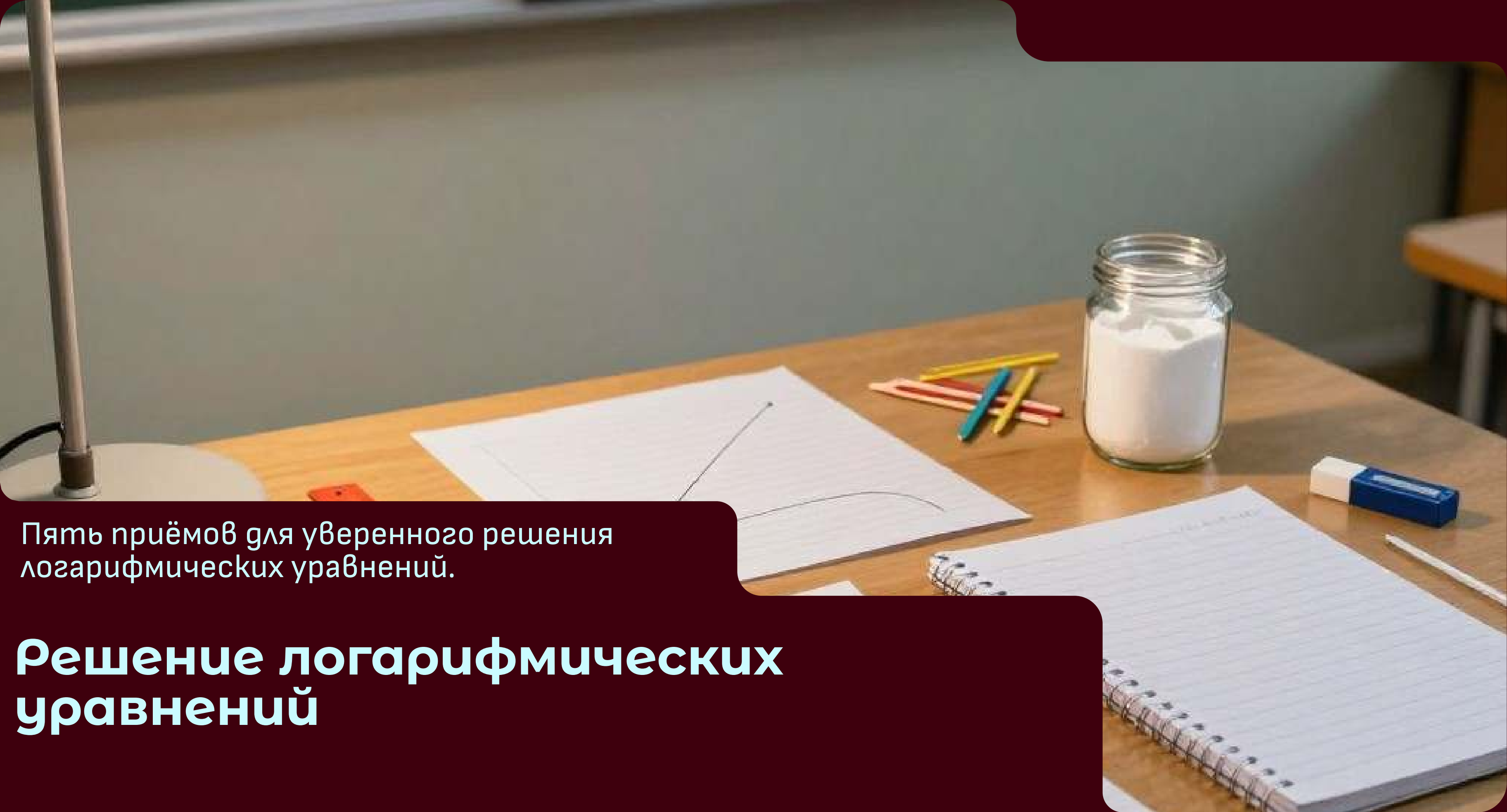


A study desk with a lamp, a glass of milk, a notebook, and a piece of paper with a graph. The desk is wooden and has a lamp on the left, a glass of milk in the center, a notebook on the right, and a piece of paper with a graph in the middle. The background is a blurred classroom setting.

Пять приёмов для уверенного решения
логарифмических уравнений.

Решение логарифмических уравнений

Где встречаются логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения соединяют алгебру с моделями роста, затухания и измерений. Их решение опирается на определение логарифма, ограничения на основание и обязательную проверку области допустимых значений.



