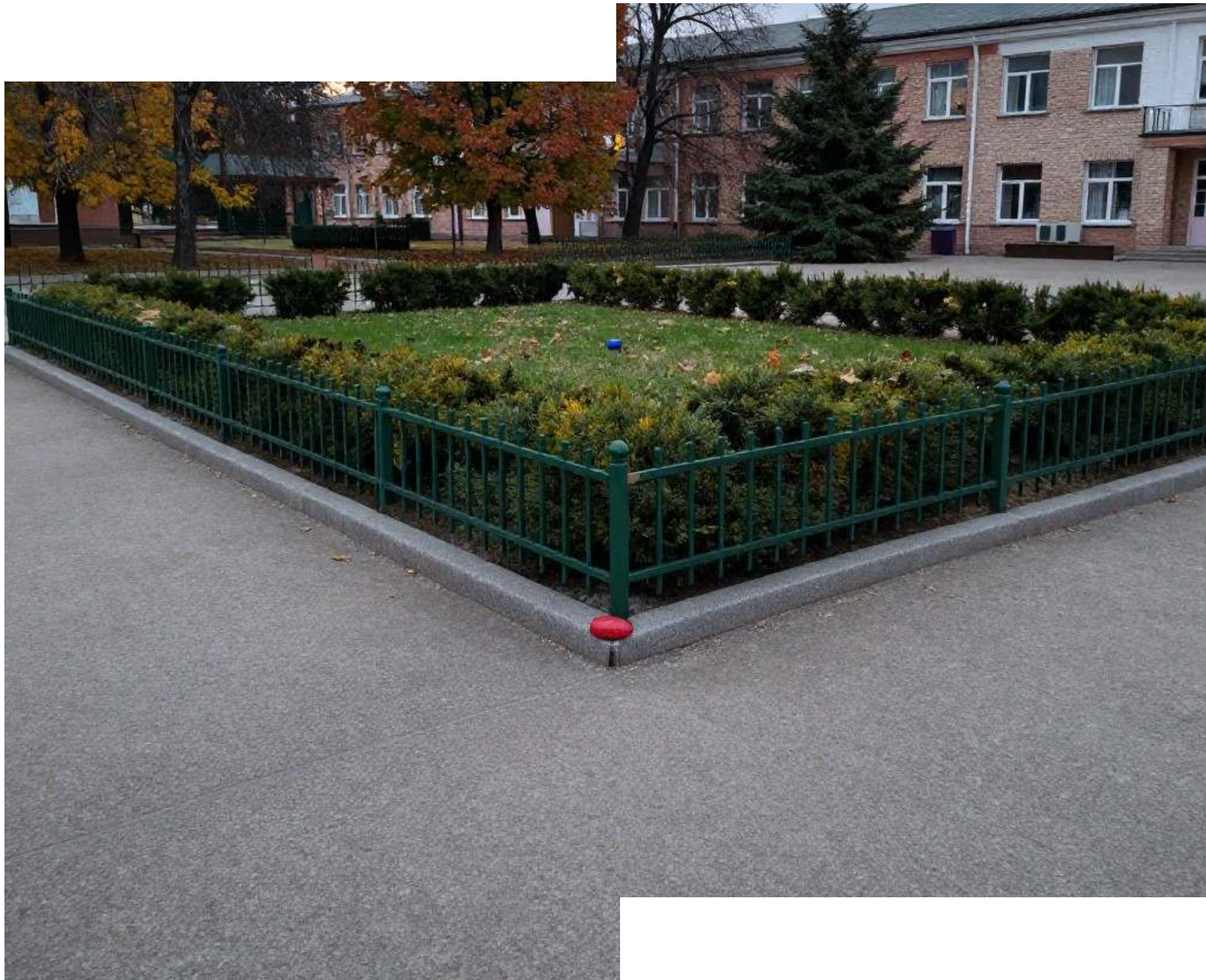


Граничные и внутренние точки плоских фигур: основа понятия замкнутой области

Плоскую фигуру описывают как множество точек: внутри, на границе и снаружи.



Зачем это в школьной геометрии?



В 10 классе эти понятия связывают планиметрию с координатами и графиками неравенств. Они позволяют безошибочно различать точки внутри области, на её краю и вне неё — и понимать, как меняется множество при переходе от строгих неравенств к нестрогим.

