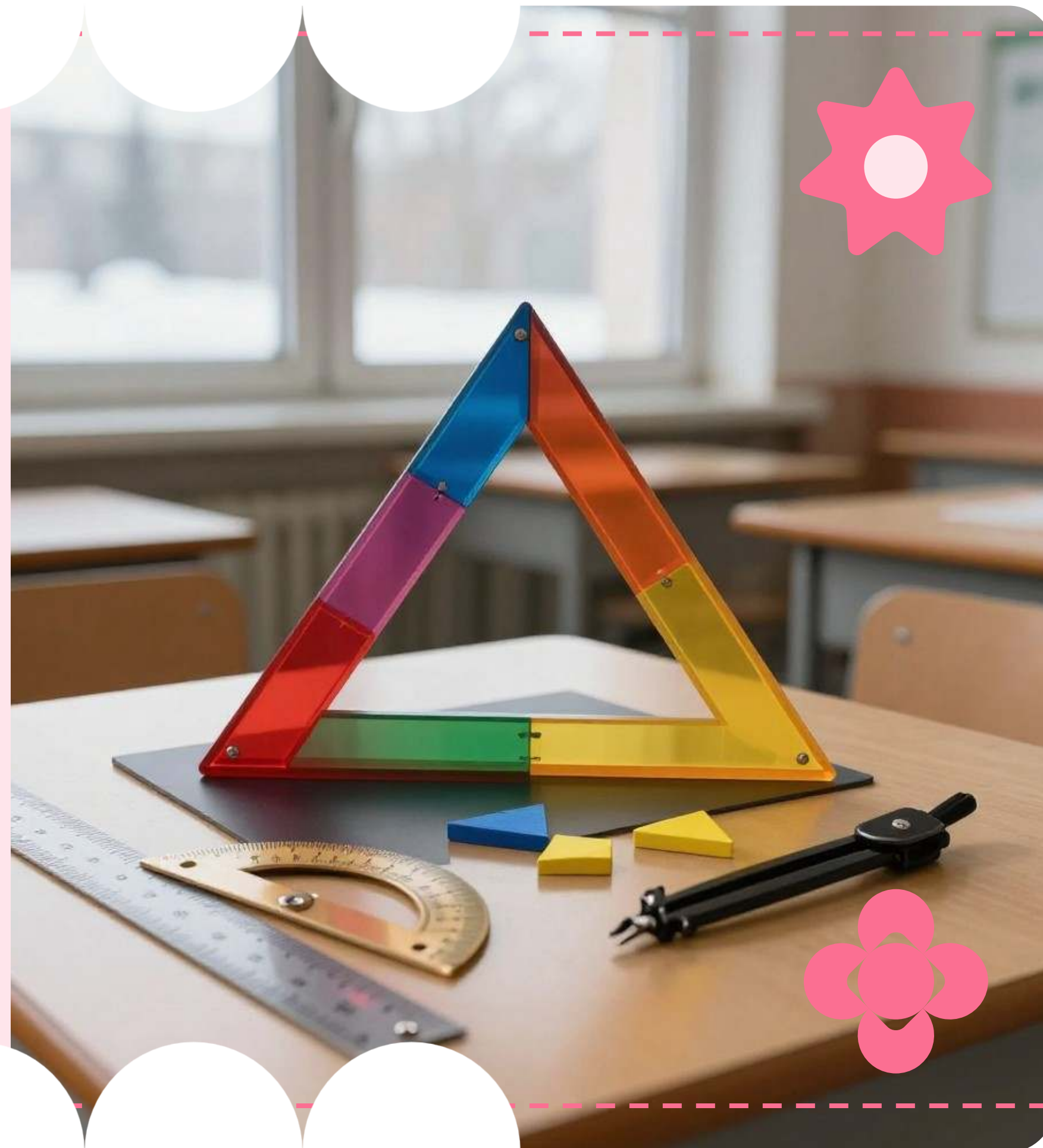
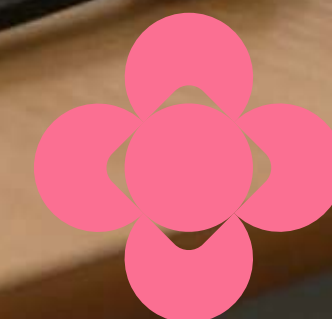
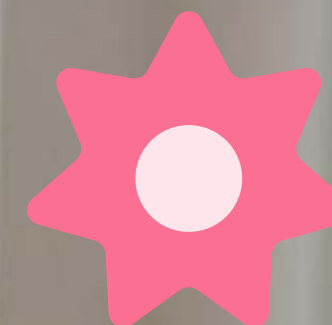