Виды логарифмических уравнений

Равные основания

Если записано $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, при одинаковом основании можно приравнять аргументы. Но этот шаг допустим только после проверки, что оба аргумента положительны.

Логарифм дроби

В уравнениях с дробями логарифм может стоять у всего рационального выражения. Тогда особенно важно учесть, что положительным должен быть весь аргумент, а не только числитель или знаменатель.

Один логарифм и число

В уравнениях вида $\log_a f(x) = b$ неизвестное находится внутри одного логарифма. Обычно их решают прямым переходом к показательной форме, не забывая про ограничения на аргумент.

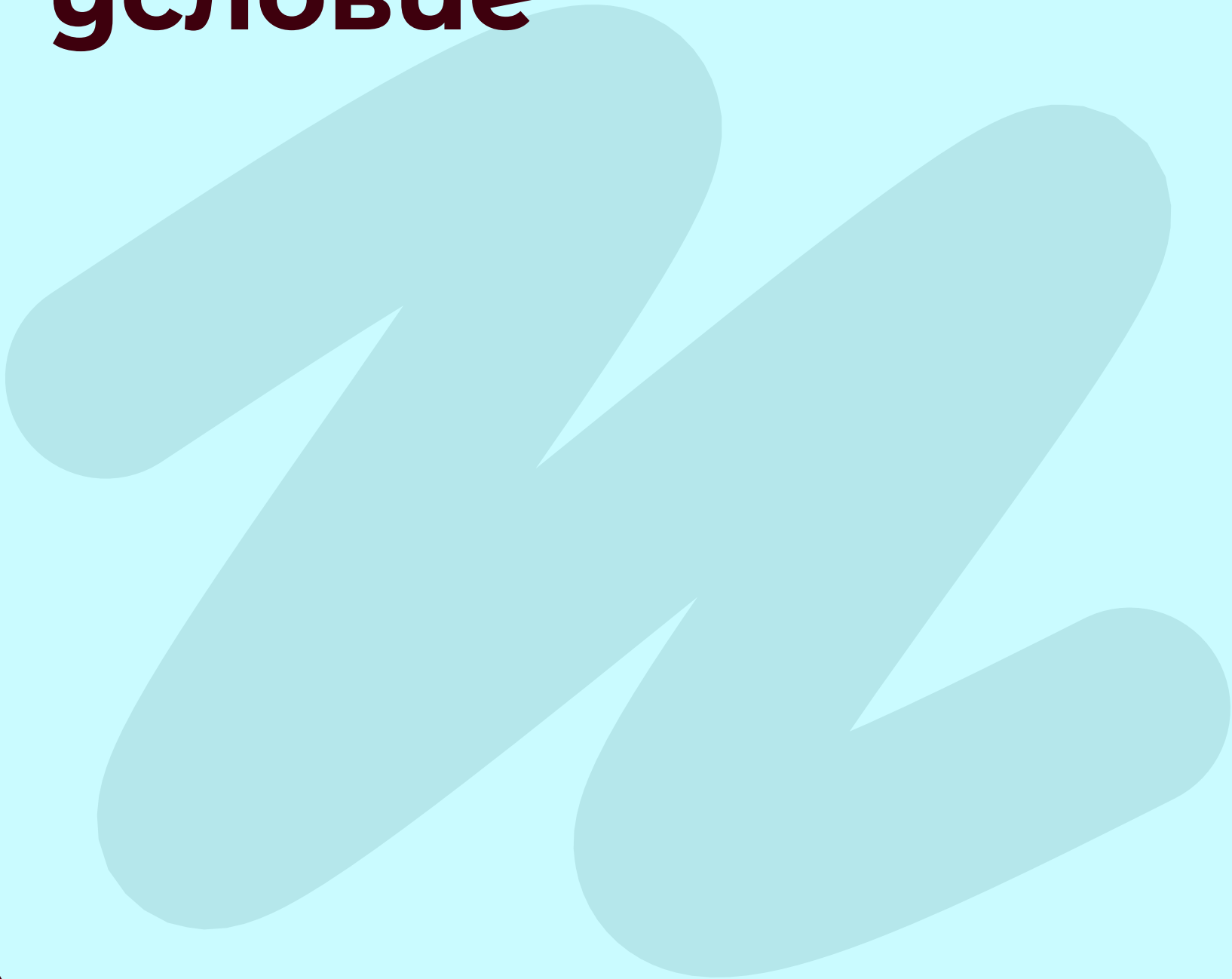
Суммы и произведения

Суммы, разности и произведения логарифмов удобно приводить к одному выражению с помощью свойств. Это сокращает число логарифмов и часто переводит задачу в привычное алгебраическое уравнение.

