

Площадь правильного многоугольника, его сторона и радиус вписанной окружности



Формулы площади через периметр
и радиус окружности

Правильные многоугольники вокруг нас



Плитка, соты, орнаменты и знаки часто имеют правильную форму. У таких фигур равны стороны и углы, поэтому они легко разбиваются на одинаковые части, а вычисления становятся наглядными и удобными.



Что называется правильным многоугольником

Одинаковые стороны

Правильным называют многоугольник, у которого все стороны имеют одну и ту же длину. Это делает фигуру симметричной и упрощает её измерение и построение.

Одинаковые углы

У правильного многоугольника все внутренние углы равны. Благодаря этому его можно рассматривать как фигуру с повторяющимися, полностью равными частями.

Число сторон

Количество сторон обозначают буквой n . Так удобно записывать общие формулы, которые подходят и для треугольника, и для квадрата, и для любого другого правильного многоугольника.

Центр фигуры

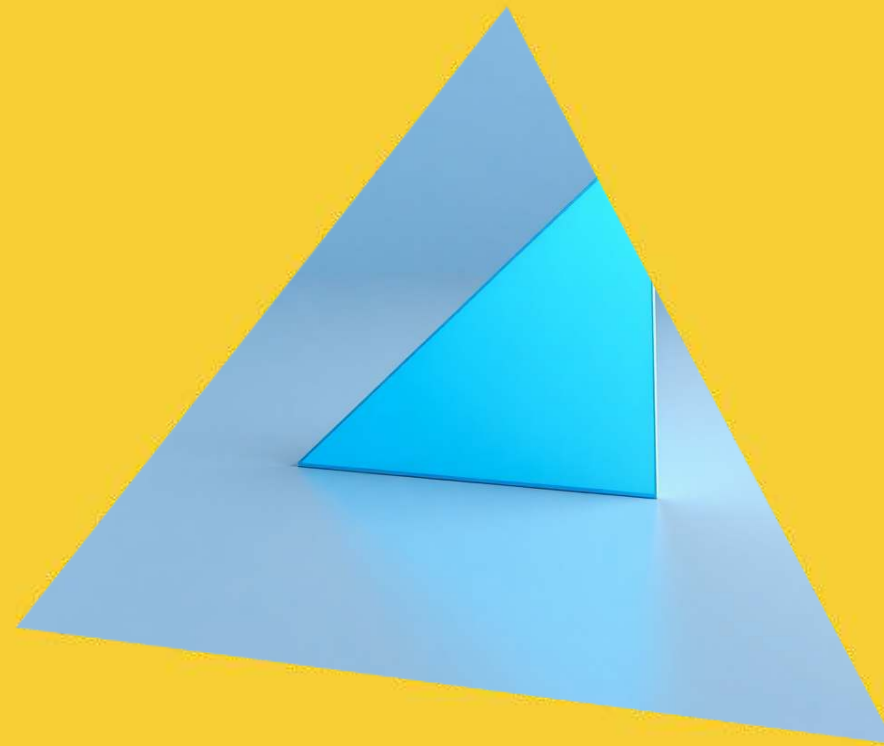
У правильного многоугольника есть центр, который одинаково удалён от вершин и сторон. Именно это свойство лежит в основе формул для площади, стороны и радиуса вписанной окружности.

