

Число вариантов: как считать возможные исходы в алгебре

Научимся быстро считать комбинации в задачах разного типа.





Где встречается подсчёт вариантов

Подсчёт вариантов нужен не только в алгебре, но и в кодах, расписаниях, играх и выборе предметов. Он помогает сравнивать ситуации и быстро находить число исходов без полного перебора всех возможностей.

Главные условия задачи: порядок, повторения, количество шагов

Порядок важен

Если расположение элементов имеет значение, то перестановки 12 и 21 считаются разными вариантами. Такая ситуация встречается в кодах, очередях, маршрутах и расстановках, где последовательность меняет результат.

Повторения разрешены

Если один и тот же элемент можно использовать несколько раз, число вариантов заметно увеличивается. Это особенно видно в кодах, паролях и числах, где одна цифра может повторяться в разных позициях.

Порядок не важен

Когда важно только, какие объекты выбраны, а не как они расположены, разные записи могут означать один и тот же выбор. Тогда считают без учёта порядка, как в задачах на команды и группы.

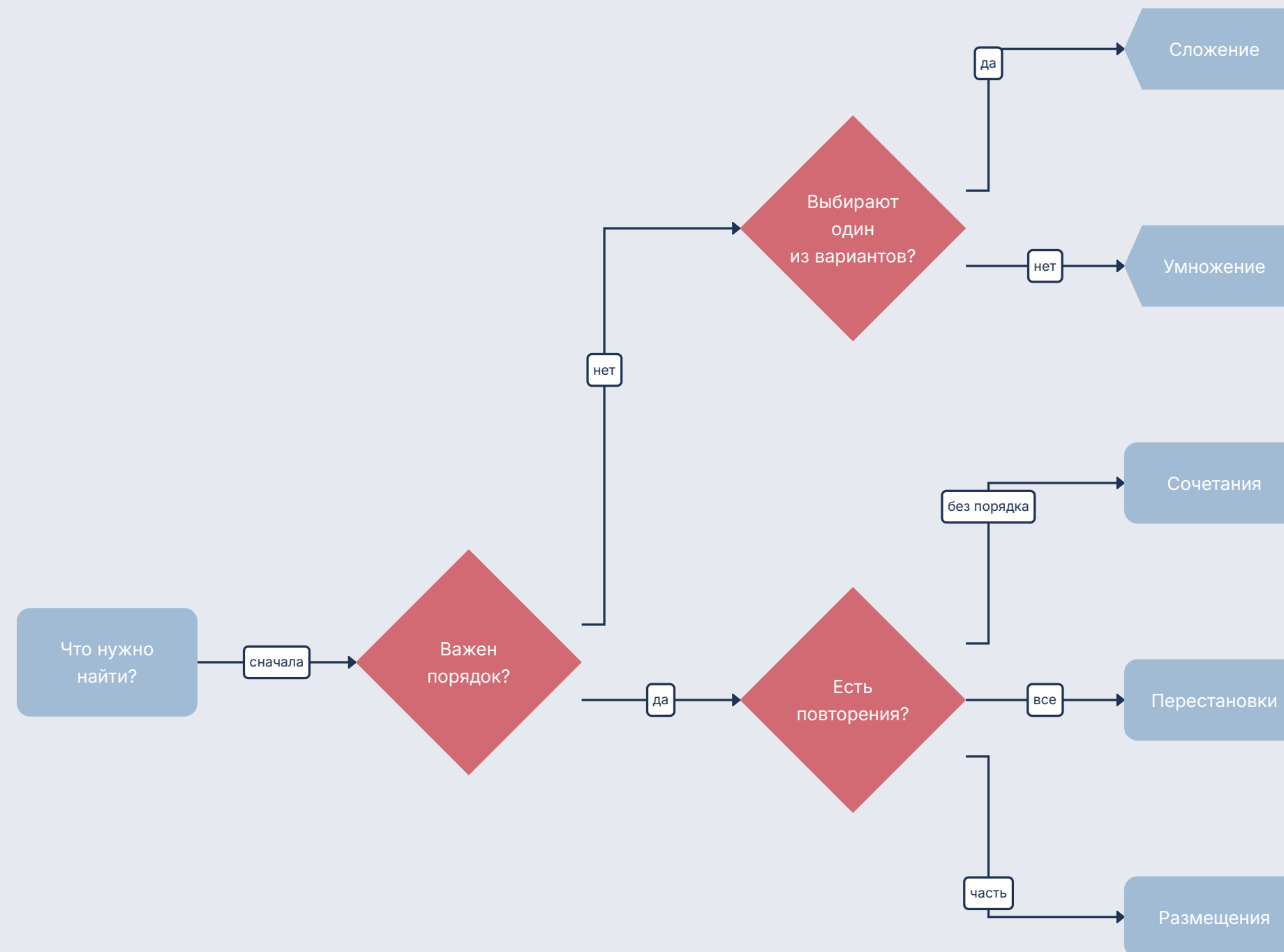
Сколько шагов выбора

Иногда нужно выбрать все объекты, а иногда только часть. От этого зависит, применять ли простое умножение, перестановки, размещения или сочетания. Сначала всегда определяют структуру самой задачи.



Как выбрать способ подсчёта

Схема показывает, как по условиям задачи перейти к нужному правилу счёта.



Правило сложения: выбирается один из нескольких вариантов

01 Только один выбор

Сложение используют тогда, когда нужно выбрать один вариант из нескольких несовместимых. Если выбранный путь исключает остальные, число способов получают суммированием.

02 Простой пример

В столовой можно взять суп или салат, но не оба блюда сразу. Если есть 3 вида супа и 2 вида салата, всего получится $3 + 2$ вариантов.

