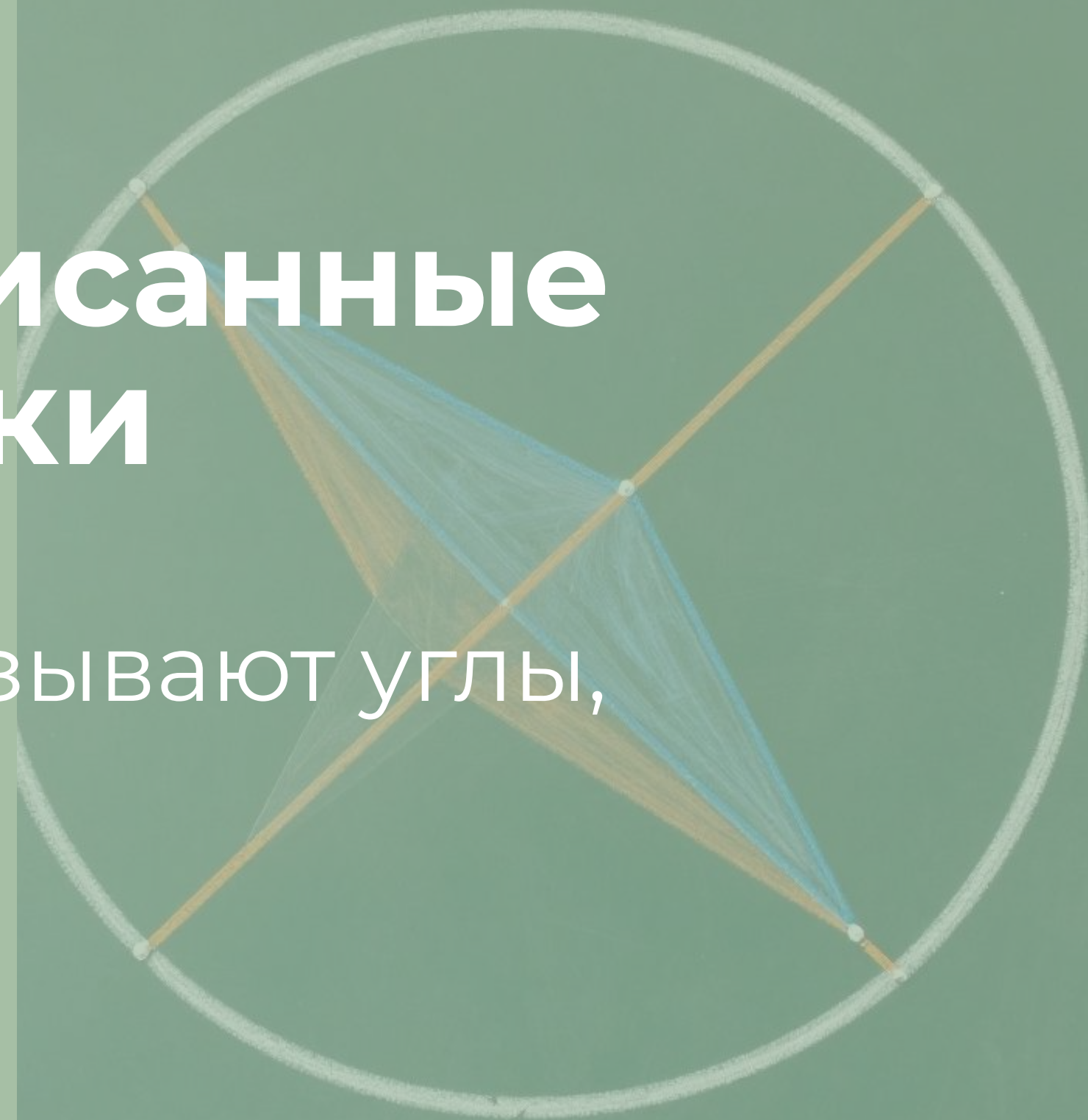
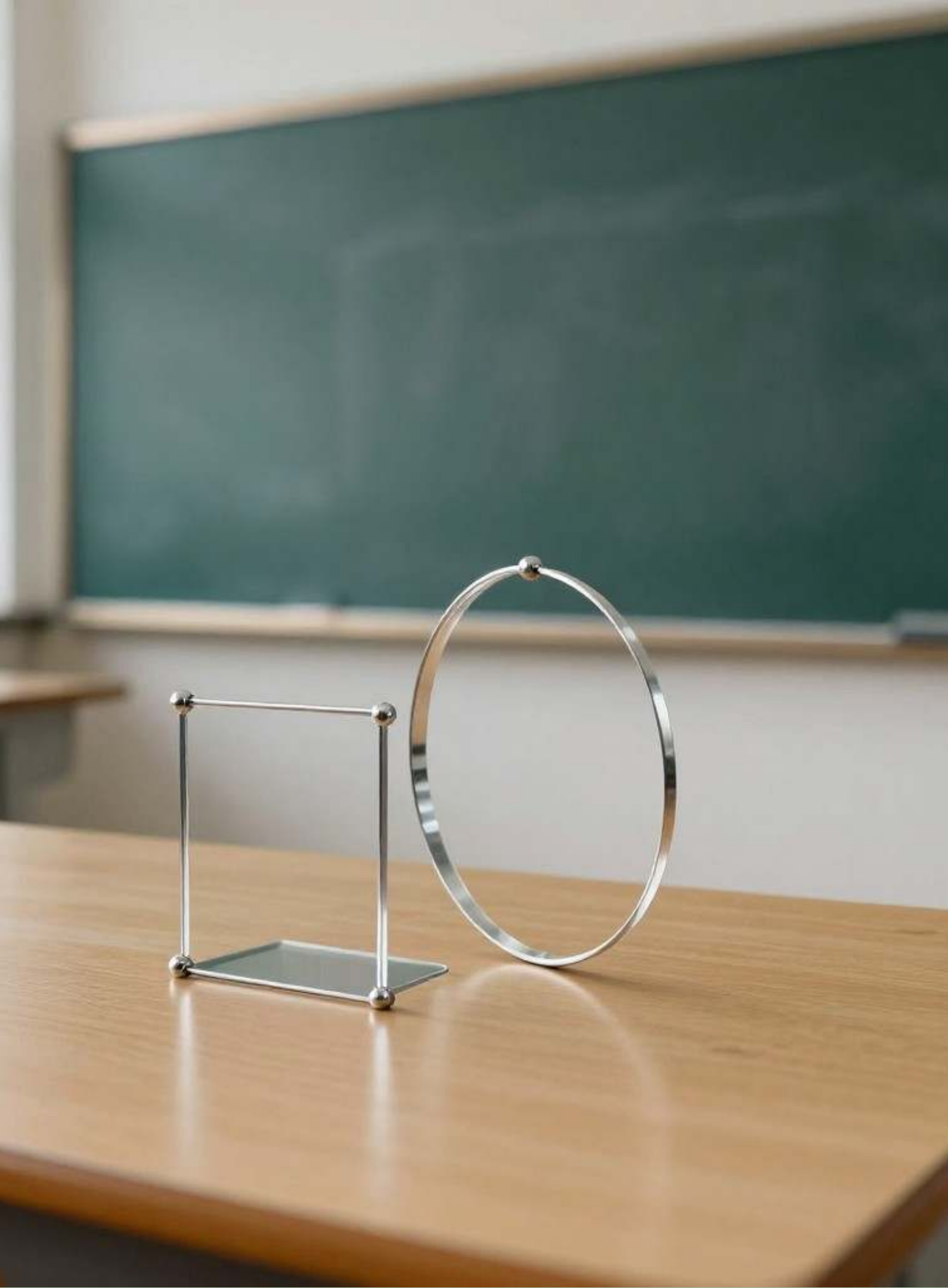