Плоская фигура — это состав точек



Точки внутри фигуры

Если точка относится к множеству фигуры так, что любой её «маленький круг» целиком остаётся внутри, она считается принадлежащей фигуре. На координатной плоскости это читается как область на графике.



Точки на границе

Точка граничит с фигурами двух миров: рядом с ней в любой окрестности есть и точки множества, и точки вне него. Поэтому граница не «пропускает» точку — она её отделяет.



Точки вне фигуры

Для внешней точки можно подобрать окрестность, которая полностью не пересекает множество фигуры. Такое различие важно, чтобы корректно интерпретировать условия на координатной плоскости.

Три типа точек: как их различать

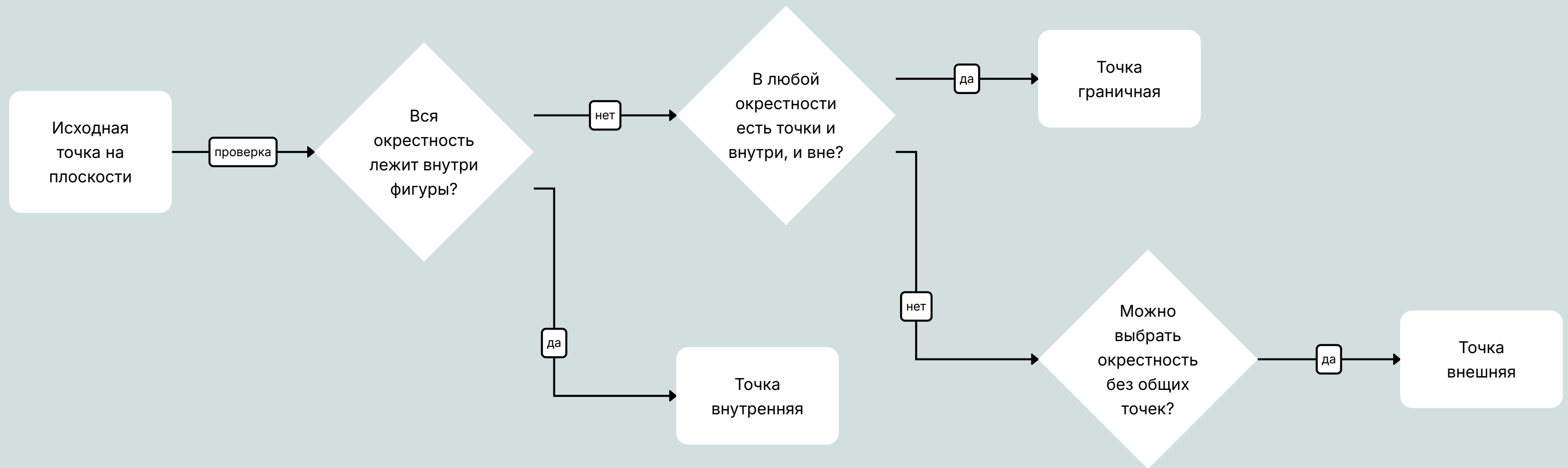
Тип точки определяется тем, как ведёт себя любая достаточно малая окрестность вокруг неё: попадает ли она целиком в фигуру, пересекает ли границу или полностью её избегает.

Критерий един: поведение окрестности. Он работает для любых фигур, даже если граница сложная.

Тип точки	Определение	Признак на плоскости	Пример
Внутренняя	Окрестность лежит внутри	Есть «запас» до границы	Точка внутри круга
Граничная	В любой окрестности есть и внутри, и снаружи	Окрестность пересекает границу	Точка на окружности
Внешняя	Существует окрестность без общих точек	Можно отгородиться от фигуры	Точка вне круга

Проверка типа точки через окрестность

Алгоритм опирается на то, целиком ли попадает окрестность точки внутрь фигуры, пересекает ли она границу.



Внутренняя точка

01

Внутренняя точка имеет «запас» до границы: вокруг неё можно провести достаточно маленький круг, который целиком останется внутри фигуры. Тогда вся окрестность принадлежит множеству.

02

Для круга внутренними являются точки, расстояние от которых до центра меньше радиуса. Для квадрата внутренними будут точки, лежащие строго внутри его сторон, без попадания на края.