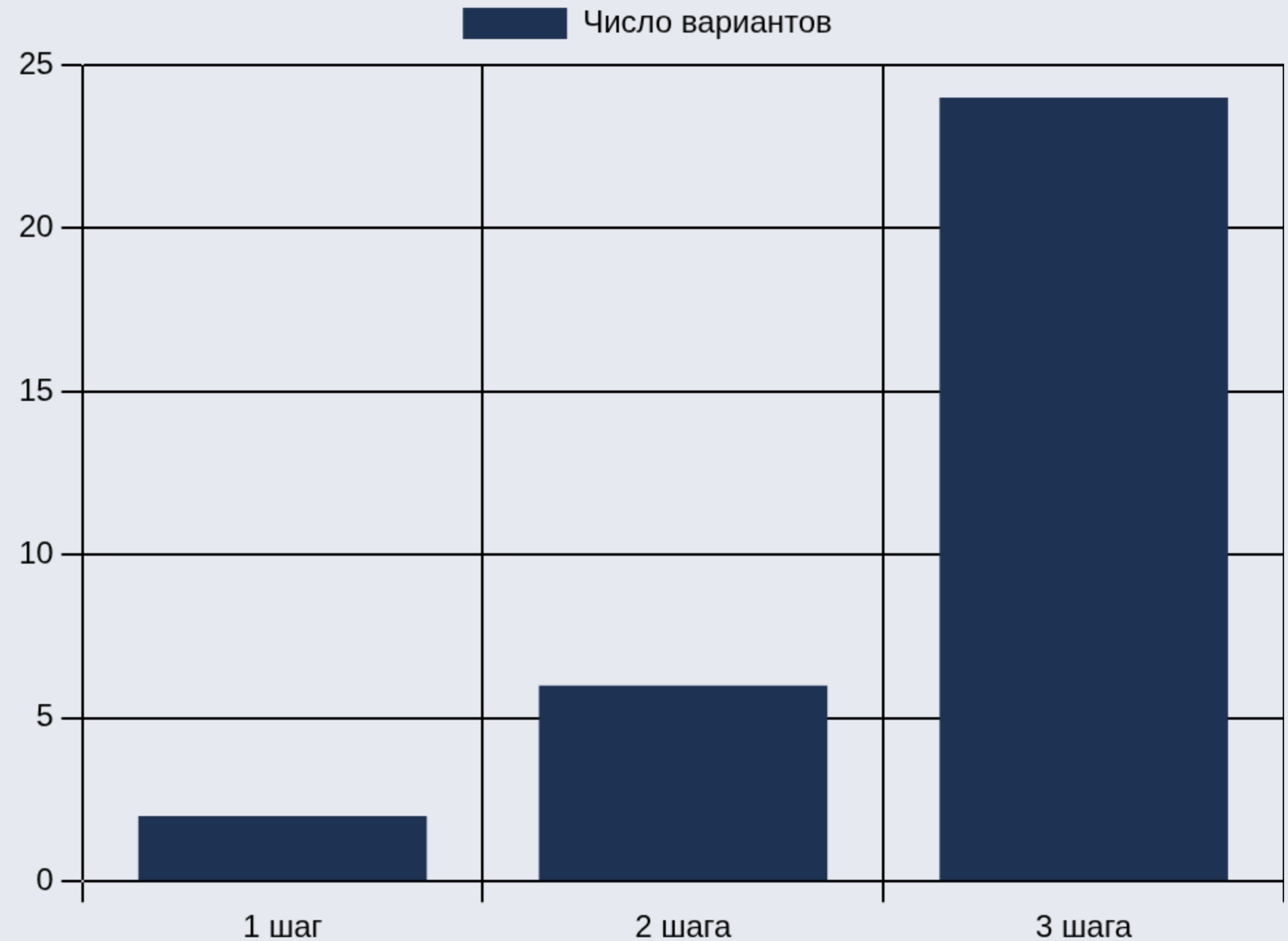
03 Когда не подходит

Если варианты выполняются вместе, правило сложения уже неверно. В таких задачах шаги не заменяют друг друга, а дополняют, поэтому нужно переходить к умножению.

Рост числа вариантов при последовательном выборе

Каждый новый шаг умножает число исходов на количество доступных выборов. Поэтому даже короткая цепочка действий быстро даёт большое число комбинаций.

Последовательный выбор приводит к резкому росту вариантов: 2, затем 6, затем 24. Это наглядно показывает силу правила умножения.



Составлено по схеме последовательного выбора из условия задачи.

Дерево вариантов: наглядный способ перечисления исходов



Выбор завтрака

Сначала ученик выбирает напиток, а потом — булочку. Каждая первая ветвь делится на несколько новых, и так получается полный список завтраков. Такое дерево удобно, когда важно не пропустить ни одного сочетания.



Маршрут до школы

Если можно идти через парк или по улице, а затем выбрать один из двух поворотов, дерево помогает увидеть все пути. На схеме сразу понятно, где выбор продолжается, а где заканчивается.



Одежда на прогулку

Куртка, шарф и обувь дают несколько уровней выбора подряд. Ветви дерева показывают, как из одного решения появляется целая цепочка вариантов, которые легко сравнить и проверить.

Сравнение способов подсчёта

