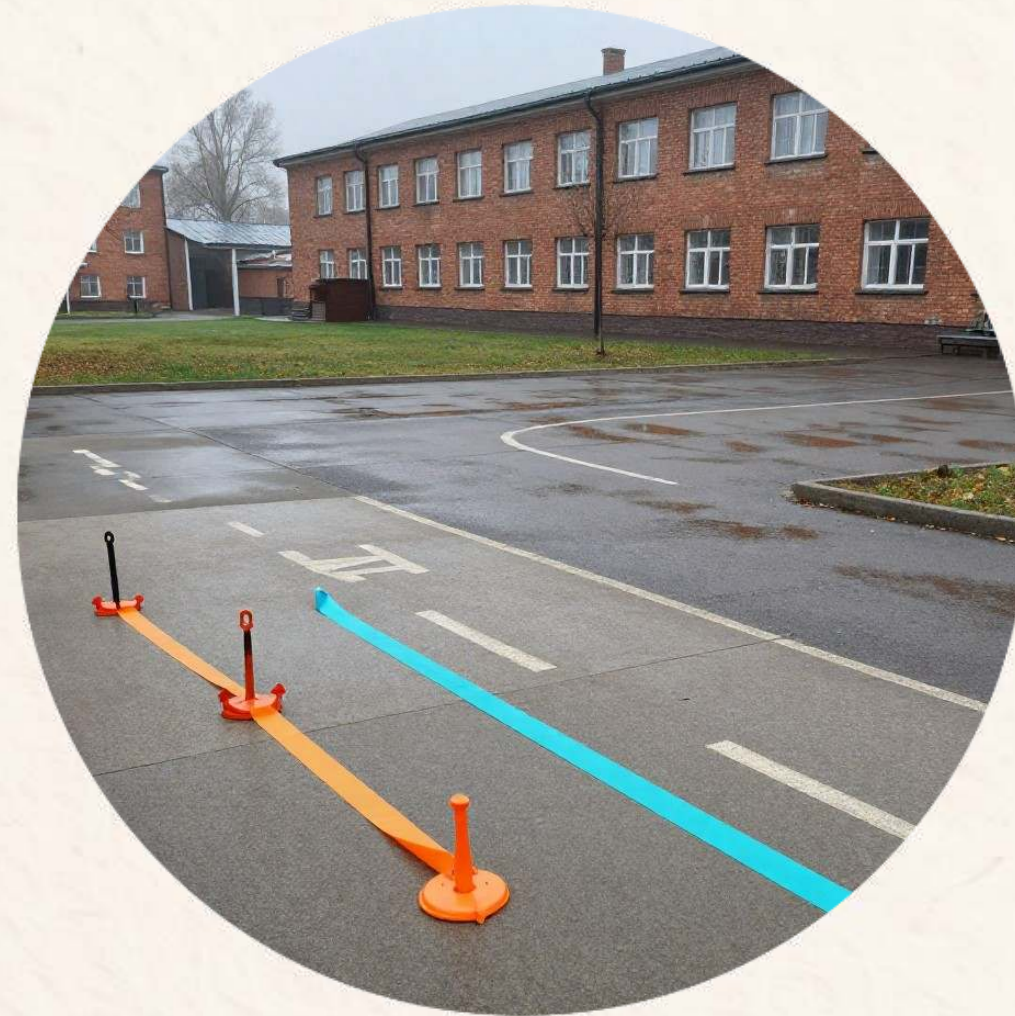
Сложение и вычитание векторов: основные правила и способы

Осваиваем векторы: длина, направление, сумма и разность.



Зачем нужны векторы в геометрии

- Векторы показывают не только величину, но и направление. Поэтому они помогают описывать перемещения, фигуры и действия на плоскости, а также полезны в физике и задачах с координатами.



Что такое вектор

— Стрелка вместо отрезка

Вектор обычно изображают стрелкой и обозначают двумя точками или одной буквой. Важно не только, где он расположен, но и куда направлен.

— Модуль вектора

Длина стрелки называется модулем вектора. Именно модуль показывает, насколько велико перемещение или действие, которое вектор описывает.