Как правильный многоугольник делится на равные части



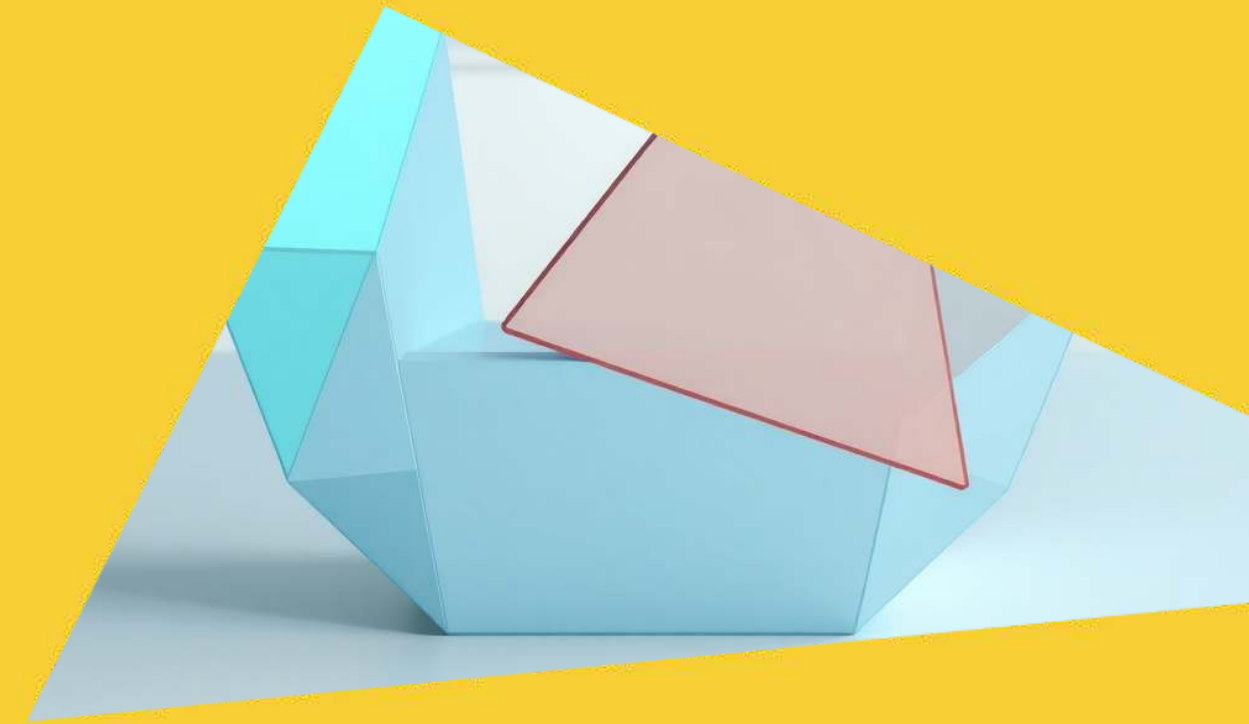
Лучи из центра

Если соединить центр правильного многоугольника со всеми его вершинами, фигура распадётся на несколько одинаковых треугольников. Их ровно столько, сколько сторон у многоугольника. Это главное наблюдение, на котором строятся дальнейшие формулы.



Основание и высота

В каждом таком треугольнике основание совпадает со стороной многоугольника, а высота — с расстоянием от центра до стороны. Именно поэтому эта высота связана с радиусом вписанной окружности и помогает найти площадь всей фигуры.



Почему формула работает

Площадь одного треугольника выражается как половина произведения основания на высоту. Если сложить площади всех одинаковых треугольников, получится площадь всего правильного многоугольника — без лишних построений и сложных приёмов.

Обозначения в формулах

Величина	Обозн.	Смысл	Единицы
Число сторон	n	Сколько сторон у фигуры	—
Сторона	a	Длина одной стороны	см, м
Периметр	P	Сумма всех сторон	см, м
Радиус впис. окружности	r	Расстояние до стороны	см, м
Площадь	S	Размер фигуры	см ² , м ²

В таблице собраны основные величины, которые нужны для решения задач на правильные многоугольники.