Одинаково выглядящие задачи могут решаться разными правилами. Важно смотреть не на внешний вид, а на условия выбора.

Главный критерий выбора метода — условия задачи: порядок, повторения и число шагов. Именно они определяют ответ.

Ситуация	Порядок / повторения / способ / ответ
Одежда	да / нет / умножение / 6
Пароль	да / да / умножение / 10000
Команда	нет / нет / сочетания / 10
Книги	да / нет / перестановки / 6

Составлено по типовым учебным примерам.

24

способа существует
для расстановки четырёх
предметов

Факт следует из вычисления $4! = 24$.

Даже для небольшого числа объектов количество перестановок быстро становится большим. Это показывает, почему порядок в таких задачах нельзя игнорировать.

Факториал: краткая запись произведения от 1 до n



Запись факториала

Факториал числа n обозначают $n!$ и читают как произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Эта запись часто появляется в задачах на перестановки и помогает сократить длинные вычисления.



Простые примеры

Если $n = 3$, получаем $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Для $4!$ выходит 24, а для $7!$ уже 5040. Даже по этим примерам видно, как быстро растёт результат.



Связь с перестановками

Когда нужно расположить все объекты по порядку, факториал сразу даёт число способов. Чем больше предметов, тем сильнее растёт число перестановок, и это легко проверить на маленьких примерах.