03

Именно внутренние точки образуют основную часть фигуры в координатном смысле. Когда строят область по неравенству, внутренность обычно задаётся строгой частью условия.

Граничная точка и граница фигуры



Что происходит на границе

Граничная точка находится на краю фигуры: рядом с ней невозможно «спрятаться» от перехода к внешней части. Для любой окрестности найдутся и точки множества, и точки вне него.

Как формируется граница у замкнутых фигур

У круга граница — окружность. Для треугольника и любого многоугольника граница составлена из всех его сторон и вершин. Для замкнутой области граница входит в множество и отделяет фигуру от внешней части плоскости.

Внешняя точка

01

Внешняя точка не принадлежит фигуре. Более того, от неё можно «отгородиться»: существует окрестность, которая не имеет общих точек с множеством точек фигуры.

02

Для круга внешними будут точки, лежащие вне окружности, то есть на достаточно большом расстоянии от центра. Даже если они находятся близко к границе, всё равно можно выбрать окрестность, не пересекающую фигуру.

03

Это понятие помогает точно ответить, какие точки не входят в область. Оно особенно ценно при работе с неравенствами: там важно понимать, включается ли край или полностью исключается.

Круг и окружность: что меняется в точках

Объект	Определение	Внутренние точки	Граничные точки	Внешние точки
Круг	$\leq$ радиуса	Есть	Есть	Есть
Окружность	$=$ радиуса	Нет	Все точки — граница	Есть

Круг и окружность различаются тем, включают ли они границу. Поэтому меняется набор внутренних, граничных и внешних точек.

Круг включает область внутри, а окружность — только линию границы. Поэтому при записи на координатной плоскости важно различать строгие и нестрогие условия.

Распределение точек вокруг границы круга

Визуально граница занимает «тонкий» слой по сравнению с внутренностью. Но именно она определяет, включаем ли мы равенство в условие.

Даже когда граничные точки составляют малую долю, без их учёта описание фигуры становится неполным: меняется тип области (открытая или замкнутая).

Замкнутая область

Замкнутая область включает все внутренние точки фигуры и все граничные точки, то есть она «принимает» и сам край. Благодаря этому множество точек определяется однозначно: нет разрыва между допустимым и недопустимым.

Классические примеры: круг вместе с окружностью, треугольник вместе со всеми сторонами и вершинами, прямоугольник вместе с его сторонами. В каждом случае граница входит в множество и отделяет фигуру от внешней части плоскости.

Границу замкнутой области можно воспринимать как «рамку», которая принадлежит самой области. Именно поэтому при переходе от строгих неравенств к нестрогим равенство на границе становится допустимым.

На координатной плоскости замкнутая область обычно задаётся нестрогими неравенствами. Тогда точки, лежащие на линии уровня (например, на окружности), включаются, а значит, область становится целостной, без «дыр» на краю.