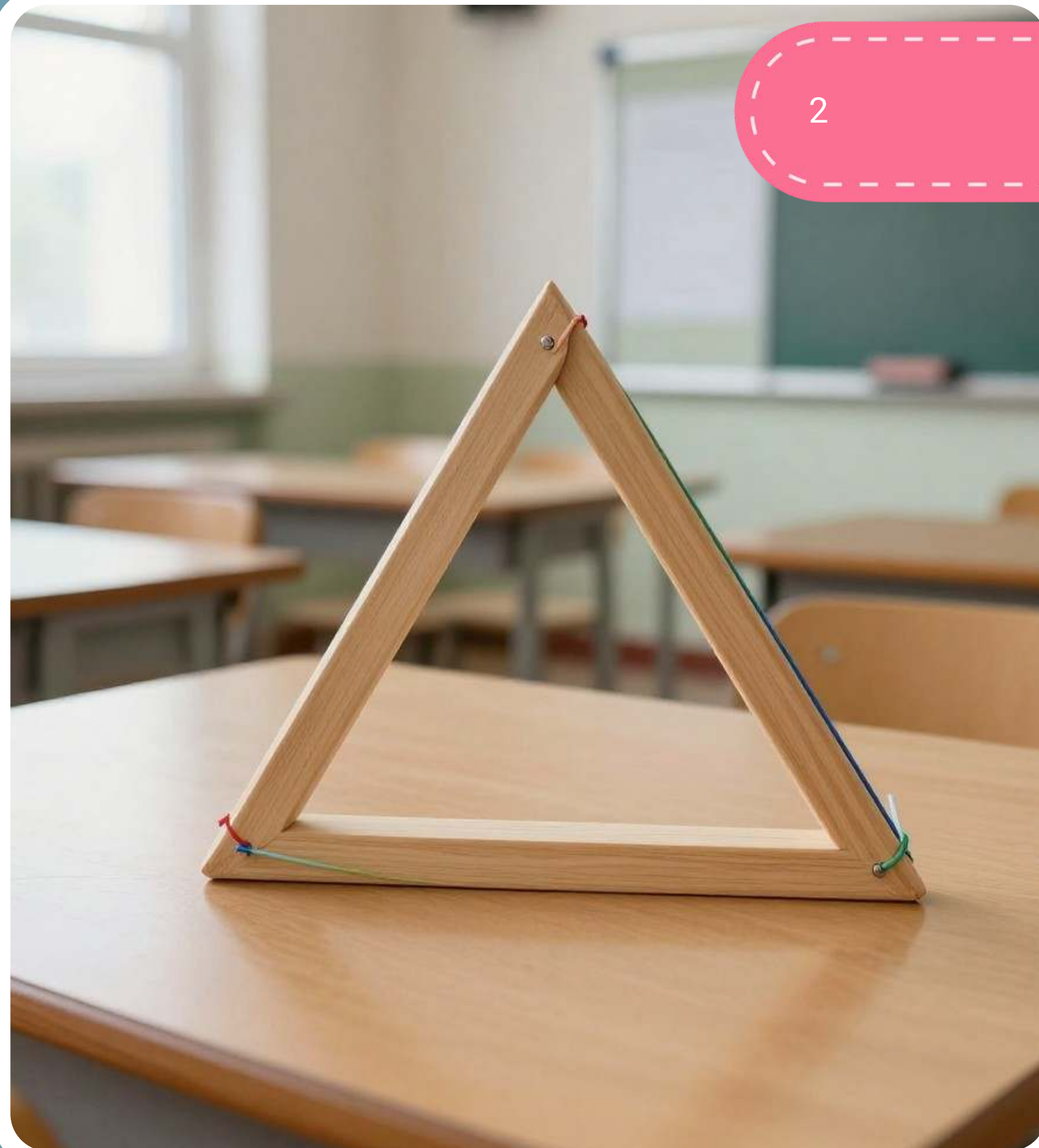
Решение треугольни ков

Находим стороны и углы
по известным данным.