Почему важно замечать рост

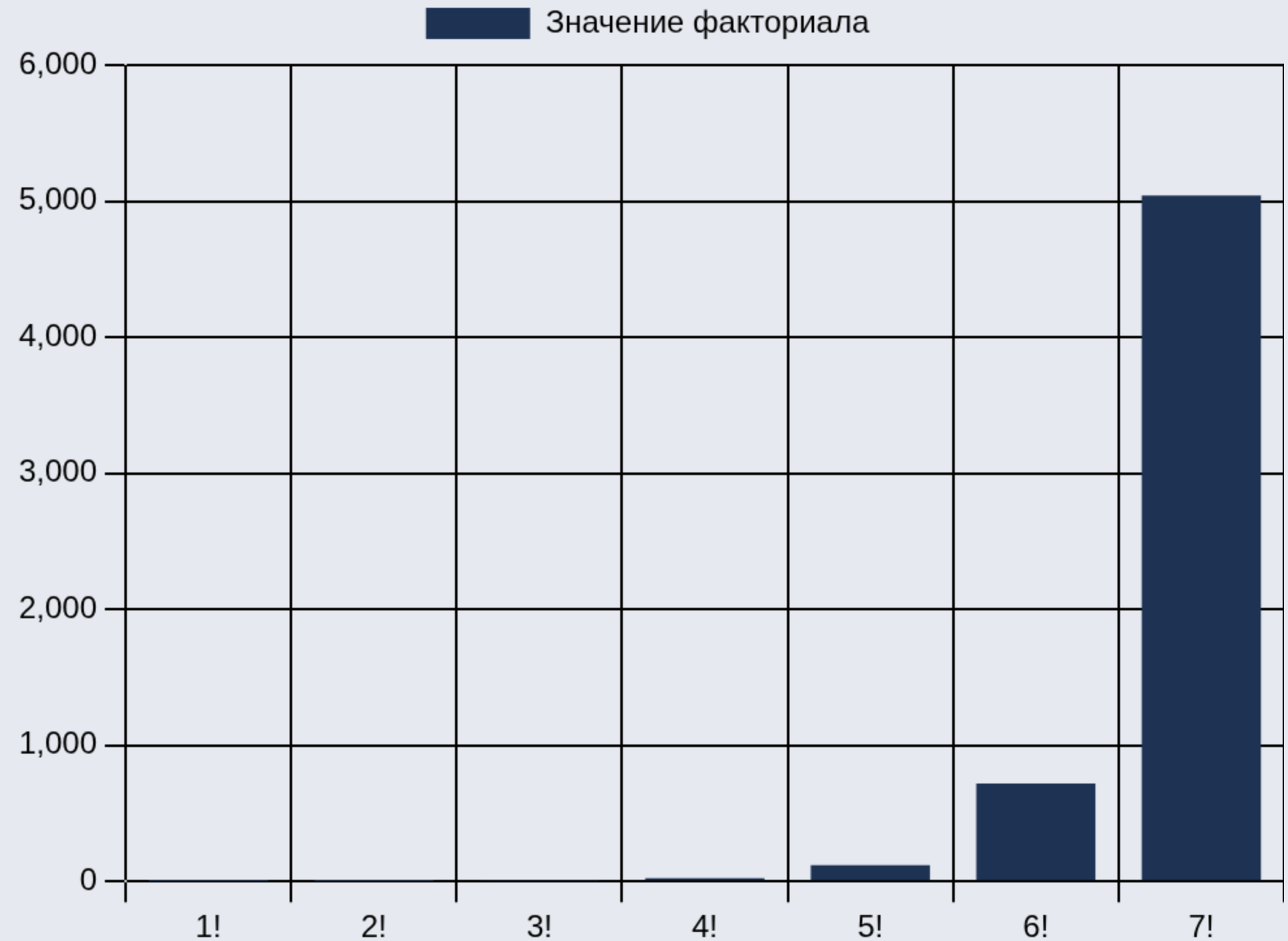
Факториалы увеличиваются намного быстрее обычных чисел, поэтому в задачах можно получить очень большой ответ даже при небольшом n . Это помогает понять, почему перебор вариантов становится неудобным.



Как быстро растут факториалы

Даже при небольшом увеличении числа объектов значения резко возрастают, поэтому полный перебор вариантов быстро становится неудобным.

Факториалы растут очень быстро: уже после 5! число вариантов увеличивается на порядки.



Математические вычисления: 1! –7!; дата не требуется.

Размещения: выбирается часть объектов, но порядок важен

1

Что выбирают

Размещения применяют, когда нужно взять только часть объектов из общего набора. Например, для призовых мест или порядкового списка важна не вся группа, а конкретные выбранные позиции.

2

Почему важен порядок

Если два человека поменялись местами, получается уже другой результат. Поэтому наборы вида А, Б и Б, А считаются разными вариантами, хотя сами объекты те же самые.

3

Как считают

Для первого места есть несколько возможностей, для второго их уже меньше. Число вариантов получают последовательным умножением, поэтому даже при небольшом наборе ответ может быть довольно большим.