Разные основания

Если основания различаются, уравнение часто приводят к общей базе или используют замену переменной. Такой приём помогает сравнивать выражения и избавляет от лишней громоздкости.

ОДЗ: обязательное условие



01 Проверить основания

Сначала выписывают условие существования каждого логарифма отдельно: аргумент должен быть положительным, а основание — положительным и не равным единице.

02 Найти ограничения

Затем определяют, какие части уравнения входят в логарифмы, и записывают для них все ограничения. Это особенно важно, если выражений несколько.

03 Объединить условия

После этого объединяют найденные условия в одну систему. Решение будет верным только для тех значений переменной, которые удовлетворяют всем ограничениям одновременно.

04 Отсеять лишние ответы

Финальная проверка нужна даже при красивом результате: алгебраические преобразования могут добавить лишние корни. ОДЗ позволяет быстро отсеять такие ответы.

Свойства логарифмов

Произведение

01

Свойство произведения превращает $\log_a(MN)$ в сумму $\log_a M$ и $\log_a N$. Оно удобно, когда внутри логарифма стоит разложение на множители.

Частное

02

Свойство частного заменяет $\log_a(M/N)$ разностью $\log_a M$ и $\log_a N$. Оно особенно полезно, если в уравнении присутствует дробь или отношение выражений.

Степень аргумента

03

Степень в аргументе выносится множителем: $\log_a(M^k) = k \log_a M$. Это помогает упростить уравнения, где неизвестное находится в показателе степени или под степенью.

Сведение к одному логарифму

04

Обратное применение свойств позволяет собрать отдельные логарифмы в один. Так уравнение становится короче, а дальнейший переход к показательной форме проходит значительно быстрее.

Алгоритм решения

Последовательность шагов показывает, как уменьшить риск ошибок при решении.





Пример 1: $\log_a f(x)=b$

- **Переход к показательной форме**

Рассмотрим уравнение $\log_2(x-1)=3$. По определению логарифма это означает, что $x-1$ равно 2 в третьей степени, то есть 8.

- **Находим значение**

Отсюда сразу получаем $x=9$. Такой шаг здесь самый короткий, потому что правая часть уже задана числом, а основание логарифма известно.

- **Проверяем область допустимых значений**

ОДЗ задаётся условием $x-1>0$, значит $x>1$. Это ограничение нужно учитывать до и после вычислений, даже если ответ выглядит очевидным.

- **Делаем проверку**

Подстановка $x=9$ удовлетворяет условию и исходному уравнению. Следовательно, корень единственный, а посторонних решений в этом примере нет.

Пример 2: равные основания

01 Сравниваем аргументы

В уравнении $\log_3(x+2)=\log_3(5x-4)$ основания совпадают, поэтому можно приравнять аргументы. Это ключевой приём для задач такого типа.

02 Решаем уравнение

Получаем линейное уравнение $x+2=5x-4$. После переноса слагаемых на одну сторону находим $x=1$.

03 Проверяем ответ

Проверяем ОДЗ: $x+2>0$ и $5x-4>0$. При $x=1$ оба неравенства выполняются, значит найденный корень подходит без дополнительных уточнений.

Пример 3: разные основания

Исходная запись

Записываем уравнение $\log_4 x = \frac{1}{2} \log_2 x$ и замечаем, что основания связаны степенью двойки. Это подсказывает, что логарифмы можно привести к одной базе.

Общая база

Представляем 4 как 2^2 и применяем формулу перехода к основанию 2. Тогда $\log_4 x$ выражается через $\log_2 x$ в удобной для сравнения форме.

Итог

После преобразования обе части совпадают для всех $x > 0$. Получается тождество, а область допустимых значений остаётся единственным ограничением.

**Формула позволяет
свести логарифмы
к одной базе
и упростить сравнение
выражений.**

Формула перехода к новому основанию: $\log_a b = \log_c b / \log_c a$

1

универсальная замена основания
делает вычисления прозрачнее

Три стандартных свойства позволяют свести несколько логарифмов к одной записи и затем перейти к более простому уравнению.

Формулы свойств логарифмов из школьного курса алгебры

3

основных свойства помогают объединять логарифмы в одно выражение.