— Направление

Острие стрелки указывает направление вектора. Если направление изменить на противоположное, получится уже другой вектор с тем же модулем.

— Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их положение на плоскости может быть разным, но смысл остаётся тем же.

— Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину, равную нулю, и не имеет определённого направления. Он обозначает отсутствие перемещения и не меняет результат сложения.



Вектор на координатной плоскости

1 Задать точки

Сначала указывают начало и конец вектора: $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Эти координаты помогают точно описать положение вектора на плоскости.

2 Найти координаты

Координаты вектора AB вычисляют по разности координат конца и начала: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Так получают сам вектор как пару чисел.

3 Использовать ответ

Координатный способ удобен, когда чертёж не нужен или его трудно построить. Он особенно полезен на клетчатой бумаге и при проверке решения.

Сложение двух векторов

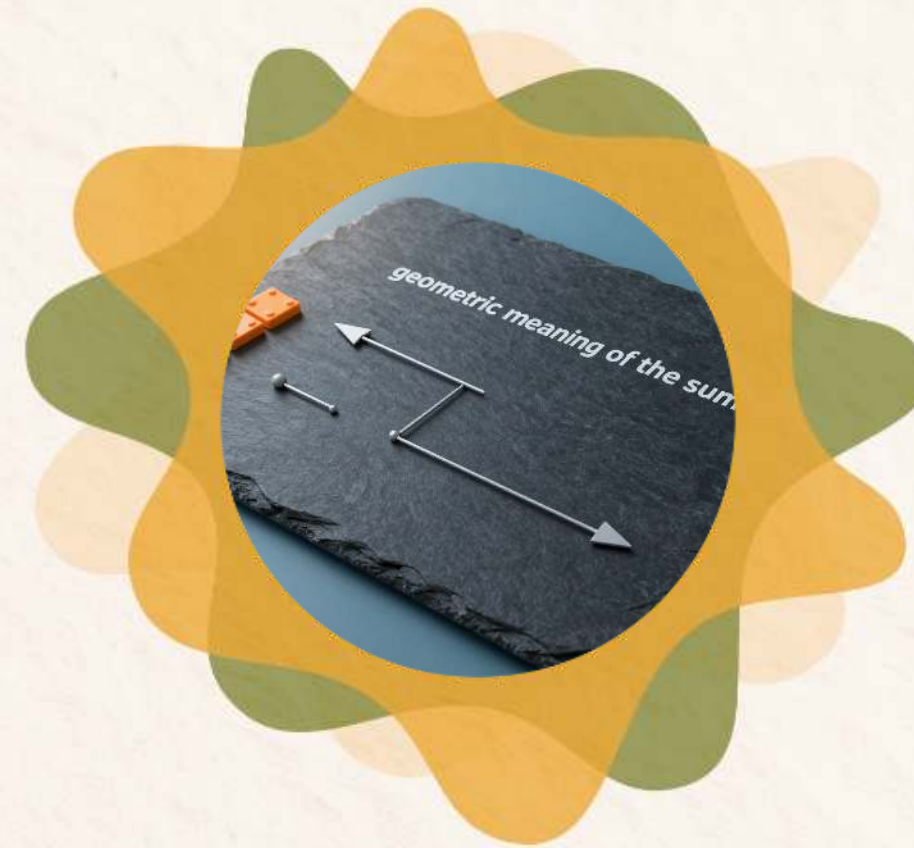
Последовательность построения и запись результата в геометрии 9 класса

Правило треугольника на чертеже



Векторы идут друг за другом

Сначала строят первый вектор, затем переносят второй так, чтобы его начало совпало с концом первого. Получившаяся ломаная показывает путь сложения и помогает увидеть направление результата. Итоговый вектор проводят от начала первого к концу второго.