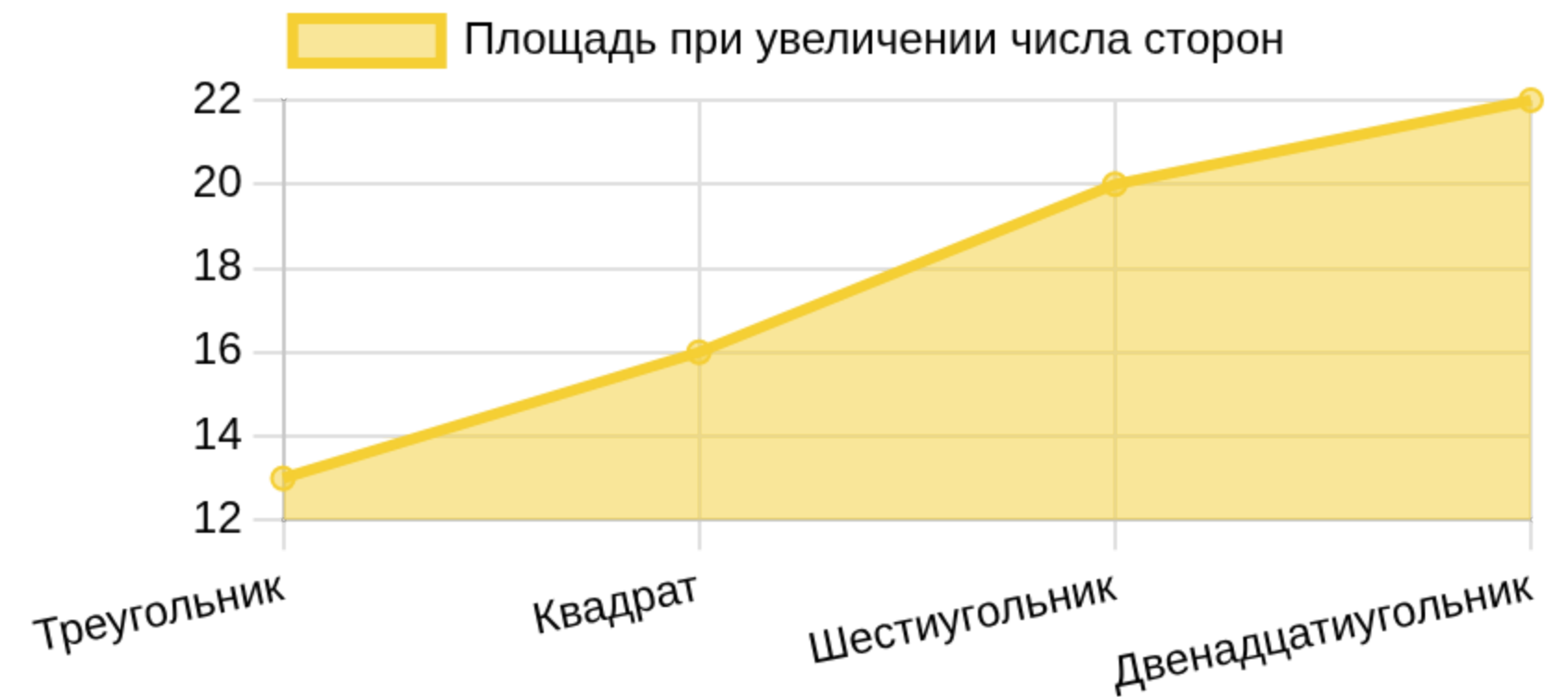
Периметр и сторона измеряются в линейных единицах, а площадь — в квадратных. Все формулы опираются на симметрию и равенство частей.

Школьная геометрия: определения и обозначения

Как меняется площадь при увеличении числа сторон

При одинаковом радиусе вписанной окружности площадь растёт не только из-за числа сторон, но и из-за лучшего приближения к кругу.

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем ближе его форма к кругу и тем больше площадь при том же радиусе.



Сравнение правильных многоугольников по геометрической модели при одинаковом r

Главная формула площади через периметр и радиус

1

Площадь через периметр

Для любого правильного многоугольника площадь можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$. Здесь P — периметр, а r — радиус вписанной окружности.

2

Почему появляется половина

Правильный многоугольник разбивается на одинаковые треугольники. Их площади складываются, и каждый раз возникает половина произведения основания на высоту, поэтому в формуле появляется множитель $\frac{1}{2}$.

3

Запись через сторону

Если периметр выразить через сторону, получаем $S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot r$. Эта запись удобна, когда известны число сторон и длина одной стороны.

Формула площади через сторону и число сторон

1

Площадь одной части

Каждый из n одинаковых треугольников имеет площадь $\frac{1}{2} \cdot a \cdot r$. Поэтому общая площадь многоугольника равна сумме всех одинаковых частей.

2

Сложение одинаковых треугольников

Когда одинаковых треугольников n , достаточно умножить площадь одного на их количество. Так появляется формула $S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot r$ без дополнительных преобразований.