Сочетания: выбирается часть объектов без учёта порядка



Выбор команды

Сочетания используют, когда нужно определить состав группы, а не распределять места. Важно только, кто вошёл в выбор, поэтому перестановка участников не создаёт нового варианта.



Счёт по составу

Такая модель удобна для задач про кружки, команды и выбор предметов. Она показывает, что порядок нужен не всегда: иногда достаточно знать только сам набор выбранных объектов.



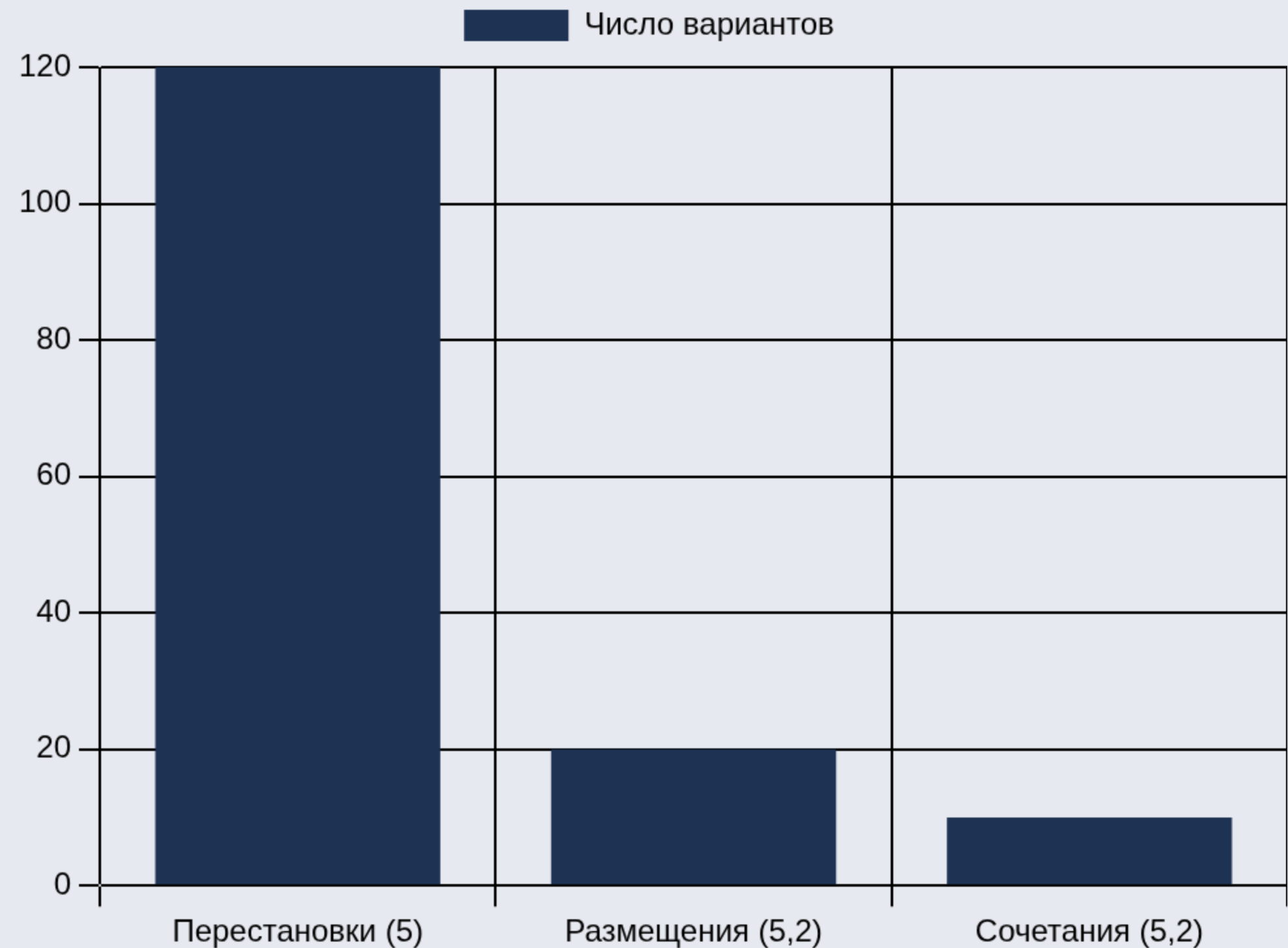
Набор без порядка

Если взять одни и те же карточки в разном порядке, результат не меняется. Для сочетаний одинаковый состав считается одним вариантом, даже если перечисление элементов различается.