Геометрический смысл суммы

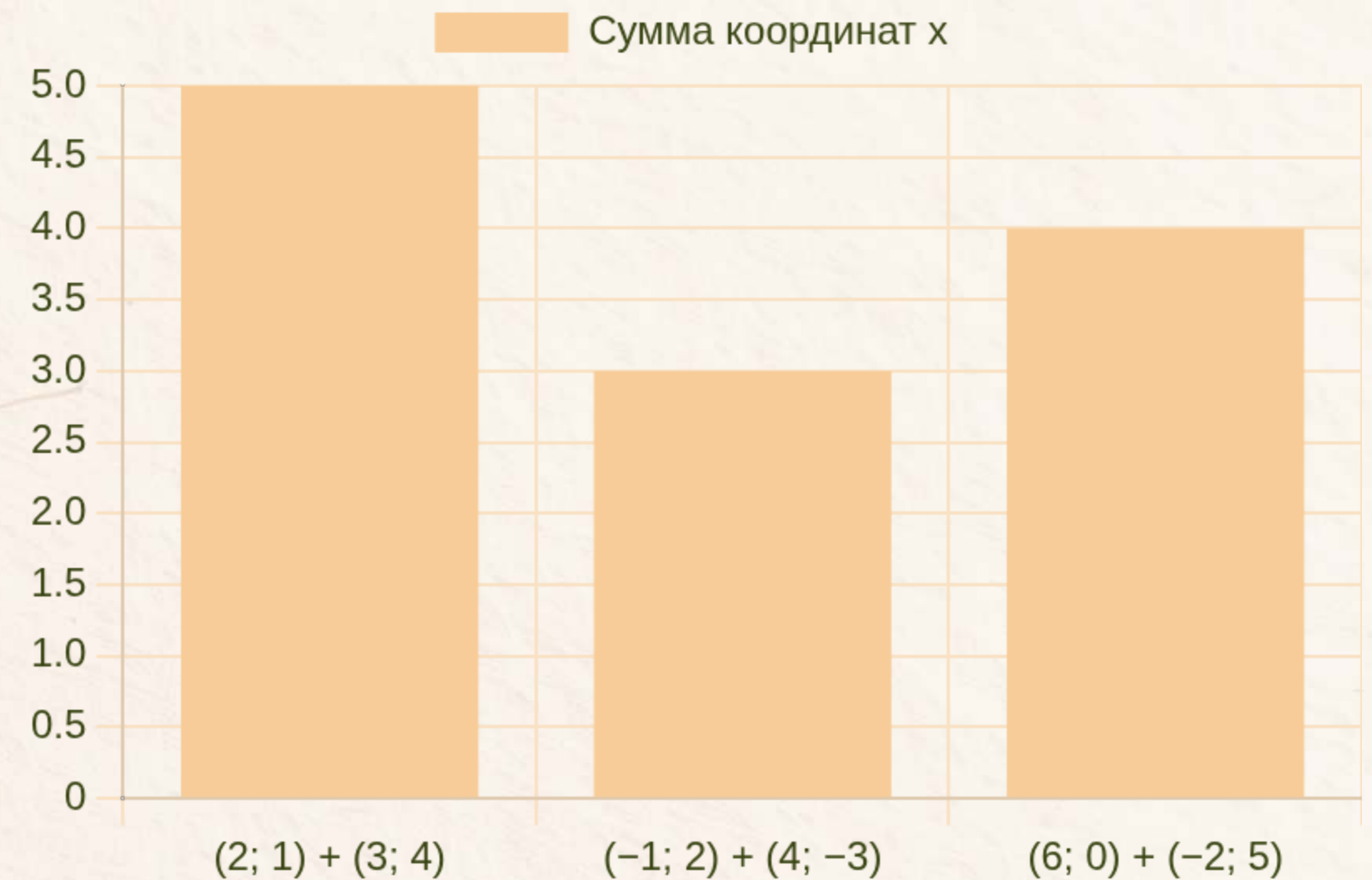
На чертеже сумма выглядит как новая стрелка, соединяющая начальную и конечную точки построения. Такой способ особенно удобен, когда важно понять не только ответ, но и то, как складываются направления и длины двух векторов.

Сложение векторов по координатам

По столбцам видно, что координаты складываются отдельно, без чертежа. Для каждой пары можно сразу получить точный результат.

Числовой способ быстрый и точный: он особенно удобен для проверки и для задач с координатной плоскостью.