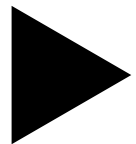
3

Где полезна формула

Она особенно удобна в задачах, где известны сторона многоугольника и расстояние от центра до стороны. Тогда площадь находится быстро и без построения дополнительных отрезков.

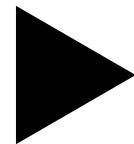
Как найти сторону правильного многоугольника

1. Записать данные



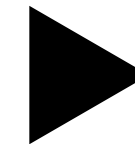
Сначала отмечают известные величины: площадь S , число сторон n и радиус вписанной окружности r . Без этого легко перепутать, что дано в задаче.

2. Выразить сторону



Из формулы $S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot r$ получают $a = 2S / (n \cdot r)$. Теперь сторона выражена через уже известные величины.

3. Проверить ответ



После вычислений нужно убедиться, что единицы подходят: площадь задают в квадратных единицах, а радиус — в линейных. Тогда ответ будет корректным.

2S

**В числителе помогает быстро
выразить радиус через площадь,
число сторон и сторону**

Формула $r = 2S / (n \cdot a)$ показывает, что радиус можно найти, если известны площадь, число сторон и длина стороны.

Порядок решения задач на площадь, сторону и радиус

Алгоритм выбора формулы по известным данным и последовательности вычислений.

Апофема и радиус вписанной окружности

Что такое апофема

Апофема — это отрезок, проведённый из центра правильного многоугольника к середине его стороны. Он показывает кратчайшее расстояние от центра до стороны и помогает строить формулы площади.

Почему она равна радиусу

В правильном многоугольнике апофема совпадает с радиусом вписанной окружности. Оба отрезка идут от центра к стороне, перпендикулярны ей и имеют одинаковую длину во всей фигуре.

Зачем это нужно

Если известна апофема, можно сразу использовать формулу площади через периметр или сторону. Поэтому на чертежах важно отмечать центр, середину стороны и прямой угол между ними.



Формулы для частных случаев правильных многоугольников

Фигура	Площадь	Особенность
Равносторонний треугольник	$S = a^2 \sqrt{3}/4$	Все стороны и углы равны
Квадрат	$S = a^2$	Самый простой случай
Правильный шестиугольник	6 равных треугольников	Удобно разбивается на части