Когда требуется решать треугольник

Такие задачи появляются, когда известна только часть данных фигуры. В них сочетаются свойства треугольника и вычисления с углами, а результаты нужны в измерениях, строительстве и навигации, где прямой доступ к объекту часто невозможен.



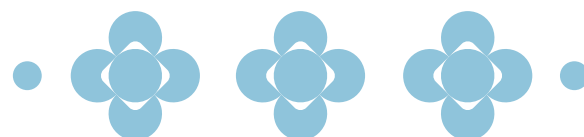
Основные элементы треугольника и обозначения

3



Три стороны

У любого треугольника есть три стороны, и именно они чаще всего измеряются в задачах. Для удобства стороны обозначают буквами a , b и c , чтобы использовать короткие и понятные формулы.



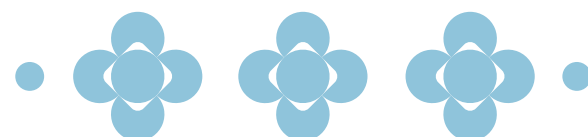
Три угла

Каждой стороне соответствует противоположный угол: стороне a — угол A , стороне b — угол B , стороне c — угол C . Такое обозначение помогает не путать элементы при подстановке в формулы.



Три вершины

Треугольник имеет три вершины, в которых сходятся его стороны. В чертежах вершины тоже обозначают буквами, чтобы можно было точно указать, какой угол или сторона рассматривается в задаче.



Сумма углов

Сумма внутренних углов любого треугольника всегда равна 180° . Это одно из главных свойств фигуры: оно позволяет находить недостающий угол, если известны два других.



Зачем нужны обозначения

Обозначения a , b , c и A , B , C нужны для записи теорем синусов и косинусов. Без них было бы трудно быстро и точно оформить решение треугольника.

Виды треугольников по сторонам и углам

4



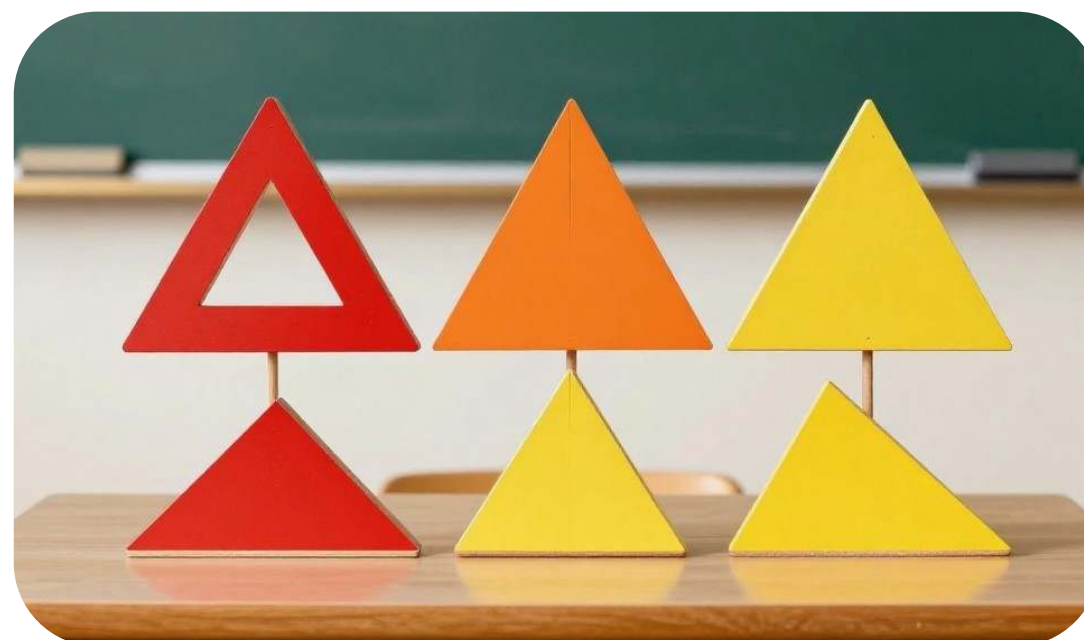
По сторонам

Равносторонний треугольник имеет три равные стороны, равнобедренный — две равные, а разносторонний — все стороны разные. Эти признаки помогают быстро понять, какие свойства фигуры можно использовать.