Вписанные и описанные четырёхугольники

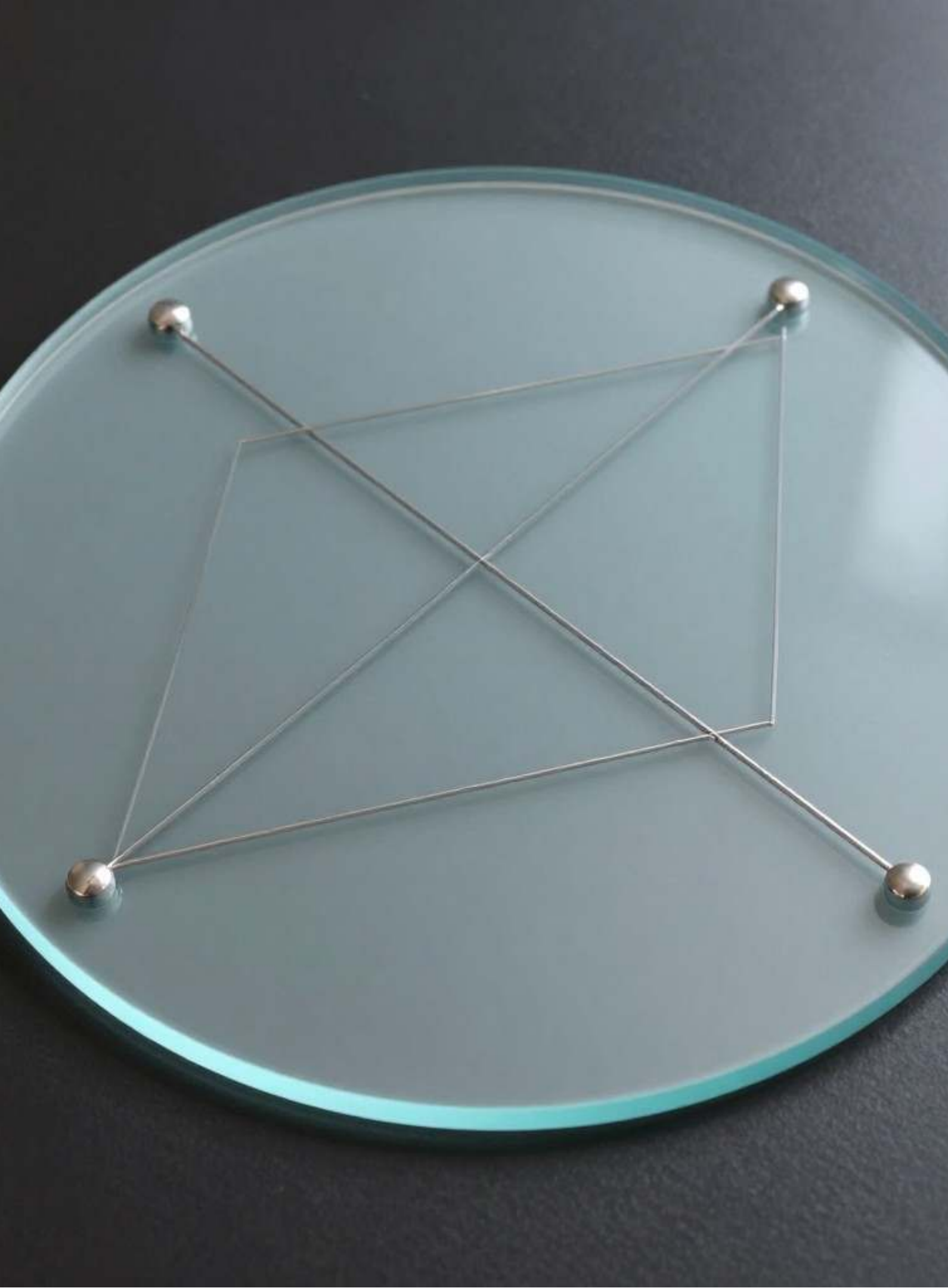
Две фигуры, которые связывают углы,
стороны и окружность.