Открытая область

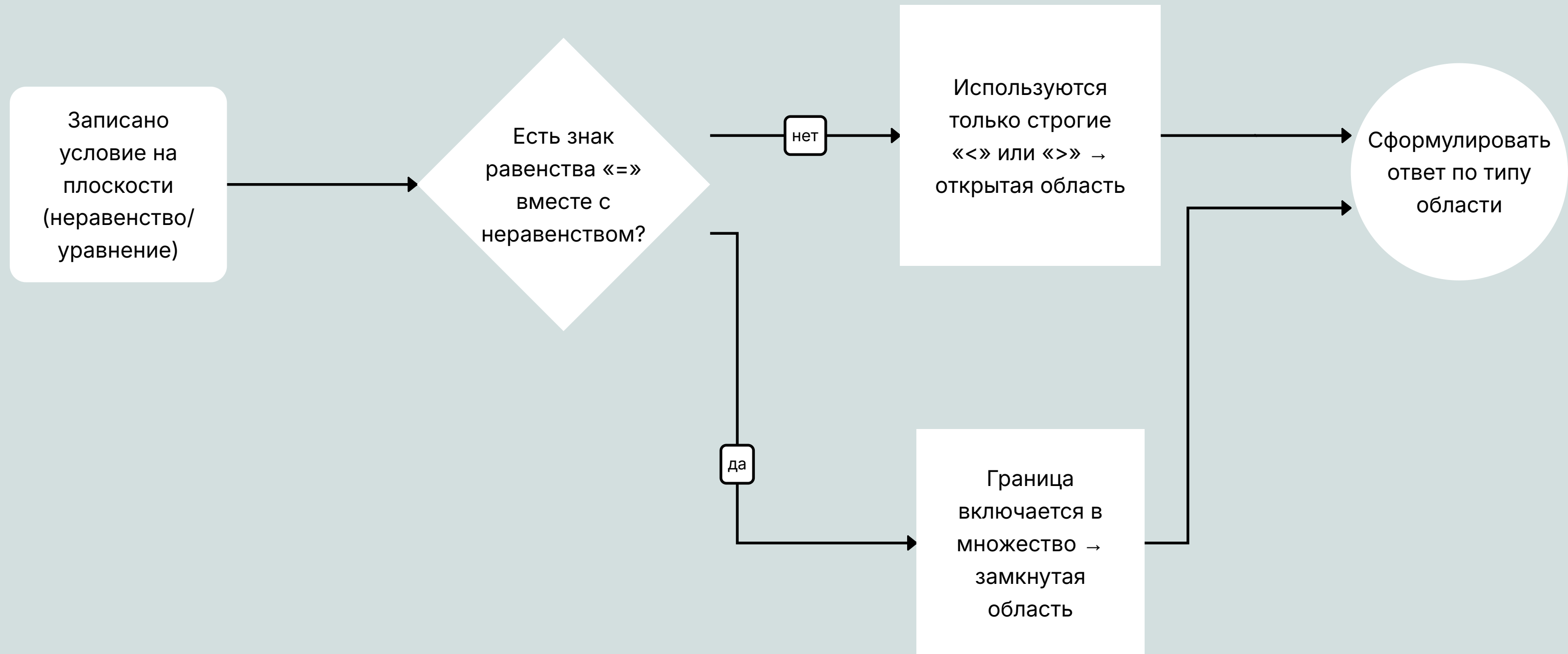
Открытая область состоит только из внутренних точек и не включает свою границу: любая точка на краю не принадлежит множеству. Поэтому область выглядит «без линии», хотя геометрически она по-прежнему имеет чёткий предел.

Для круга открытая область задаётся условием расстояния до центра: точки удовлетворяют строгому неравенству $r < R$. Это означает, что даже если точка очень близка к окружности, но не на ней, она допустима; на границе — нет.

В записи на координатной плоскости открытая область обычно соответствует строгим неравенствам. Такая форма особенно удобна, когда нужно исключить крайние значения, например чтобы «не брать» точки, лежащие ровно на условной окружности или стороне.

Как отличить открытую область от замкнутой

Опираемся на то, включены ли граничные точки в заданное множество: от этого зависит тип области.



Связь с уравнениями и неравенствами



Уравнение задаёт линию-грань

Уравнение вида $x^2 + y^2 = 9$ описывает множество точек, равноудалённых от центра: получается окружность радиуса 3. Эти точки образуют именно границу, то есть «линию», отделяющую области.



Строгое неравенство задаёт внутренность

Неравенство $x^2 + y^2 < 9$ задаёт внутренние точки, удалённые от центра меньше чем на 3. Равенство на окружности не допускается, поэтому область получается открытой и не включает край.



Нестрогое неравенство делает область замкнутой

Если записано $x^2 + y^2 \leq 9$, то допускаются и внутренние точки, и точки на границе. Следовательно, множество становится замкнутой областью: внутренняя часть и окружность входят вместе.

Примеры на многоугольниках

01

У треугольника внутренние точки лежат строго внутри его контуров: вокруг каждой такой точки можно провести малую окрестность, целиком остающуюся в фигуре. Граница здесь — не просто «линия», а множество точек особого типа.

03

Внешние точки треугольника находятся вне фигуры: существует окрестность, не пересекающая треугольник. Даже если внешняя точка очень близка к стороне, принадлежность определяется строго, а не «на глаз».

02

Граничные точки треугольника располагаются на его сторонах и в вершинах. Для любой граничной точки любая достаточно малая окрестность одновременно содержит точки треугольника и точки вне него.

04

Для выпуклого многоугольника граница состоит из всех его сторон и вершин. Замкнутая область включает и внутренность, и всю ломаную границу, поэтому понятие границы одинаково согласуется для разных фигур.