Примеры из школьного курса геометрии, 9 класс



2

координаты складываются отдельно
по каждой оси.

У каждого вектора на плоскости есть две координаты. Поэтому
сумма тоже находится по двум направлениям: по оси x и по оси
 y .

Школьная геометрия, 9 класс

Свойства сложения векторов



Перемена мест

Векторы можно складывать в любом порядке: итог не изменится. Это свойство помогает выбирать более удобную последовательность действий при решении задач.



Группировка

Несколько векторов можно объединять по-разному, не меняя результата. Благодаря этому длинные вычисления часто становятся короче и понятнее.



Нулевой вектор

Прибавление нулевого вектора ничего не меняет. Он ведёт себя как нейтральный элемент и сохраняет исходный вектор без изменений.



Удобство вычислений

Эти свойства позволяют переставлять и объединять слагаемые так, чтобы решение было проще. Особенно полезно это при работе с несколькими векторами сразу.

Способы сложения векторов: сравнение

Способ	Когда удобно	Что даёт
Треугольник	Последовательно	Наглядный ответ
Параллелограмм	Из одной точки	Диагональ суммы
Координаты	Для расчёта	Точный числовой результат

— Три способа решения подходят для разных типов задач и по-разному показывают результат.

Геометрические способы лучше для наглядности, а координатный — для точности. Выбор зависит от условия задачи и требуемого ответа.

— Школьный курс геометрии, 9 класс

Правило параллелограмма

Два вектора из одной точки

Чтобы сложить два вектора, откладывают их из одной точки и достраивают параллелограмм. Стороны, совпадающие с данными векторами, остаются параллельными и равными им по длине.

Диагональ как сумма

Искомая сумма изображается диагональю параллелограмма, выходящей из общей начальной точки. Она показывает не только величину результата, но и его направление относительно исходных векторов.

Когда способ удобен

Правило особенно полезно, когда нужно увидеть геометрический смысл сложения и сравнить результат при разных углах между векторами. На чертеже сразу видно, как меняется направление суммы.



Как угол между векторами влияет на сумму



Почти одинаковое направление

Если оба вектора смотрят почти в одну сторону, их действия складываются, и сумма получается длиннее каждого из них. Направление результата близко к общему направлению векторов.



Острый или прямой угол

При большем угле между векторами часть их действия уже не совпадает. Если векторы перпендикулярны, сумму удобно видеть как диагональ прямоугольника или параллелограмма.



Противоположные направления

Когда векторы направлены навстречу друг другу, они частично или почти полностью взаимно уменьшаются. Тогда модуль суммы становится заметно меньше, а иногда результатом может быть нулевой вектор.

Как найти разность векторов

Последовательность построения разности через противоположный вектор и сложение.

Противоположный вектор

1 Та же длина

Противоположный вектор всегда равен по модулю исходному, поэтому на чертеже его длина не меняется. Меняется только направление: стрелка поворачивается ровно в обратную сторону.

2 Сложение в ноль

Если сложить вектор и его противоположный, получится нулевой вектор. Это удобно запомнить как пару, которая взаимно «обнуляет» друг друга при сложении.