Зачем изучать эту тему

Эти четырёхугольники часто встречаются в задачах 9 класса и ОГЭ. Они помогают находить углы, стороны и площади, а также тренируют умение доказывать геометрические свойства на понятных примерах из жизни и черчения.



Что такое вписанный четырёхугольник

■ Все вершины на окружности

Вписанным называют четырёхугольник, у которого каждая вершина лежит на одной окружности. Такая фигура удобно рассматривается через дуги, хорды и вписанные углы.

■ Главный угловой признак

У вписанного четырёхугольника сумма противоположных углов всегда равна 180° . Это позволяет быстро находить неизвестный угол, если известен противоположный ему.

■ Простой числовой пример

Если один угол равен 110° , то противоположный ему угол равен 70° , потому что вместе они составляют развернутый угол. Это часто используется в школьных задачах.

■ Известный частный случай

Прямоугольник всегда является вписанным четырёхугольником: все его углы прямые, а значит, любые противоположные углы в сумме дают 180° .

Вписанный четырёхугольник на рисунке

01 Окружность через вершины

На рисунке видно, что одна окружность проходит через все четыре вершины четырёхугольника. Именно это и означает, что фигура вписана в окружность.

02 Хорды и дуги

Стороны четырёхугольника становятся хордами окружности. Поэтому углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, связаны между собой и помогают в доказательствах.

03 Наглядный пример

Особенно удобно рассматривать прямоугольник или любой выпуклый четырёхугольник, у которого все вершины лежат на окружности: так свойство видно без дополнительных построений.





Признаки вписанного четырёхугольника

Таблица помогает запомнить основные способы проверить, что четырёхугольник вписан в окружность.

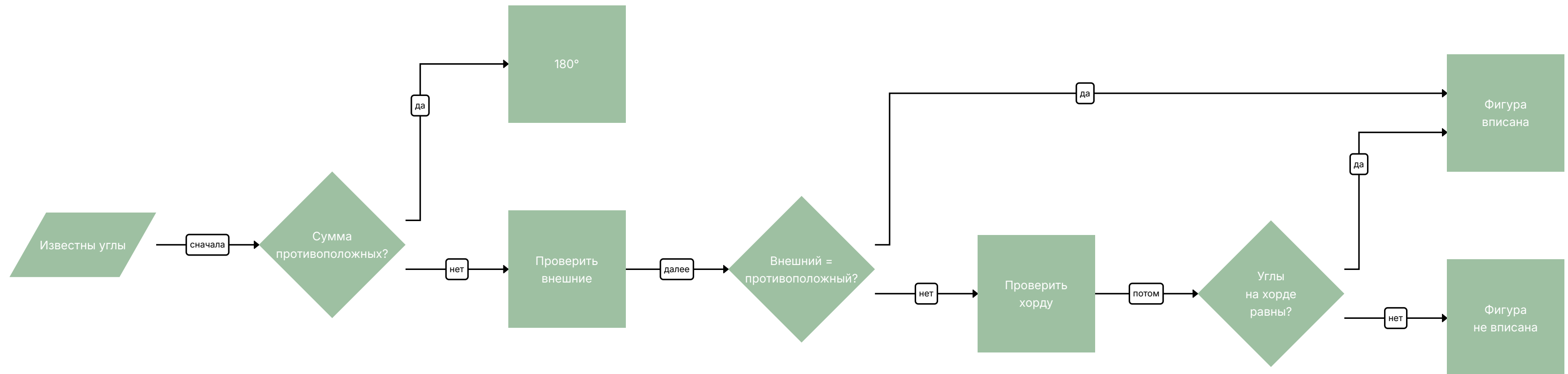
Достаточно установить один верный признак, чтобы сделать вывод о вписанности.