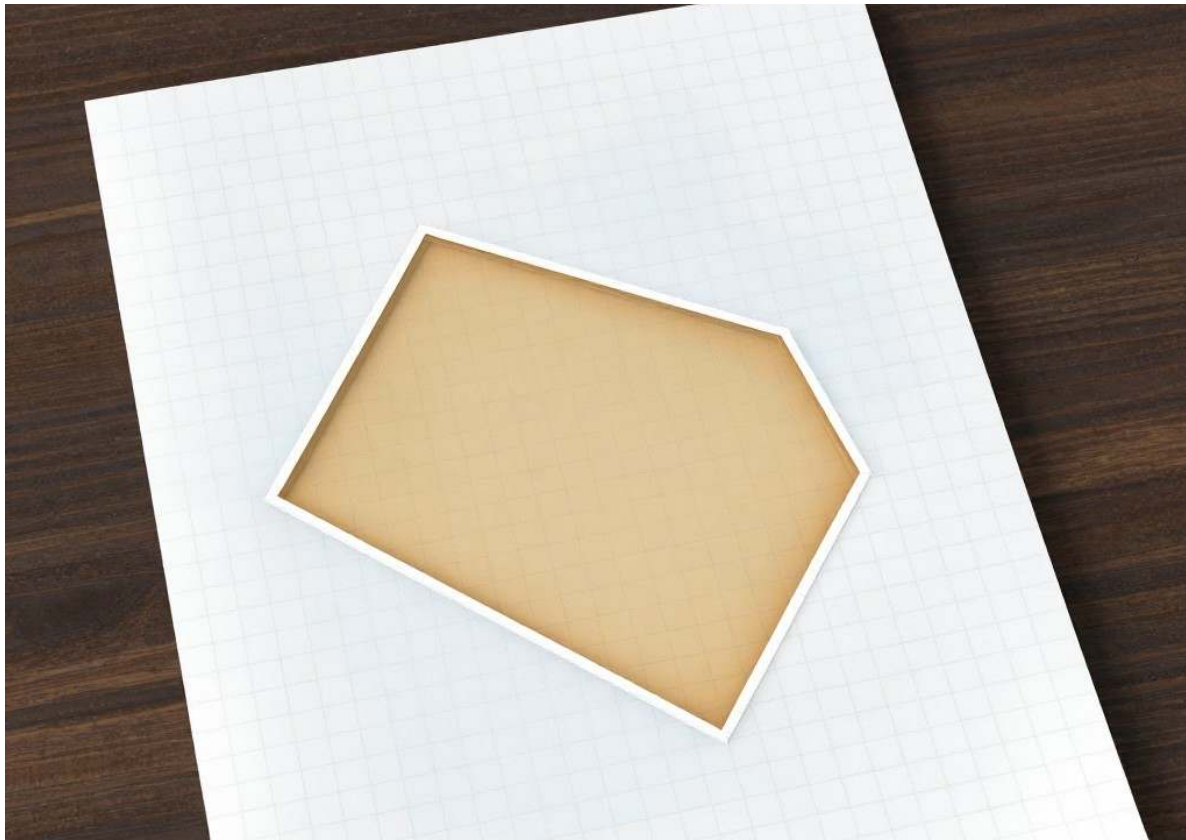
Открытая и замкнутая область: сравнение

Сравните, как различается принадлежность границы множеству: это напрямую отражается на знаках в записи неравенств и на том, какие точки входят в область.

Ключевой критерий один: решает включение граничных точек. Поэтому одна и та же геометрическая фигура при смене строгого знака на нестрогий «добавляет» край и меняет тип области.

Признак	Открытая область	Замкнутая область
Состав	Только внутренние точки	Внутренние и граничные точки
Граница	Не входит	Входит в множество
Тип записи	Обычно строгие неравенства	Обычно нестрогие неравенства