3 Координатная запись

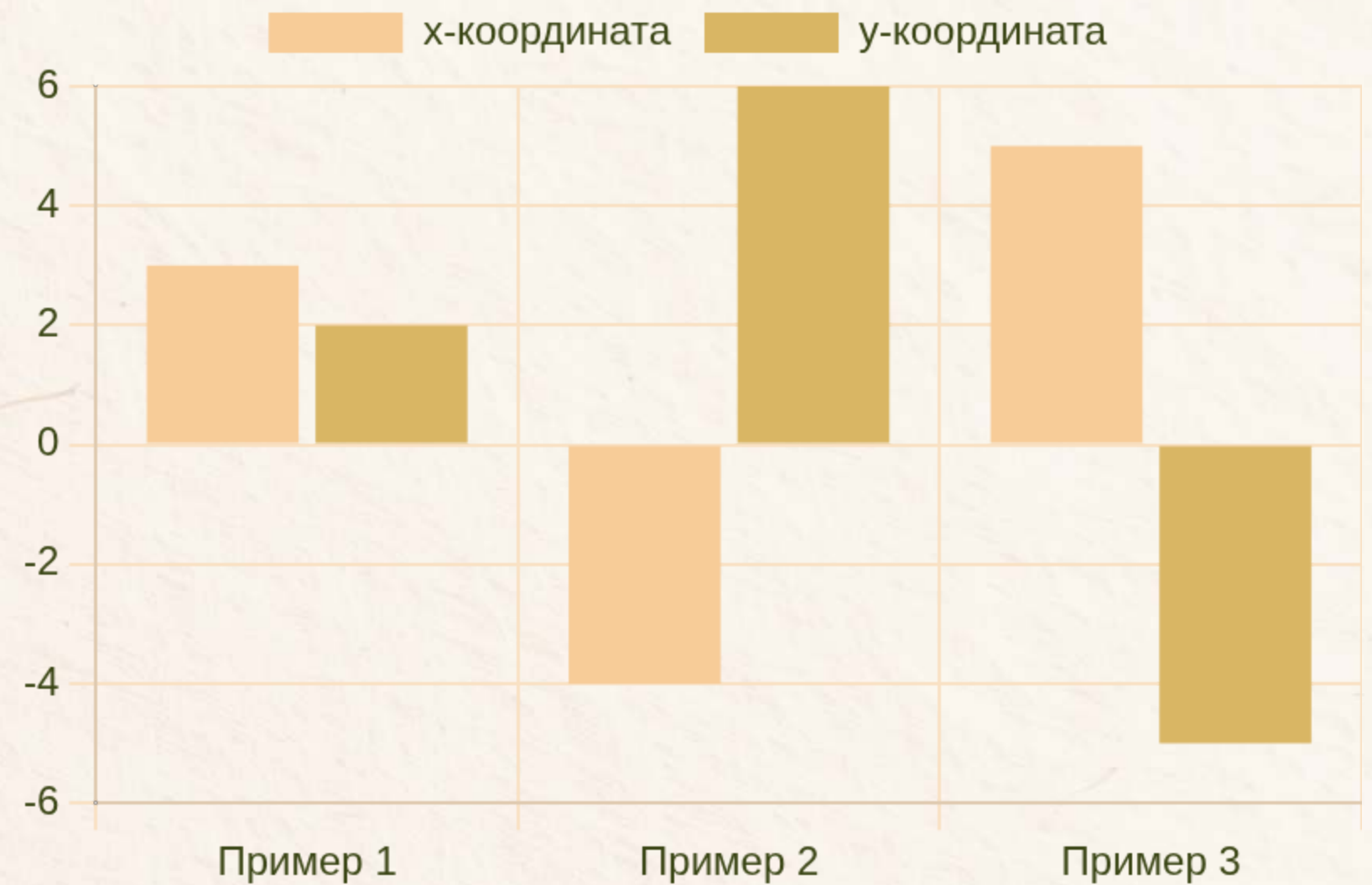
Для вектора $b = (b_x; b_y)$ противоположный записывают как $-b = (-b_x; -b_y)$. То есть меняются знаки обеих координат, а не только одной из них.

Вычитание векторов по координатам

Вычитание координат выполняется отдельно по каждой оси, поэтому удобно сразу видеть результат для x и y . Это помогает быстро проверить вычисления без построения чертежа.

Во всех примерах разность получается из поэлементного вычитания координат, что подтверждает правило $a - b = a + (-b)$.

Школьный курс геометрии, 9 класс



Типичные ошибки при сложении и вычитании векторов

Игнорирование направления

Нельзя складывать только длины векторов, потому что направление влияет на итог. Два одинаковых по длине вектора могут дать совершенно разный результат, если они направлены по-разному.

Путаница в координатах

Часто x и y записывают в неправильном порядке или складывают их вместе без проверки. Координаты нужно обрабатывать отдельно и всегда сохранять одинаковую последовательность записи.

Неверные знаки

При вычитании легко забыть поменять знаки у противоположного вектора. Из-за этого получается неправильный ответ, хотя сама схема решения выбрана верно.