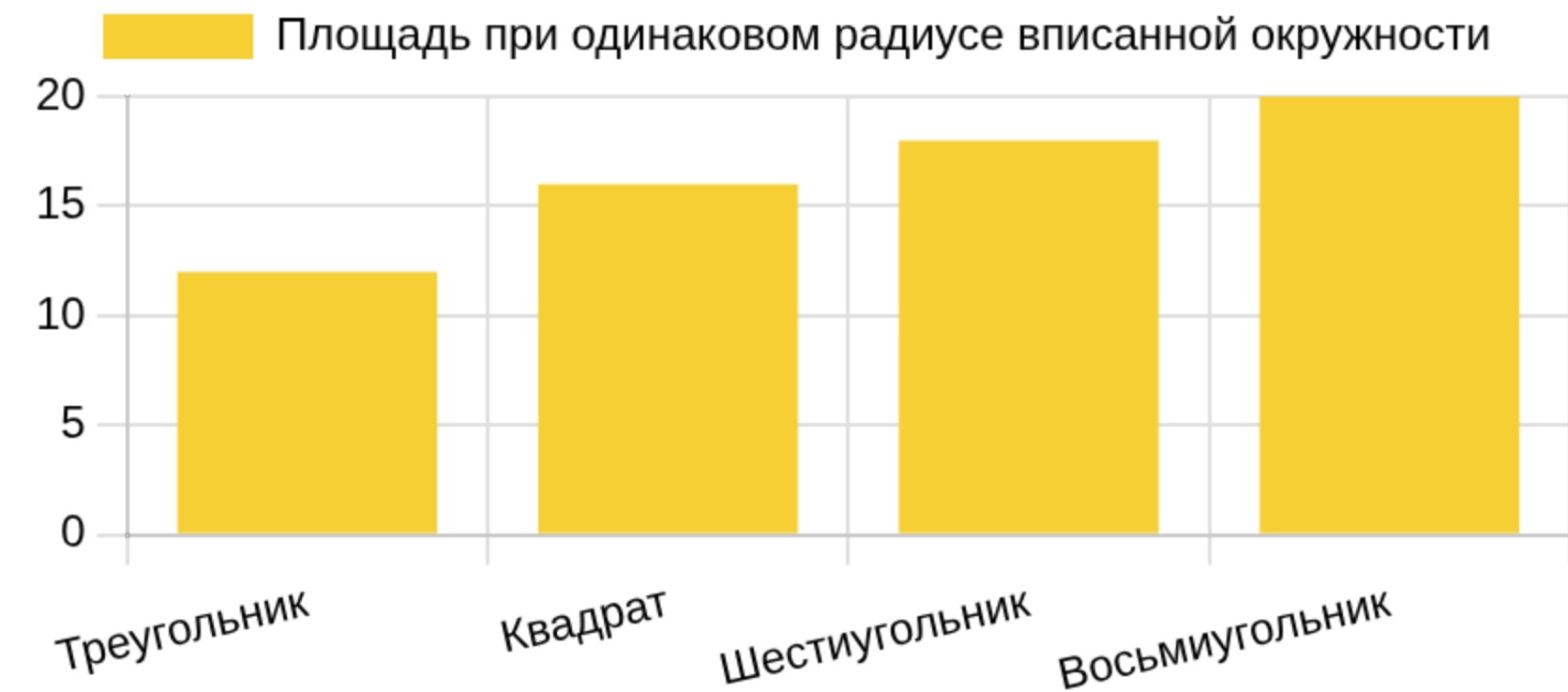
Сравнение трёх частных случаев помогает увидеть общую формулу и особенности каждой фигуры.

У всех трёх фигур площадь выражается через сторону, но запись зависит от числа сторон и способа разбиения на равные части.

Сравнение площадей фигур с одинаковым радиусом вписанной окружности

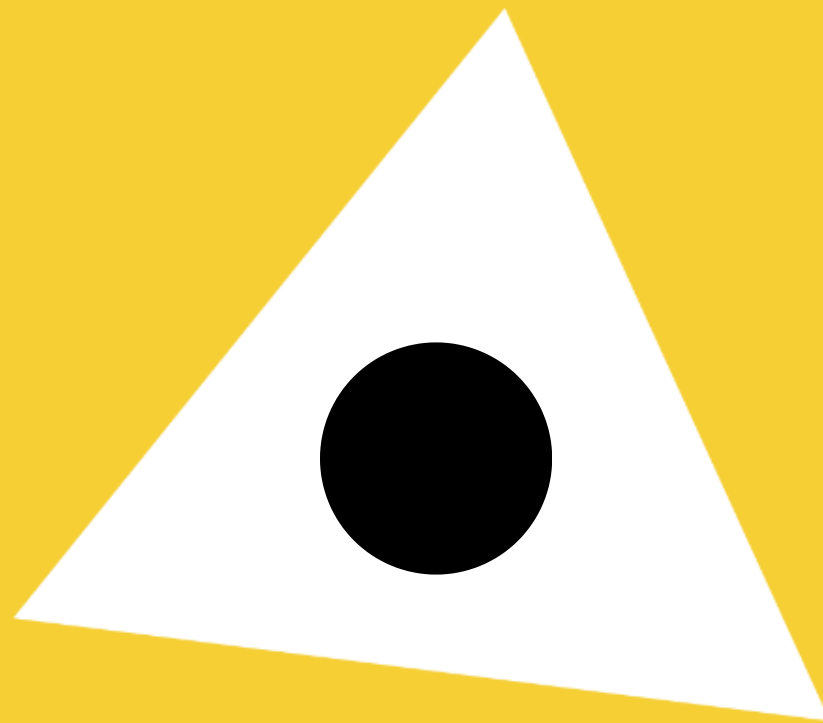
Здесь показано только сравнение, а не точные вычисления для конкретного радиуса. Главное — увидеть общий рост площади при увеличении числа сторон.