Связанные элементы

При решении важно не только знать длины сторон, но и понимать, какой угол им соответствует. Именно связь противоположных сторон и углов лежит в основе формул.



Чтение схемы

На чертеже полезно сразу подписывать вершины, стороны и углы. Тогда легко увидеть, какие элементы лежат напротив друг друга, и не ошибиться при выборе теоремы.



По углам

Остроугольный треугольник имеет все углы меньше 90° , прямоугольный — один угол 90° , а тупоугольный — один угол больше 90° . От вида треугольника зависит удобный способ решения.



Практический смысл

Разные виды треугольников встречаются в задачах по измерениям и построениям. Поэтому умение распознавать их по рисунку экономит время и делает решение более уверенным.

Как выбрать способ решения

Таблица показывает, какие данные уже известны и какая формула подходит в каждом случае.

Известно	Метод	Результат
2 стороны + угол	косинусы	третья сторона
1 сторона + 2 угла	сумма углов, синусы	остальные стороны
3 стороны	косинусы	один угол

Выбор метода зависит от набора известных элементов: сначала определяют, какие данные есть, затем подбирают формулу, которая дает недостающий угол или сторону.

Свойства треугольника, теоремы синусов и косинусов

Сумма углов треугольника как первый шаг решения

6

01

Найти третий угол

Если известны два угла треугольника, третий находят вычитанием из 180° . Это самый быстрый способ продолжить решение, потому что все три угла становятся известны.

02

Пример вычисления

При углах 52° и 61° третий угол равен 67° . Проверка проста: $52^\circ + 61^\circ + 67^\circ = 180^\circ$. Такой шаг часто открывает путь к дальнейшим вычислениям.

03

Переход к формулам

Когда третий угол найден, можно применять теорему синусов. Она позволяет вычислять стороны, если известна хотя бы одна сторона и все углы треугольника.

Теорема синусов

7

01

Главное равенство

В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла одинаково: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. Это и есть формулировка теоремы синусов.

02

Когда она полезна

Теорема особенно удобна, если известны одна сторона и два угла. Тогда сначала находят третий угол, а затем по пропорции вычисляют остальные стороны треугольника.

03

Связь стороны и угла

Формула показывает, что длина стороны зависит не сама по себе, а вместе с соответствующим углом. Поэтому при решении важно не перепутать, какая сторона лежит напротив какого угла.