Признак	Что проверяем	Вывод
$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$	Противоположные углы	Фигура вписана
Внешний=противоположный	Один внешний и один внутренний	Фигура вписана
Одинаковая хорда	Углы на одной хорде	Углы равны

Свойства вписанных четырёхугольников из школьного курса геометрии

Как проверить вписанность

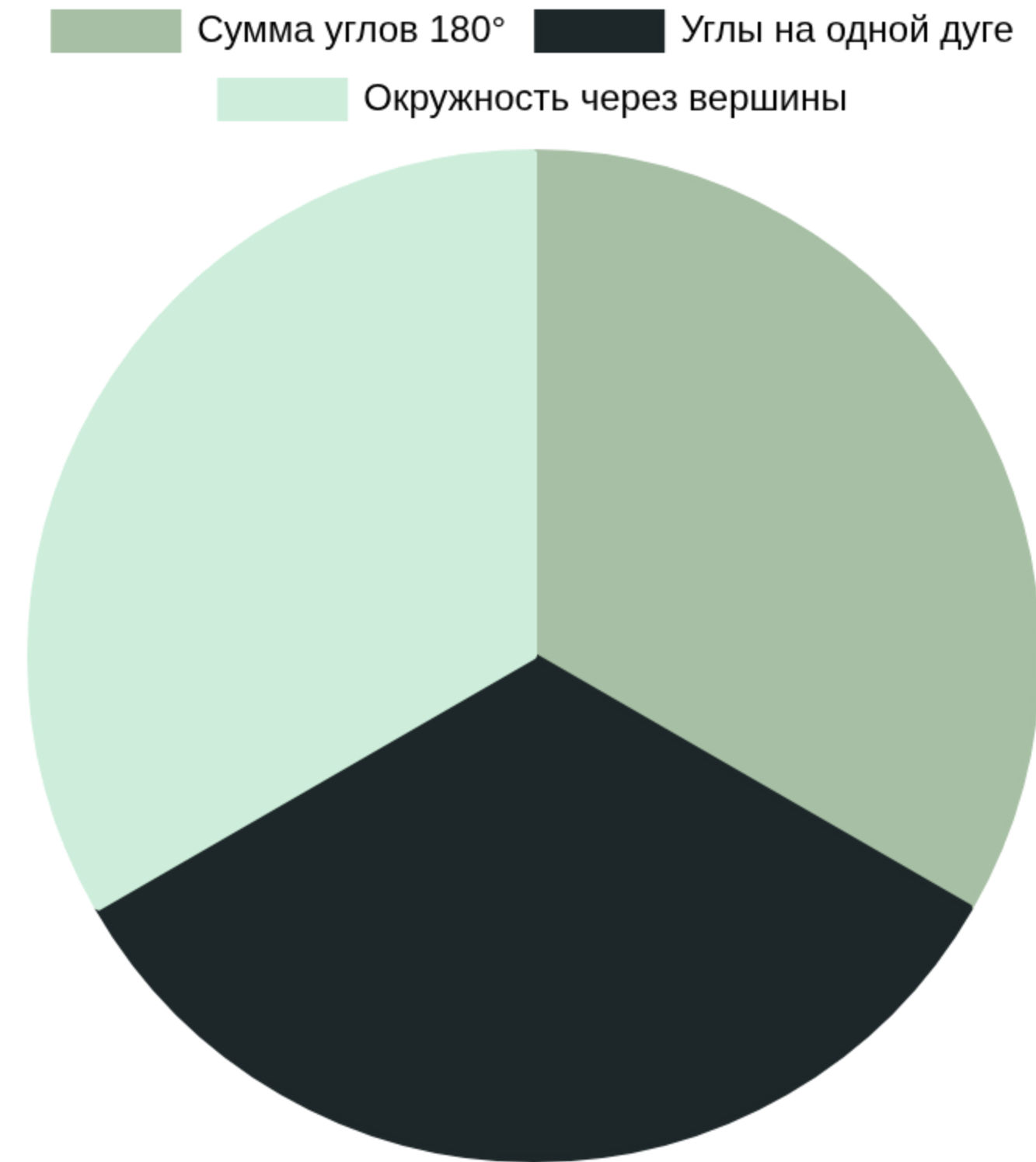
Проверка по углам и вспомогательным свойствам окружности



Главные свойства вписанного четырёхугольника

Каждое свойство по-своему помогает: одно проверяет фигуру, другое связывает углы, третье объясняет само название. Вместе они упрощают решение задач.

Если одно свойство уже известно, остальные часто помогают сделать короткое и точное доказательство.



Свойства вписанного четырёхугольника, школьная геометрия

Особые случаи вписанных четырёхугольников

01 Прямоугольник

Любой прямоугольник является вписанным четырёхугольником, потому что все его углы равны 90° . Значит, противоположные углы всегда дают 180° .