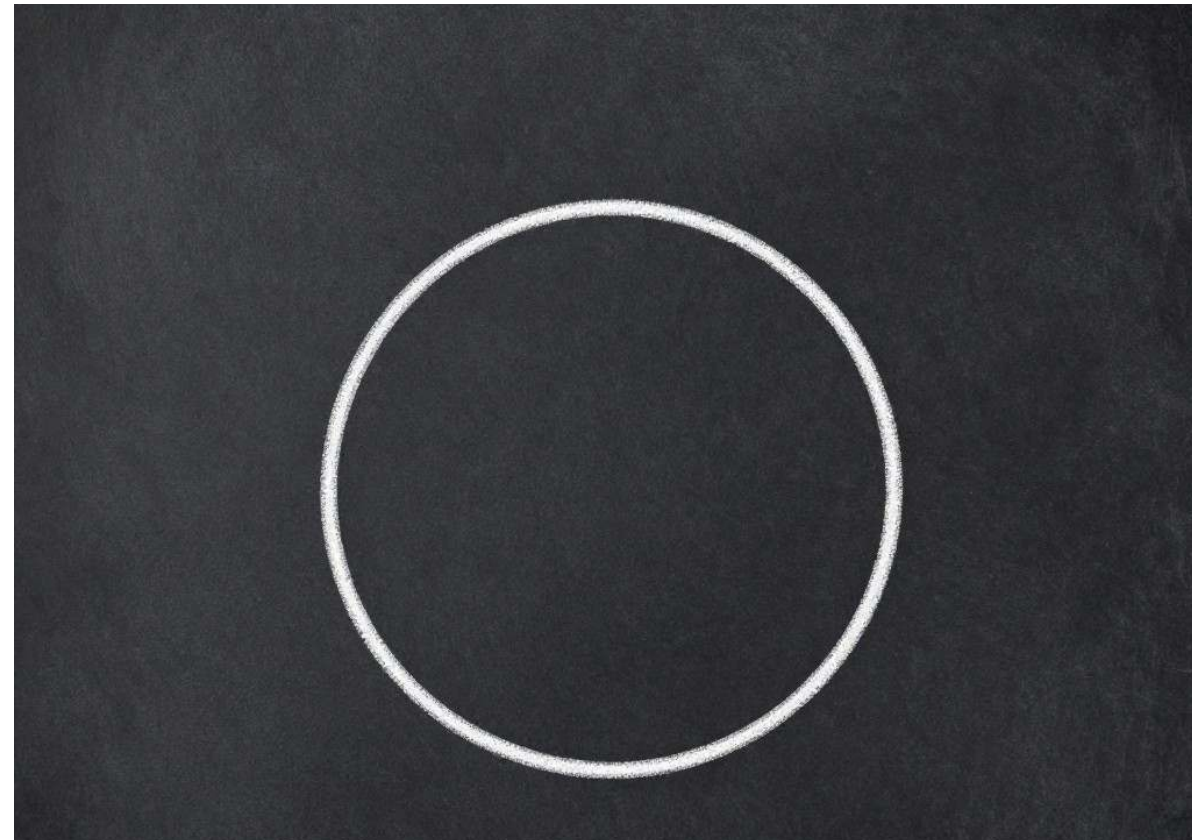
Граница как разделитель областей на чертеже