Пример 4: сумма логарифмов



ОДЗ

Сначала проверяют область допустимых значений: оба аргумента должны быть положительными. Для данного примера это означает, что $x-1>0$ и $x+1>0$, то есть $x>1$.

Объединение логарифмов

Затем применяют свойство суммы логарифмов и объединяют выражение в один логарифм. Получается $\log_5((x-1)(x+1))=2$, после чего можно перейти к показательной форме.

Проверка ответа

Из равенства $x^2-1=25$ находят $x^2=26$. Дальше остаётся проверить оба корня по ОДЗ: подходит только положительное значение, то есть $x=\sqrt{26}$.

**Одно важное
ограничение:
знаменатель не может
обращаться в нуль,
а вся дробь должна
быть положительной.**

Определение логарифма и правило знака дроби

2

условия нужно учитывать
одновременно при записи ОДЗ.

Метод замены переменной

Ввод переменной

Сначала вводят замену $t = \log_a(\dots)$, если в уравнении встречаются квадраты, линейные выражения или другие степени логарифма. Так задача становится более наглядной и управляемой.

01

Решение по t

После замены исходное уравнение обычно превращается в квадратное или линейное относительно t . Его решают обычными алгебраическими способами, не возвращаясь пока к x .

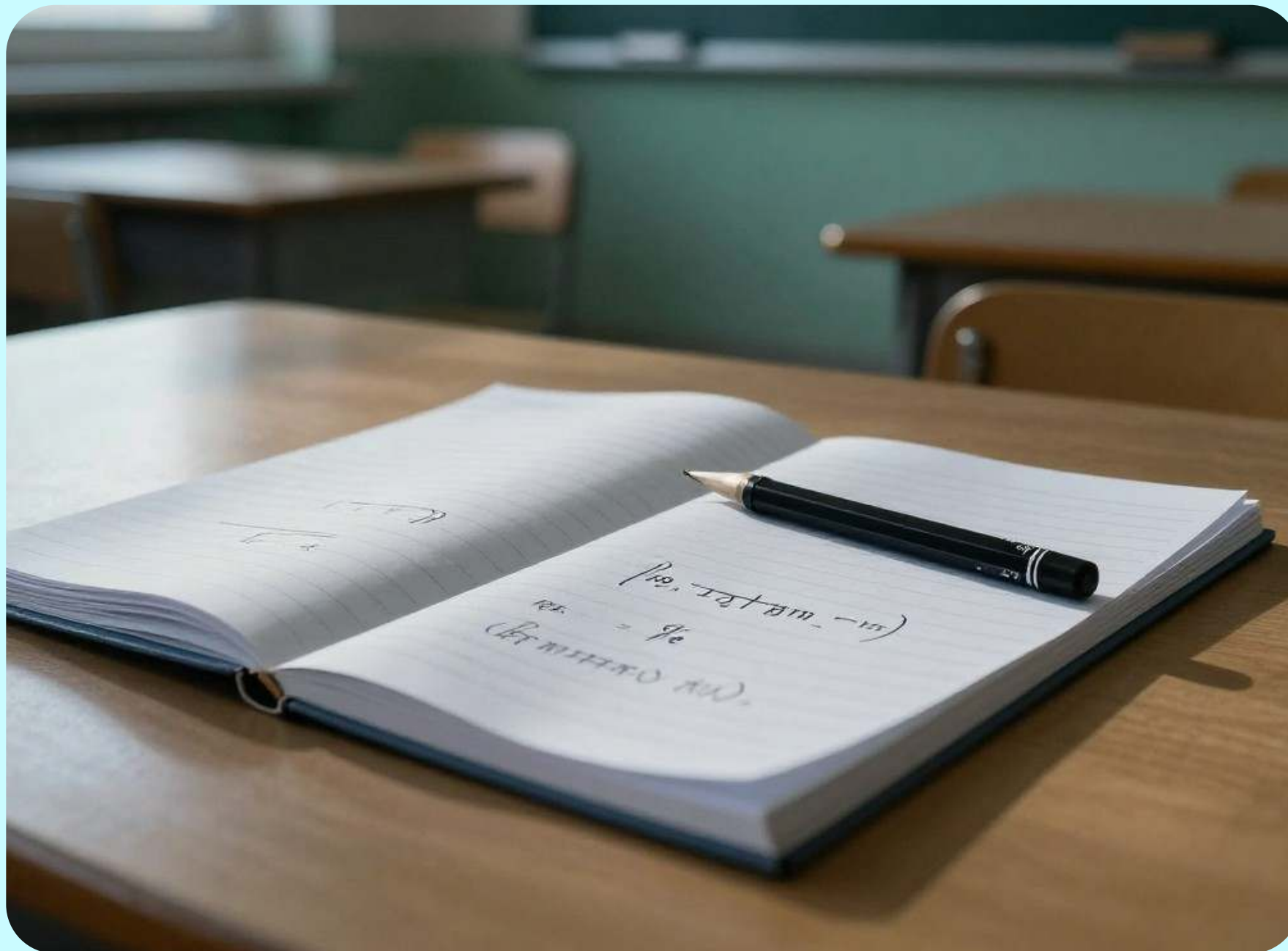
02

Возврат к x

Затем выполняют обратную подстановку и снова получают уравнение с x . На этом шаге особенно важно проверить найденные значения по ОДЗ, чтобы исключить ошибки.

03

Пример 5: квадратное уравнение



01 Введение замены

Обозначаем $t = \log_2 x$, чтобы избавиться от громоздкой записи и рассматривать обычное квадратное уравнение. Тогда исходное выражение становится $t^2 - 5t + 6 = 0$.

02 Находим t

Разложив квадратный трёхчлен, получаем два значения: $t = 2$ и $t = 3$. Это значит, что для логарифма возможны две разные степени двойки.

03 Проверяем корни

Возвращаемся к переменной x : $x = 4$ и $x = 8$. ОДЗ здесь проста — $x > 0$, поэтому оба корня проходят проверку и остаются ответом.

Пример 6: разные основания в правой части

Приведение основания

Сначала находят значение правой части через преобразование основания. Так как $4=2^2$, логарифм $\log_4 8$ удобно выразить через основание 2 и получить точное число.

01

Переход к общему виду

После вычисления правой части уравнение становится $\log_2(x-1)=3/2$. Это уже равенство логарифма с известным числом, которое можно переписать в показательной форме.

02

Финальная проверка