02 Квадрат

Квадрат тоже вписан, так как он одновременно является прямоугольником. Его углы прямые, а все вершины можно расположить на одной окружности.

03 Равнобедренная трапеция

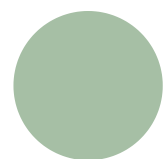
Равнобедренная трапеция часто оказывается вписанной: углы при каждом основании равны, а противоположные углы в сумме составляют 180° .

04 Ромб

Ромб вписан только в особом случае, когда он становится квадратом. Тогда все его углы прямые, и условие вписанности выполняется.



Что такое описанный четырёхугольник



Окружность внутри

Описанным называют четырёхугольник, вокруг которого можно провести окружность так, чтобы она касалась всех четырёх сторон изнутри.



Равенство сторон

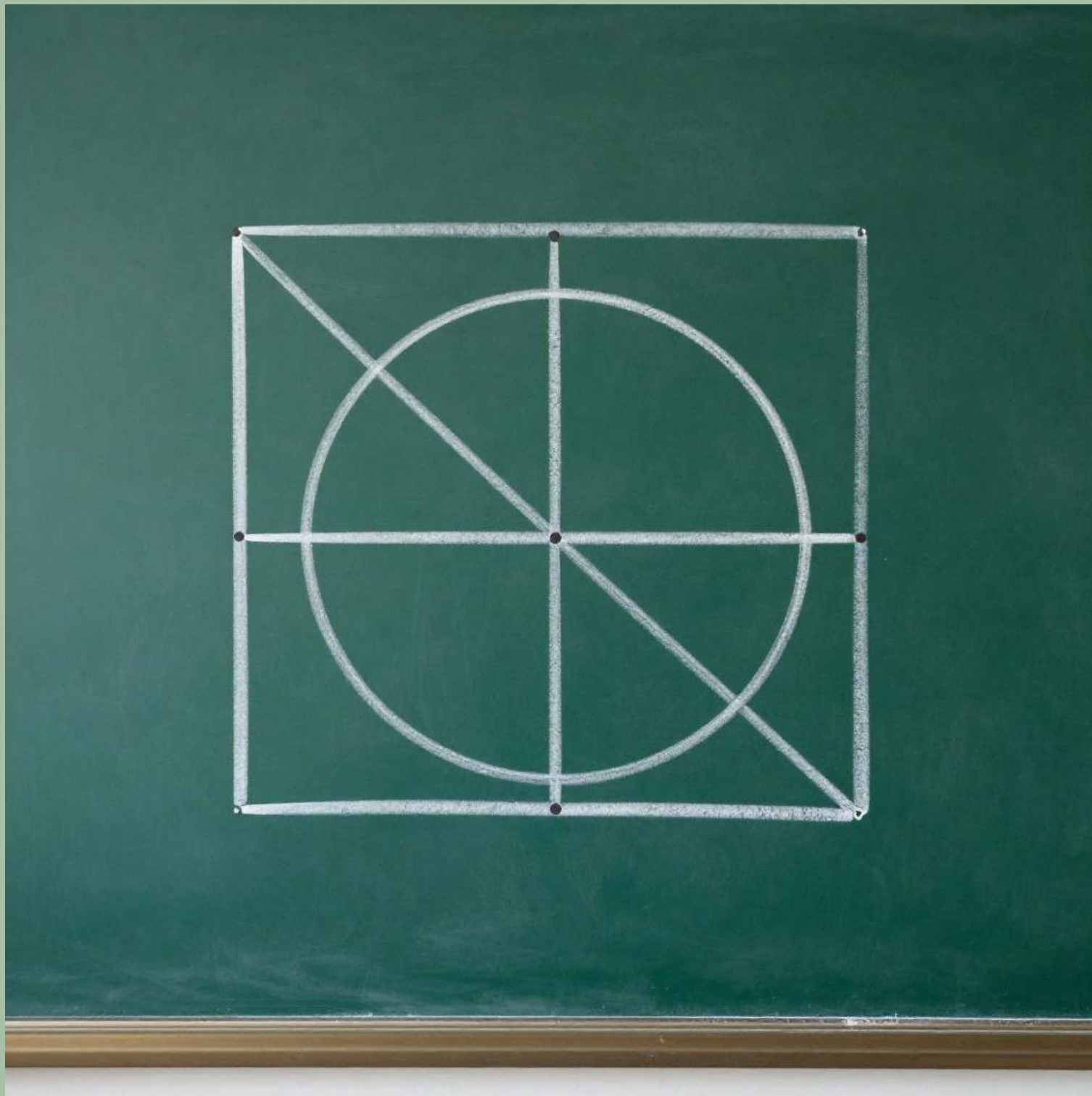
Главный признак такой фигуры — равенство сумм противоположных сторон. Это самый удобный способ проверить описанность в школьной задаче.



Центр окружности

Точка, где пересекаются биссектрисы углов, является центром вписанной окружности. От неё до всех сторон расстояния одинаковы.