При одинаковом расстоянии от центра до стороны более многогранная фигура занимает больше площади и постепенно приближается к кругу.



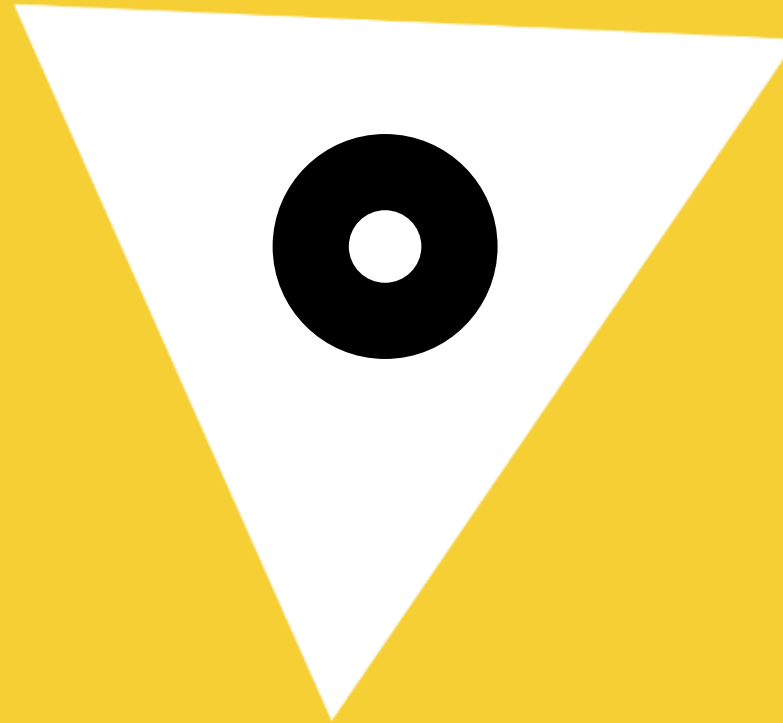
Иллюстративные значения для наглядного сравнения при одинаковом r

Связь правильного многоугольника с окружностью



Описанная окружность

Все вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности. Поэтому его форма полностью задаётся центром и радиусом, а вершины располагаются на одинаковом расстоянии от центра.



Вписанная окружность

Каждая сторона правильного многоугольника касается вписанной окружности. Это означает, что расстояние от центра до любой стороны одинаково, а апофема совпадает с радиусом этой окружности.



Симметрия фигуры

Центр правильного многоугольника одновременно связан и с вершинами, и со сторонами. Такая симметрия упрощает вычисления: достаточно знать несколько элементов, чтобы найти остальные.

Типичные ошибки в задачах

1

Путают радиусы

Часто смешивают радиус вписанной и радиус описанной окружности. Из-за этого в формулу подставляют не ту величину и получают неверную площадь или сторону.

2

Считают стороны неверно

Иногда забывают, сколько сторон у фигуры, и неверно находят периметр. Для правильного многоугольника важно умножать длину одной стороны на точное число сторон.

3

Путают единицы

Ещё одна ошибка — смешение сантиметров и квадратных сантиметров. Длина стороны и радиуса измеряется в линейных единицах, а площадь всегда выражается в квадратных.

4

Подставляют не тот отрезок

Апофему иногда заменяют стороной, хотя эти отрезки не совпадают в большинстве фигур. Перед вычислением нужно внимательно смотреть на чертёж и обозначения.

Как выбрать формулу по известным данным

Выбор формулы зависит от того, какие величины даны и что требуется найти.

Примеры правильных многоугольников в жизни

1

Соты

Шестиугольники особенно заметны в сотах: такая форма удобно заполняет плоскость без пустот. Благодаря этому материал расходуется экономно, а ячейки получаются одинаковыми и прочными.

2

Плитка и мозаика

Квадратная плитка и многие виды мозаики основаны на равных сторонах и углах. Повторяющиеся элементы легко соединяются, создавая ровные поверхности и аккуратные узоры.

