

Свойства векторного умножения в геометрии 11 класса

Рассмотрим, как $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ задаёт перпендикуляр, площадь и направление — и почему это упрощает задачи.



Геометрия пространства и векторный метод

В 11 классе тема становится связующим звеном между планиметрией и стереометрией: векторное произведение описывает пространственные фигуры, даёт площади, нормали и проверку перпендикулярности. А координатный подход превращает геометрию в точные вычисления.



Определение векторного произведения

01

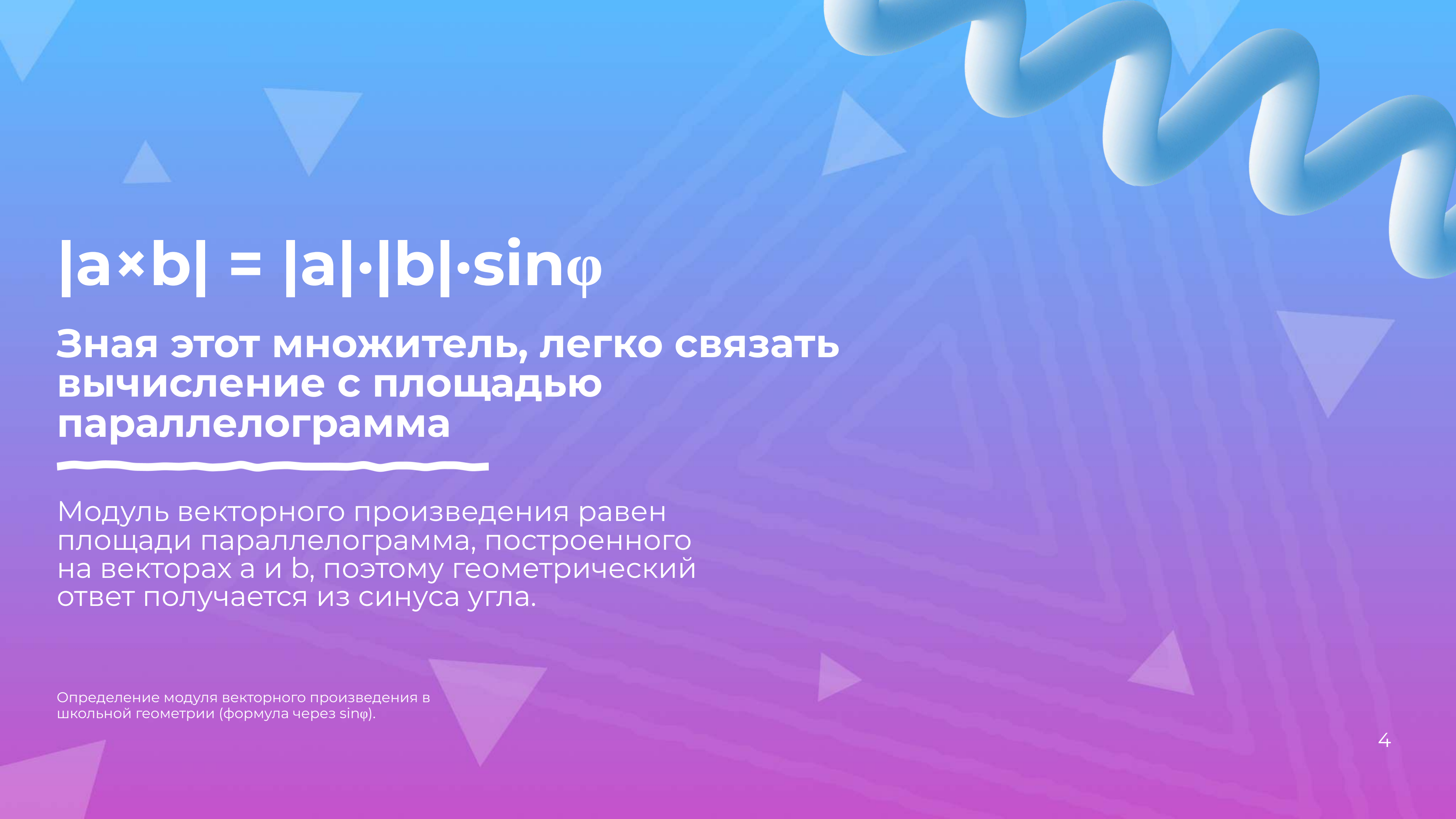
Векторное произведение $a \times b$ задаётся для двух векторов в R^3 : оно является третьим вектором, перпендикулярным обоим сомножителям. Направление определяется ориентацией пространства.