01

Заливка внутри, линия по краю

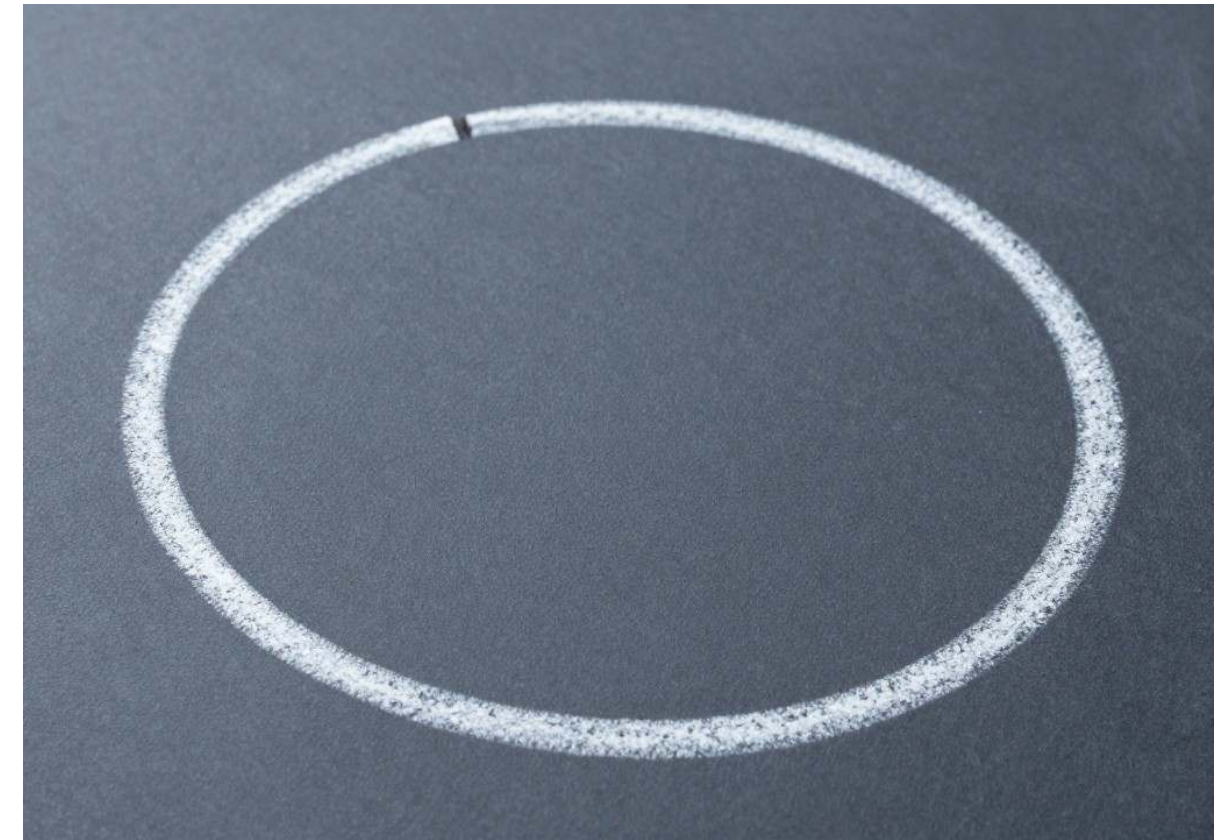
Когда на рисунке внутренность фигуры закрашивают, а границу проводят линией, сразу видно, какие точки входят в область, а какие остаются снаружи. Граница воспринимается как «разметка» предела: её пересечение меняет принадлежность точек.



02

Фон и пустота вокруг фигуры

Визуально внешняя область часто оставляется без заливки и отделяется только контуром. Такая композиция помогает не путать «близко к краю» и «принадлежит области»: точка может быть почти на границе, но всё равно оставаться вне множества.



03

Подсветка граничных точек для ясности

Если на чертеже отмечают несколько граничных точек и выделяют именно линию границы, становится проще применить критерий по окрестности. Тогда ясно, почему граничные точки нельзя считать внутренними: в любой их окрестности есть и входящие, и выходящие точки.

Две области на координатной плоскости: строгая и нестрогая запись

Строгая запись отсекает окружность радиуса 2, а нестрогая добавляет её целиком как множество граничных точек. Поэтому тип области меняется без изменения центра и радиуса.

Переход от «<» к «≤» означает включение границы в множество. Это и есть математический смысл различия открытой и замкнутой областей в координатной записи.

Образовательный пример: неравенства $x^2 + y^2 < 4$ и $x^2 + y^2 \leq 4$ (радиус 2).

Типичные ошибки при определении точек и областей

Частая ошибка — считать граничные точки внутренними. Однако для граничной точки любая малой окрестность обязательно содержит и точки фигуры, и точки вне неё, значит «запаса до границы» нет.



Ещё одна типичная путаница — смешивать окружность и круг. Окружность представляет только границу, а круг включает и внутренность; поэтому в координатной записи они соответствуют разным знакам и дают разные множества.



Иногда забывают, что внешняя точка может находиться очень близко к границе, но всё равно не принадлежать фигуре. При этом можно подобрать окрестность без точек области, что и подтверждает внешность.



Надёжная проверка опирается на два признака: поведение окрестности точки и то, включается ли граница в множество. Эти идеи универсальны и работают для любых плоских фигур и их неравенств.



Точный ключ к плоским фигурам

Внутренние точки лежат внутри фигуры, граничные — на её краю, внешние — вне фигуры. Замкнутая область включает и внутренние, и граничные точки; открытая — только внутренние. Эти различия позволяют строго читать рисунки, круги и многоугольники, а также понимать неравенства на координатной плоскости.