Описанный четырёхугольник на рисунке



Касание сторон

На рисунке окружность касается каждой стороны четырёхугольника в одной точке. Именно поэтому фигуру называют описанной около окружности.

Радиусы к точкам касания

Радиусы, проведённые к точкам касания, перпендикулярны сторонам. Это помогает увидеть, почему окружность «подходит» к фигуре одинаково со всех сторон.

Полезные примеры

Чаще всего в качестве примеров рассматривают квадрат, ромб и дельтоид. Для равнобедренной трапеции такое свойство выполняется только при специальных соотношениях сторон.

Признаки описанного четырёхугольника

Признак	Что означает
Суммы сторон	Равны
Биссектрисы	Сходятся в точке
Расстояния от центра	Одинаковы

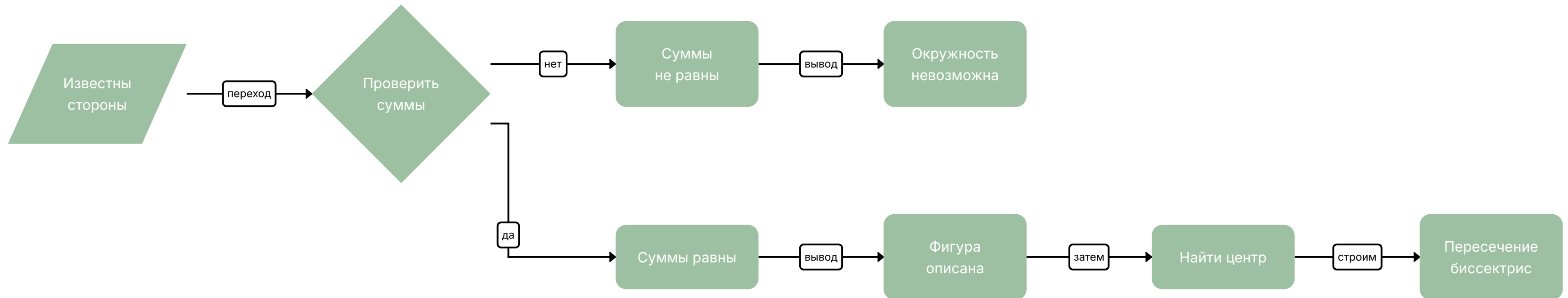
Таблица показывает три удобных признака, по которым можно установить, что около четырёхугольника описана окружность.

Для проверки чаще всего достаточно равенства сумм противоположных сторон; остальные признаки помогают найти центр и построить окружность.

Свойства описанного четырёхугольника из школьной геометрии

Как проверить, что четырёхугольник описан около окружности

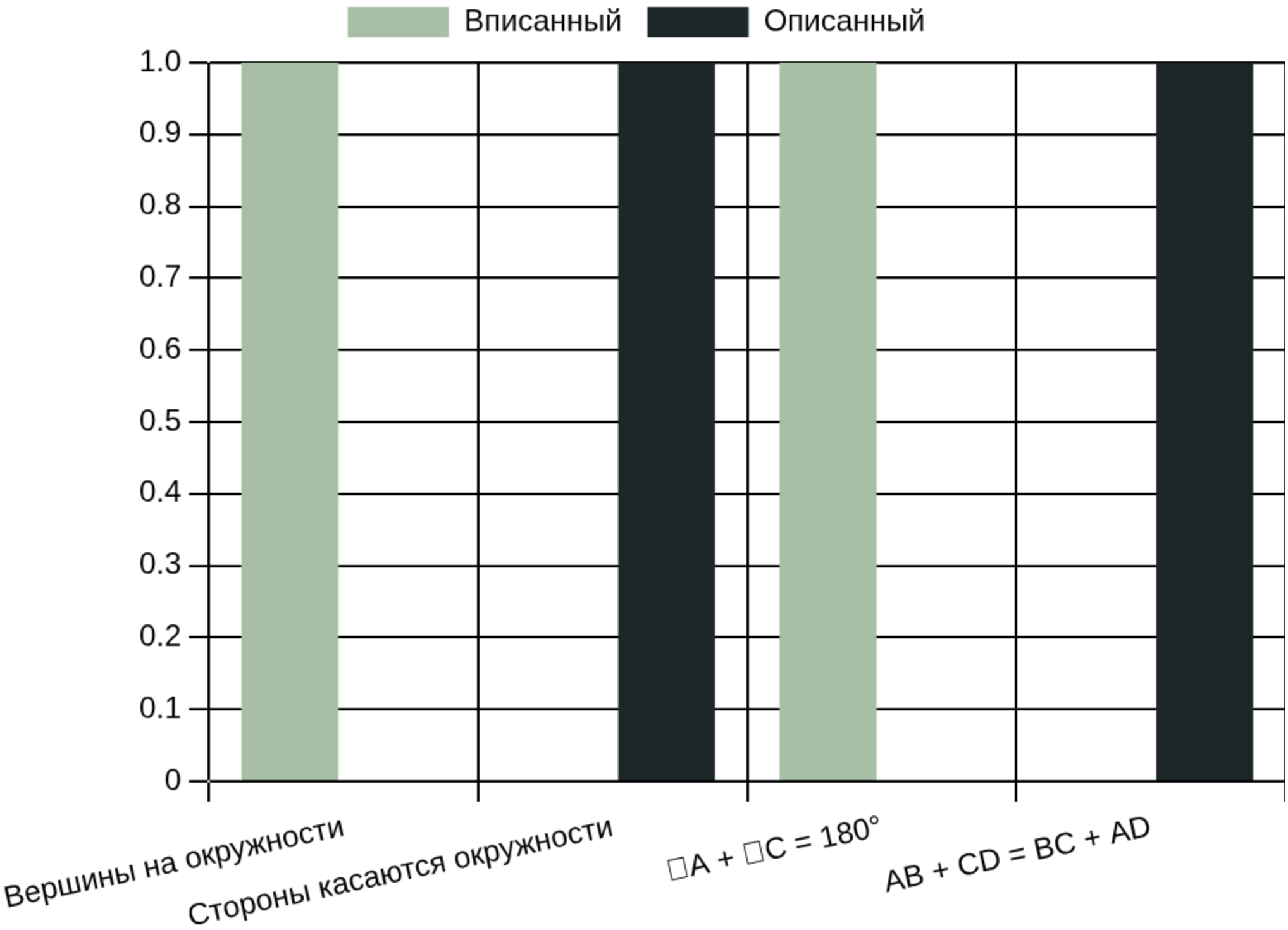
Проверка по длинам сторон и свойствам биссектрис