02

Длина результата связана с углом φ между векторами: $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$. Чем ближе векторы к «перпендикулярному» положению, тем больше значение синуса.

03

В координатах при $a = (a_x, a_y, a_z)$ и $b = (b_x, b_y, b_z)$ получаем формулу $a \times b = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$. Это позволяет вычислять результат напрямую.


$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$$

**Зная этот множитель, легко связать
вычисление с площадью
параллелограмма**

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b , поэтому геометрический ответ получается из синуса угла.

Определение модуля векторного произведения в школьной геометрии (формула через $\sin \varphi$).

Зависимость модуля от угла между векторами

При фиксированных длинах векторов значение $|a \times b|$ определяется только их взаимным положением, то есть углом φ .

График показывает максимум при $\varphi=90^\circ$ и ноль при $\varphi=0^\circ$ и 180° , значит площадь параллелограмма «исчезает» при коллинеарности.

Построение по функции $y=\sin\varphi$ для $|a|=|b|=1$; точки взяты из стандартных значений синуса.

Антикоммутативность



Меняется порядок

Для любых векторов в R^3 выполняется $a \times b = -(b \times a)$. Меняется порядок сомножителей, и знак «переворачивает» ориентацию результата.



Модуль остаётся тем же

Если поменять местами a и b , длина векторного произведения не меняется, потому что она зависит от $|a|$, $|b|$ и $\sin \varphi$, а $\sin \varphi$ симметричен.



Ориентация задаёт направление

Противоположное направление связано с тем, что правило правой руки различает «как» повернули вектор a к b в пространстве.

Основные свойства векторного произведения

Свойства помогают не только находить $a \times b$, но и аккуратно преобразовывать выражения для вычислений в координатах и геометрических выводов.

Свойство	Формула	Геометрический смысл
Антикоммутативность	$a \times b = -(b \times a)$	Меняется направление
Дистрибутивность	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	Сумма раскладывается
Однородность	$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$	Масштаб результата
Нулевой результат	$a \times a = 0$	Площадь = 0

Свойства позволяют переходить от сложных выражений к разложению на более простые случаи и контролировать знак и перпендикулярность результата.

Дистрибутивность по сложению

01

Существует два удобных равенства: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ и $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$. Они снимают «скобки» в векторных формулах.

02

Благодаря этому выражения для координатных вычислений упрощаются: вместо одного произведения получается сумма двух векторных произведений, каждое из которых проще найти.

03

В геометрических рассуждениях дистрибутивность работает как разложение: сложный вектор представляют как сумму составляющих, а площадь-ориентацию удобно суммировать.

04

На практике это полезно, когда задана фигура, сторона которой выражена через несколько направляющих векторов: тогда площадь становится суммой вкладов.

Однородность по числовому множителю

01

Если один из векторов умножить на число λ , то векторное произведение масштабируется:
 $a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$, $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$.