Из $x-1=2^{3/2}$ находят $x=1+2^{3/2}$. Перед записью ответа обязательно проверяют условие $x-1>0$, чтобы убедиться в корректности решения.

03

Типовые ошибки: ОДЗ и аргументы

- **Пропуск ОДЗ**

Если не выписать ОДЗ заранее, легко потерять важные ограничения для аргумента логарифма. Тогда в ответ могут попасть значения, при которых выражение вообще не определено.

- **Неверная логика равенства**

При одинаковых основаниях нельзя механически приравнивать всё выражение без анализа аргументов. Равенство логарифмов допустимо только тогда, когда сами аргументы положительны и действительно совпадают.

- **Забытый знаменатель**

Особенно часто ошибки возникают в дробях, где нужно помнить и о нуле в знаменателе, и о положительности всей дроби. Эти условия проверяют отдельно.

- **Правильная последовательность**

Полезно держать правило: сначала область допустимых значений, затем преобразования, и только потом ответ. Такой порядок экономит время и уменьшает число неудачных попыток.

Типовые ошибки: посторонние корни

Квадратирование

Возведение в квадрат может добавить лишние решения, потому что новое уравнение оказывается слабее исходного. Поэтому после преобразования всегда возвращаются к проверке в исходной записи.

Умножение на выражение

Если умножать обе части на выражение с переменной, можно изменить множество допустимых значений. Особенно осторожно нужно действовать, когда множитель может быть равен нулю.

Логарифмирование

При логарифмировании обеих частей важно помнить, что логарифм определён только для положительных значений. Любое нарушение этого условия сразу делает преобразование неверным.

Финальная отсечка

Даже найденный «красивый» корень не считается верным без проверки по ОДЗ. Именно последняя проверка отделяет правильный ответ от постороннего.

Тренажёр: 4 задачи

№	Тип	Ответ
1	Показат. форма	$x=11$
2	Сумма	$x=8$

Задачи подобраны так, чтобы отработать основные приёмы: прямой переход к показательной форме, объединение логарифмов, сравнение аргументов и замену переменной.

Во всех четырёх примерах решающими остаются ОДЗ и проверка найденных значений.

Учебные примеры по теме «Логарифмические уравнения»

Логарифмы без ошибок

Логарифмические уравнения становятся понятными, если идти по одному и тому же маршруту: ОДЗ, свойства, преобразование, решение и проверка. Именно дисциплина в этих шагах даёт надёжный результат.