Сравнение вписанного и описанного четырёхугольников

У одного типа фигур проверяют углы, у другого — стороны. Это помогает быстро понять, какое свойство применять в задаче.

Вписанный четырёхугольник связан с вершинами и углами, описанный — со сторонами и касаниями; признаки не совпадают, но оба удобны для доказательств.



Сравнительные признаки вписанного и описанного четырёхугольников

Углы, диагонали и биссектрисы

■ Вписанный четырёхугольник

У него важнее всего углы, которые опираются на одну и ту же дугу. Диагонали могут быть любыми, поэтому по ним нельзя сразу судить о вписанности фигуры.

■ Описанный четырёхугольник

Здесь главным ориентиром становятся биссектрисы углов. Если они пересекаются в одной точке, эта точка — центр вписанной окружности, а расстояния до сторон равны.

■ Что помогает в задачах

В решениях часто соединяют несколько свойств сразу: проводят диагонали, ищут равные углы и используют биссектрисы. Такой подход позволяет находить неизвестные элементы быстрее и аккуратнее.

Вычисление площадей в задачах

01 Вписанный четырёхугольник

Если известны все стороны вписанного четырёхугольника, в старших классах применяют формулу Брахмагупты. Она особенно полезна, когда нужно найти площадь без дополнительных построений.

02 Описанный четырёхугольник

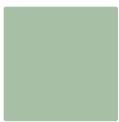
Для описанного четырёхугольника площадь удобно искать через разбиение на треугольники или через радиус вписанной окружности. Это упрощает вычисления, когда известны стороны и высоты.

03 Обычные школьные формулы

Во многих задачах подходят и более привычные способы: через диагонали, основание и высоту, а также через сторону и угол, если данные подобраны удачно.