Ошибки на чертеже

На рисунке важно соблюдать один масштаб для всех стрелок и точно показывать их направление. Если масштаб нарушен, геометрический смысл ответа становится неверным.



Быстрая памятка по формулам

Запись	Правило	Смысл
$a + b$	Сложить	Сумма векторов
$a - b$	$a + (-b)$	Вычитание через сумму
$-a$	Изменить знак	Противоположный вектор
O	Не меняет	Нулевой вектор

Краткая таблица помогает быстро вспомнить основные действия с векторами и не перепутать знак, направление и смысл записи.

Если помнить три опоры — сложение, противоположный вектор и нулевой вектор, — задачи решаются быстрее и с меньшим числом ошибок.

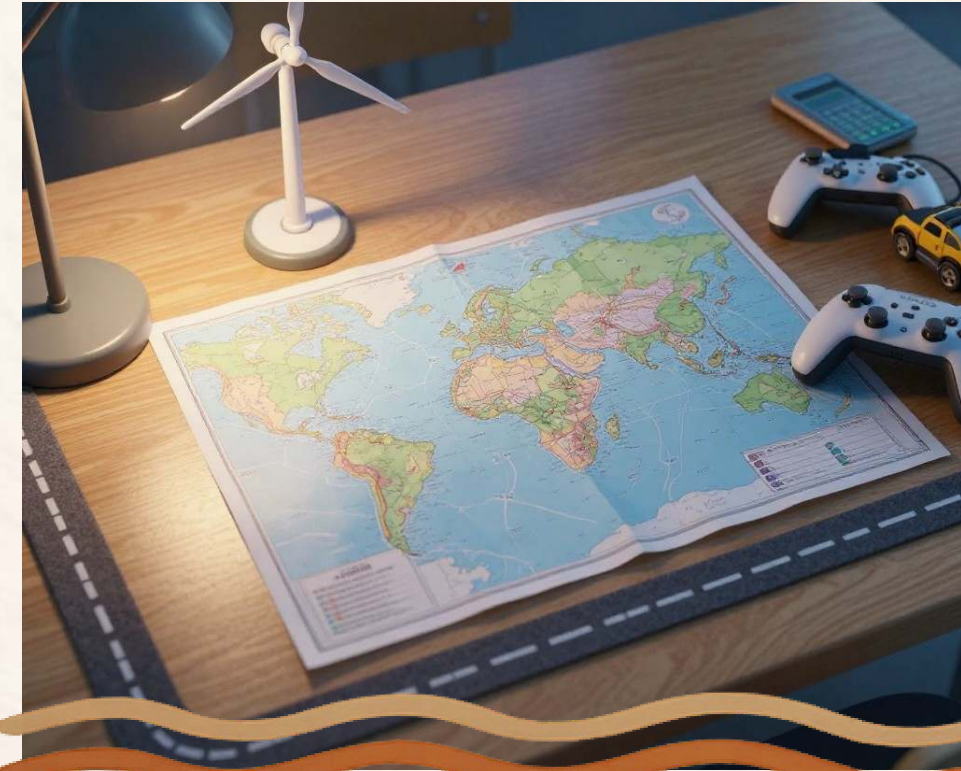
Школьная геометрия и алгебра, 9 класс

Где используются векторы в жизни и физике



Лодка и течение реки

Когда лодка движется по реке, её собственная скорость складывается со скоростью течения. Поэтому путь может оказаться короче, длиннее или смещённым в сторону, в зависимости от направления движения и силы течения.



Карта, игра и физика

Векторы помогают описывать движение по карте, смещение персонажа в игре и действие ветра или силы. Во всех этих случаях важно не только «сколько», но и «куда» направлена величина, поэтому обычного числа недостаточно.

Пошаговое решение задач на векторы

Общий алгоритм для задач на сложение и вычитание векторов в координатах и на чертеже.

Векторы: кратко о главном

Сложение и вычитание векторов показывают, как соединяются направление и длина. Если помнить правило треугольника, параллелограмма и координатную формулу, задачи по этой теме решаются уверенно и быстро.