02

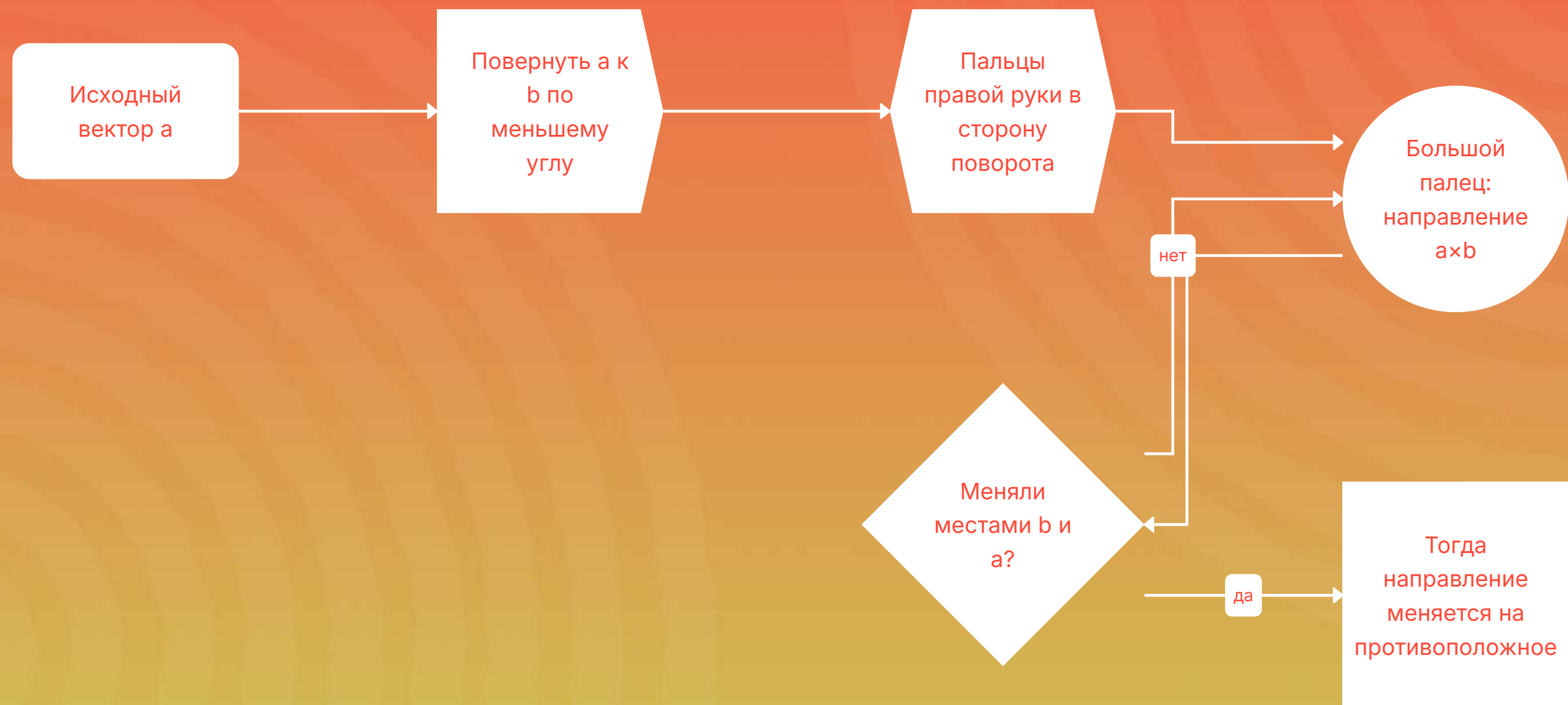
При положительном λ направление результата сохраняется, а при отрицательном — меняется на противоположное, потому что знак фактически меняет ориентацию одного сомножителя.

03

Особый случай $\lambda=0$ даёт нулевой результат: ведь один из векторов становится нулевым, а площадь параллелограмма на таких «основаниях» равна нулю.

Правило правой руки для направления $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Как быстро определять ориентацию результата (и проверять знак) по правилу поворота от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$



Перпендикулярность результата



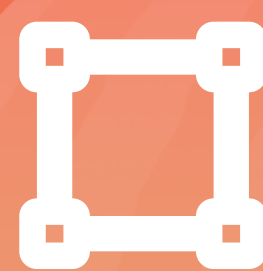
Ортогональность к обоим векторам

Векторное произведение $a \times b$ по построению направлено перпендикулярно каждому сомножителю. Поэтому скалярное произведение $(a \times b) \cdot a$ равно нулю, и аналогично $(a \times b) \cdot b$ равно нулю при любых a и b .