3

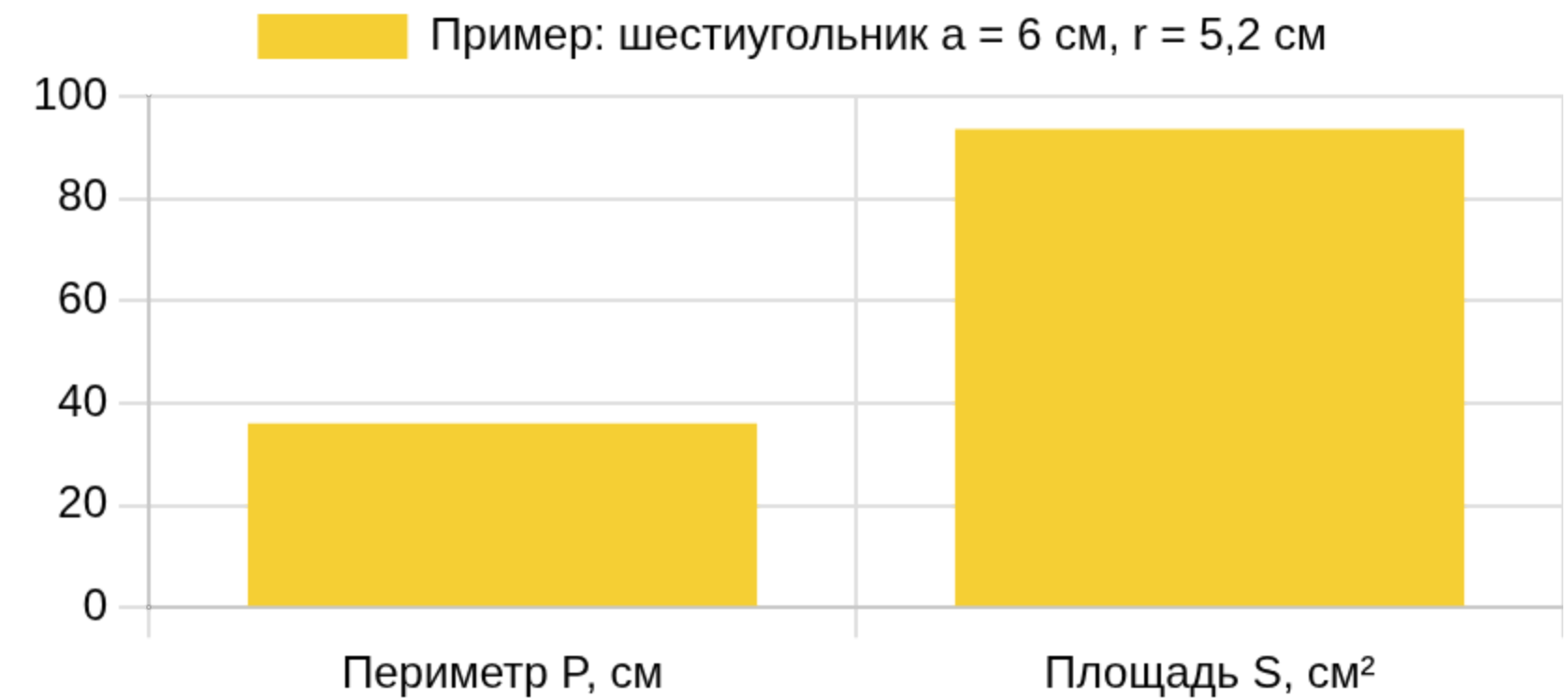
Орнаменты и чертежи

Правильные многоугольники часто используют в орнаментах, схемах и технических рисунках. Их симметрия делает изображение понятным, а размеры — удобными для точных измерений.

Пример вычисления по готовым данным

Сначала по стороне находят периметр, затем подставляют его в формулу площади. Такой порядок помогает не запутаться и видеть связь между всеми величинами.

Даже при небольшом наборе данных можно последовательно найти все нужные характеристики фигуры, если правильно выбрать формулу и выполнить проверку единиц.



Учебный пример по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$

Что важно запомнить

Правильный многоугольник удобно считать через периметр, сторону и радиус вписанной окружности. Разбиение на равные треугольники объясняет формулы и помогает быстро находить неизвестные величины без лишних действий.