Перестановки, размещения и сочетания: разные ответы в одной задаче

Одинаковые числа объектов могут давать очень разные ответы, если меняется смысл выбора и роль порядка.

При одном и том же наборе данных перестановок больше всего, потому что учитываются все позиции.



Расчёты по формулам для $n = 5$, $k = 2$; дата не требуется.

Повторения в задачах на число вариантов



Код из четырёх цифр

Если каждая из четырёх позиций кода может быть заполнена любой цифрой, то повторения разрешены. На первом, втором, третьем и четвёртом месте снова доступны все 10 цифр, поэтому получается 10 000 вариантов.

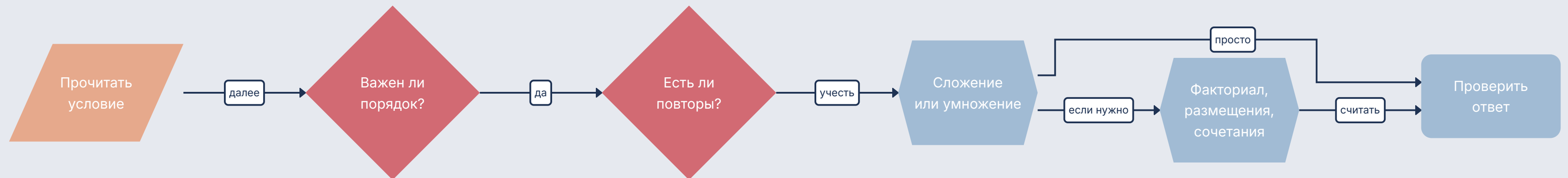


Одинаковый выбор снова и снова

Повторения часто встречаются в кодах, паролях и комбинациях замков. Один и тот же символ может появиться несколько раз, поэтому число вариантов растёт намного быстрее, чем при выборе без повторов.

Алгоритм решения задач на число вариантов

Последовательность шагов помогает выбрать правильное правило подсчёта и проверить ответ по смыслу.



Типичные ошибки при решении задач на варианты

Путают порядок

Главная ошибка — считать одинаковыми варианты, где порядок на самом деле важен. В задачах про места, коды и записи перестановка элементов часто создаёт новый результат.

Складывают вместо умножения

Если шаги выбора идут один за другим, нужно умножать, а не складывать. Например, 2 цвета и 3 формы дают 6 вариантов, потому что каждый цвет сочетается с каждой формой.

Не замечают повторы

Иногда ученик забывает, что один и тот же элемент можно использовать несколько раз. Тогда ответ получается меньше, чем должен быть, особенно в задачах про пароли и коды.

Считают дубли

При перечислении вариантов легко дважды записать один и тот же исход. Чтобы избежать этого, полезно проверить условие и убедиться, что каждый вариант посчитан только один раз.

Мини-практика: задачи и ответы

Задача	Способ	Ответ
3 футболки и 2 шорты	3×2	6
4 книги на полке	$4!$	24
2 из 4 учеников	$C(4,2)$	6

Ниже показано, как один и тот же результат может получаться разными способами подсчёта.

Одинаковые числа в ответах не означают одинаковый способ решения: важно различать правило выбора и смысл задачи.

Где используется число вариантов



Пароли и коды

Подсчёт вариантов помогает оценить число возможных паролей и кодов доступа. Это важно в информатике, потому что показывает, насколько большой может быть комбинация символов.



Маршруты и пути

При выборе дороги, хода в игре или пути между точками нужно учитывать количество возможных направлений. Такие задачи учат быстро сравнивать варианты без полного перебора.



Расписания и конкурсы

В расписаниях и конкурсах важно распределить события или участников без конфликтов. Число вариантов помогает проверить, сколько существует способов составить удобный и корректный порядок.



Игровые задачи

В играх подсчёт вариантов помогает понять, сколько ходов или комбинаций доступно игроку. Это развивает умение искать решение по структуре задачи, а не случайным перебором.

Число вариантов: считай по смыслу задачи

Чтобы найти число вариантов, сначала нужно понять, что именно выбирают, важен ли порядок и допускаются ли повторы. Тогда правило становится ясным, а ответ — точным и проверяемым.