Поиск нормали к плоскости

Если в плоскости заданы два неколлинеарных вектора направления, их векторное произведение даёт нормаль. Это позволяет находить уравнения плоскостей и проверять, правильно ли выбрано направление перпендикуляра.



Проверка принадлежности и в плоскости

Чтобы убедиться, лежит ли некоторый вектор в заданной плоскости, достаточно проверить, ортогонален ли он нормали. Связка с условием $(a \times b) \cdot c = 0$ превращает геометрию в вычисляемую проверку.



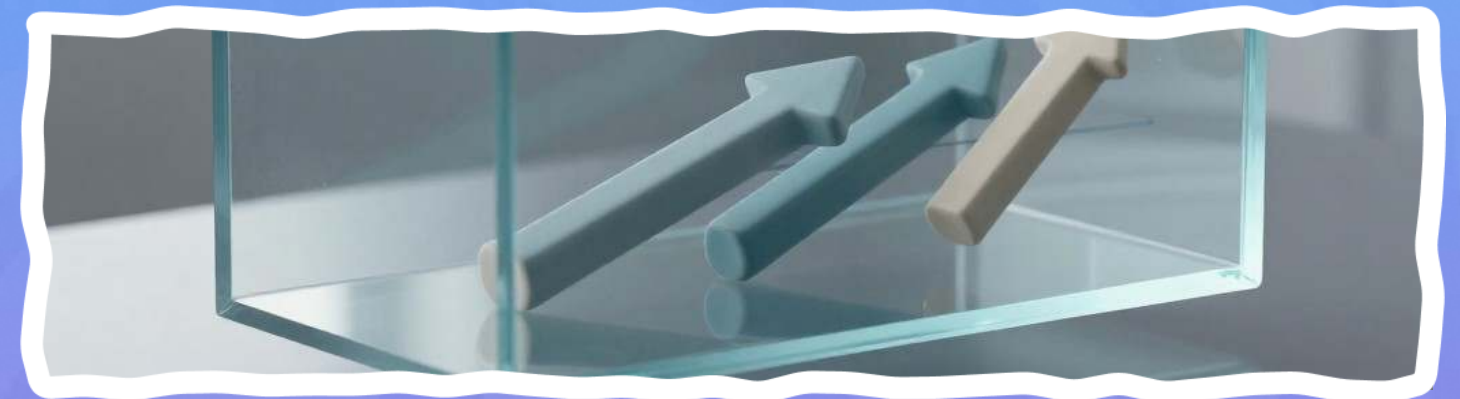
Доказательства в задачах стереометрии

В школьных задачах перпендикулярность служит опорой для доказательств взаимной ортогональности прямых, рёбер и диагоналей. От нуля скалярных произведений переходят к корректным геометрическим выводам.

Смешанное произведение: смысл объёма в трёх векторах

Грань, нормаль и «встроенный» объём

Представьте параллелепипед, у которого три направления задают векторы a , b и c . Вектор $a \times b$ строит нормаль к основанию, а затем умножение на c «подставляет» высоту в объём. Поэтому $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c$ — это объём в одной формуле.



Знак как подсказка об ориентации

Модуль $|[a, b, c]|$ даёт величину объёма, а знак отражает ориентацию тройки векторов. Если тройка «поворачивается» относительно ориентации пространства, знак меняется, но абсолютная величина объёма остаётся той же.



Когда параллелепипед «схлопывается» в плоскость

Если $[a, b, c] = 0$, значит векторы не задают ненулевой трёхмерный объём: один из векторов оказывается компланарным двум другим. Геометрически это соответствует ситуации, когда все три направления лежат в одной плоскости.



Когда векторное произведение равно нулю

Нулевое произведение означает, что параллелограмм вырождается: его площадь равна нулю, а векторы не формируют полноценное «пространственное» основание.