04 Выбор способа

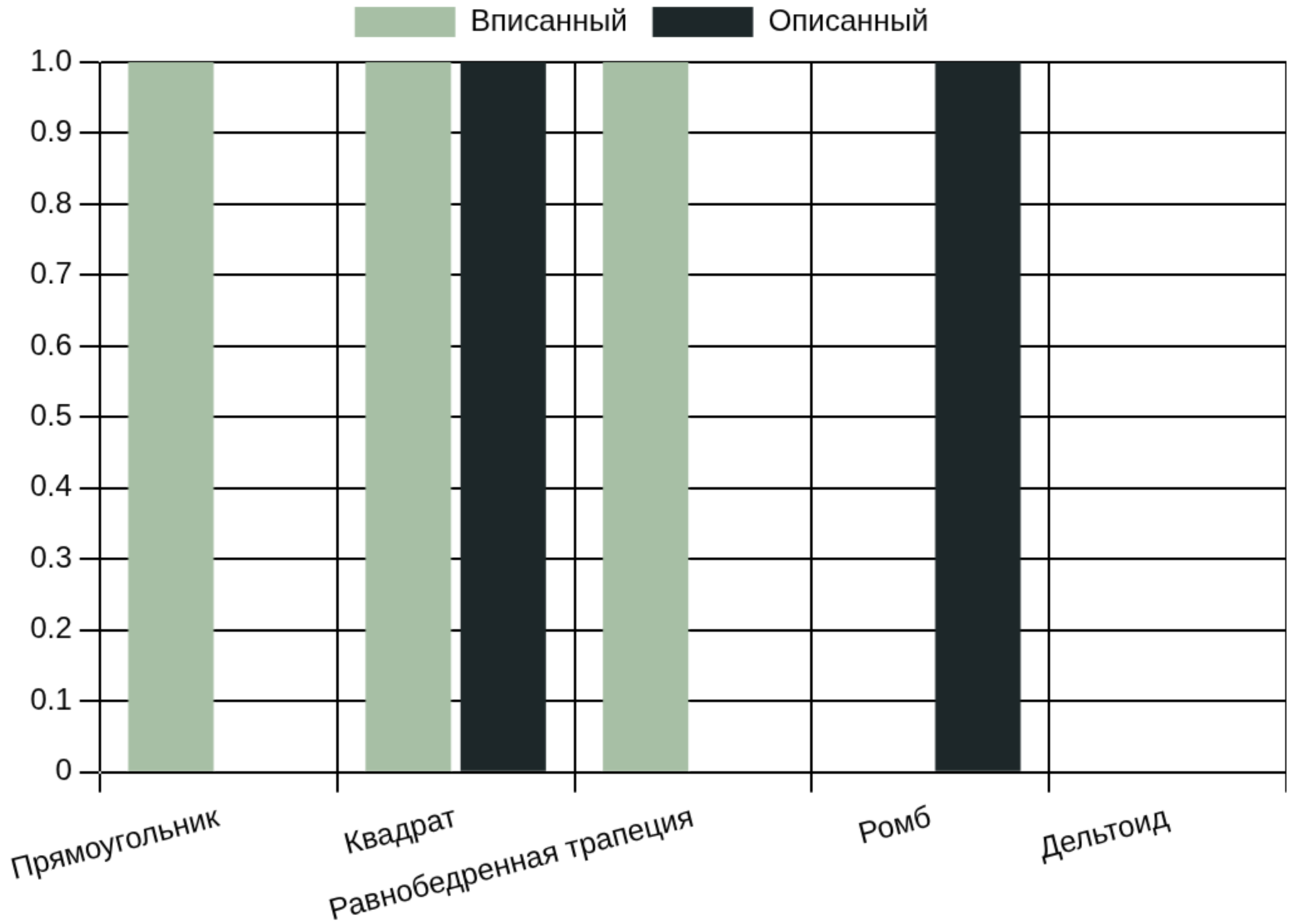
Сначала определяют, какие величины даны в условии, а затем выбирают формулу, которая использует именно их. Это экономит время и снижает риск ошибки.



Часто встречающиеся четырёхугольники и их свойства

Некоторые фигуры легко запомнить по особым случаям: квадрат объединяет сразу два свойства, а для других фигур нужно проверять признаки отдельно.

Наиболее надёжные примеры — прямоугольник для вписанности и ромб для описанности; квадрат выделяется тем, что подходит сразу под оба признака.



Типовые свойства основных четырёхугольников в школьной геометрии

2

главные проверки
спасают от путаницы
между вписанным
и описанным
четырёхугольником.

Сначала смотрят на углы
или стороны, а не на внешний вид
фигуры. Это помогает
не перепутать признаки и выбрать
верный путь решения.

Где встречаются такие фигуры в жизни



Архитектура и окна

Прямоугольные и квадратные формы часто встречаются в окнах, дверных проёмах и рамах. В таких объектах легко заметить симметрию, а иногда и связи с окружностью в декоративных элементах.

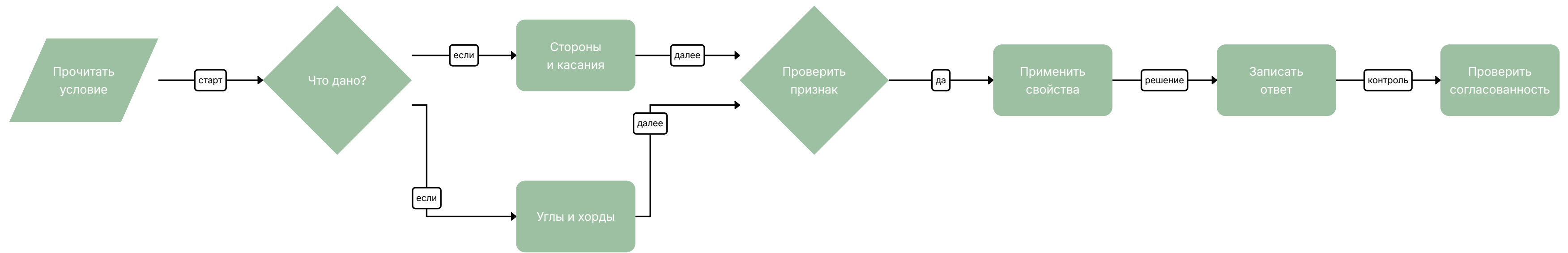


Орнаменты и детали

В узорах, плитке и логотипах нередко используют симметричные четырёхугольники. Они делают рисунок строгим и уравновешенным, а геометрические свойства помогают точно выстраивать композицию.

Алгоритм решения задач на вписанные и описанные четырёхугольники

Последовательность действий при работе с углами, сторонами и окружностью



Главное, что нужно запомнить

Вписанный четырёхугольник узнают по вершинам на окружности и сумме противоположных углов, а описанный — по касающейся окружности и равенству противоположных сторон.