Все перечисленные причины сводятся к одному критерию: угол между векторами даёт $\sin\varphi=0$, поэтому модуль $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ равен нулю.

Векторное произведение базисных векторов

01

В правом ортонормированном базисе направления заданы так, что $i \times j = k$. Это фиксирует правило ориентации пространства и позволяет получать третий вектор по первым двум без дополнительных вычислений.

02

Точно так же $j \times k = i$ и $k \times i = j$. Если в формуле поменять местами множители, знак меняется на противоположный: причина — ориентированность и правило правой руки.

03

Например, $j \times i = -k$, $k \times j = -i$, $i \times k = -j$. Такие «знак-переключатели» особенно важны в координатных задачах: от них зависит правильное направление результата.

Ключевые тождества для запоминания

Тождество	Формула	Смысл
Вектор с самим собой	$a \times a = 0$	Площадь нулевая
Перестановка множителей	$a \times b = -(b \times a)$	Меняется направление
Распределение по сумме	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	Скобки раскрываются
Умножение на число	$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$	Модуль пропорционален
Перпендикулярность	$(a \times b) \cdot a = 0$	Результат ортогонален

Тождества связывают вычисления с геометрическим смыслом: что происходит со знаком, модулем и перпендикулярностью при изменении порядка и масштабировании векторов.

Эти тождества превращают сложные выражения в контролируемые шаги: сначала раскрывают скобки, затем проверяют знак и ортогональность через скалярные произведения.

Опорные свойства векторного произведения из школьной программы ($\mathbb{R}^3$, курс 11 класса).

Типичные ошибки при решении задач

01

Частая ошибка — путаница между скалярным и векторным произведением. Нельзя заменять $(a \times b) \cdot c$ на $a \cdot (b \times c)$ без аккуратной проверки смысла операции: тип результата принципиально разный.

02

Другая распространённая проблема — неверный порядок векторов. Из-за антикоммутативности $a \times b = -(b \times a)$ знак легко «перевернуть», а вместе с ним — направление нормали или ориентацию объёма.

03

Ошибки возникают и при вычислении $\sin \varphi$: ученики иногда подставляют угол в градусах без перехода к функции синуса по выбранным единицам, либо берут не тот угол между направлениями.

04

Надёжная проверка результата включает контроль перпендикулярности, модуля и согласованности направления с геометрической картинкой. Если хотя бы один признак противоречит, расчёт стоит пересмотреть.

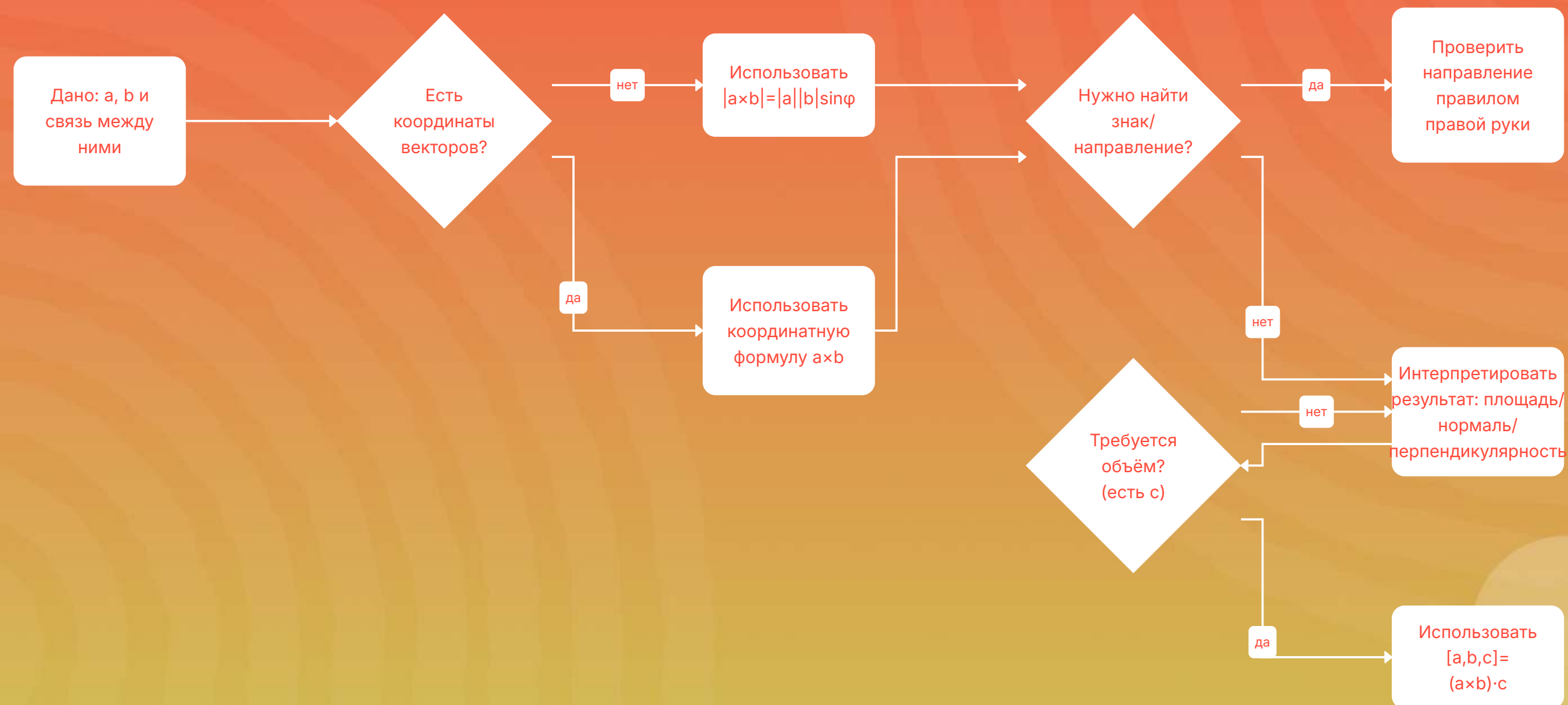
Применения векторного произведения

Помимо площади и нормалей, формула $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ часто появляется в описании вращений и взаимодействий сил, потому что она естественно «кодирует» поворот и направление оси.

Разные предметные области используют одно ядро: перпендикулярность и величину, зависящую от синуса угла между направлениями. Это объясняет универсальность метода.

Алгоритм решения задач на векторное произведение

От исходных данных — к выбору формулы, вычислению и проверке геометрического смысла



Формулы, которые нужно знать



Ортогональность результата

Векторное произведение удовлетворяет условию перпендикулярности: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ортогонален обоим векторам. На практике это помогает быстро отсеивать неверные направления и проверять вычисления через скалярные произведения.



Модуль через синус угла

Основная вычислительная формула: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$. Она связывает геометрию и координаты: при изменении взаимного положения меняется площадь основания, а при $\varphi = 0^\circ$ или 180° результат становится нулевым.



Антикоммутативность

Перестановка сомножителей меняет направление на противоположное: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. Поэтому в координатных задачах знак особенно важен: один неверный обмен приводит к ошибке в ориентации нормали.



Дистрибутивность по сумме

Для упрощения выражений работает правило: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. Аналогично раскрывают $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Это превращает сложную задачу в сумму более простых вычислений по частям.



Смешанное произведение и объём

Смешанное произведение определяется как $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Модуль даёт объём параллелепипеда, а при $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ тройка векторов компланарна, то есть объём вырождается в плоскость.

Свойства векторного умножения — точный инструмент геометрии

Перпендикулярность результата, антикоммутативность, дистрибутивность и однородность делают вычисления осмысленными: они ведут к площади, объёму, нормалям и ориентации в пространстве. В 11 классе это важная опора стереометрии и векторного метода.