04

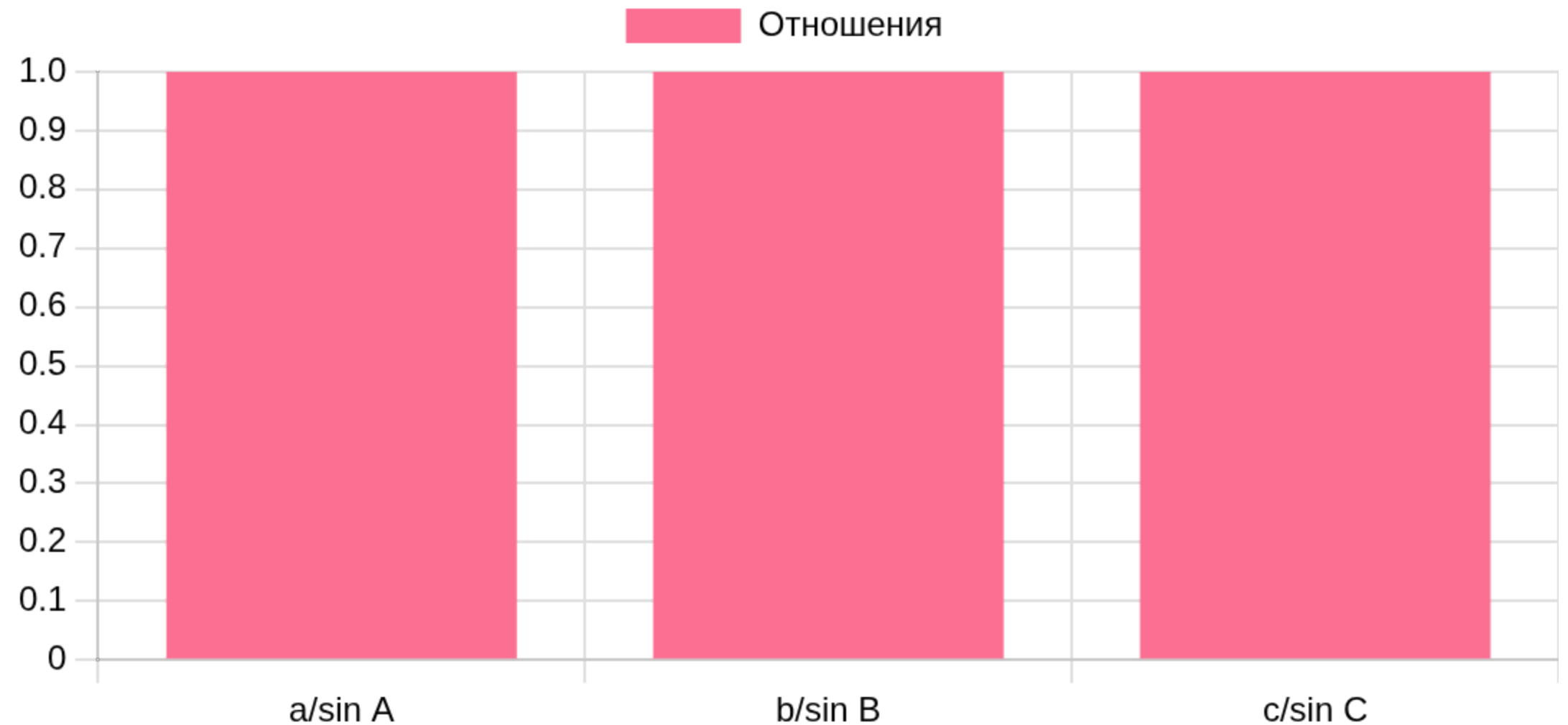
Практическая роль

Теорема синусов помогает не только в учебных задачах, но и при измерениях на местности. Она удобна там, где напрямую измерить все стороны нельзя, а углы можно определить.

Сравнение отношений по теореме синусов

8

Все три значения равны, поэтому на графике столбцы одинаковой высоты. Это показывает, что теорема связывает стороны и углы одним постоянным отношением.



Если отношение сохраняется, можно находить неизвестную сторону через уже известную пару «сторона — противолежащий угол».

Теорема синусов для любого треугольника

Теорема косинусов

9

01

Основная формула

Для любой стороны треугольника можно записать формулу вида $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Аналогичные записи существуют и для других сторон.

02

Когда применять

Теорема косинусов нужна, если известны две стороны и угол между ними, либо все три стороны. Она особенно полезна в не прямоугольных треугольниках.

03

Нахождение неизвестной стороны

Если известны две стороны и угол между ними, формула сразу дает третью сторону. Это делает решение коротким и удобным, когда требуется построение или проверка.

04

Нахождение угла

Когда заданы три стороны, теорему косинусов используют наоборот: сначала находят один угол, а затем переходят к остальным вычислениям по другим формулам.

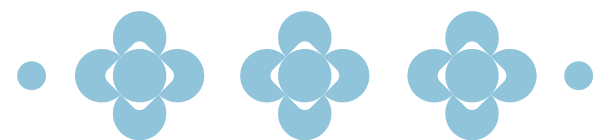
Связь теоремы косинусов с теоремой Пифагора

10



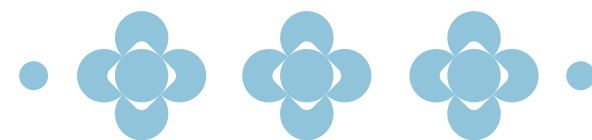
Прямой угол

Если угол C равен 90° , то $\cos 90^\circ = 0$. Тогда из общей формулы сразу получается $c^2 = a^2 + b^2$, как в теореме Пифагора.



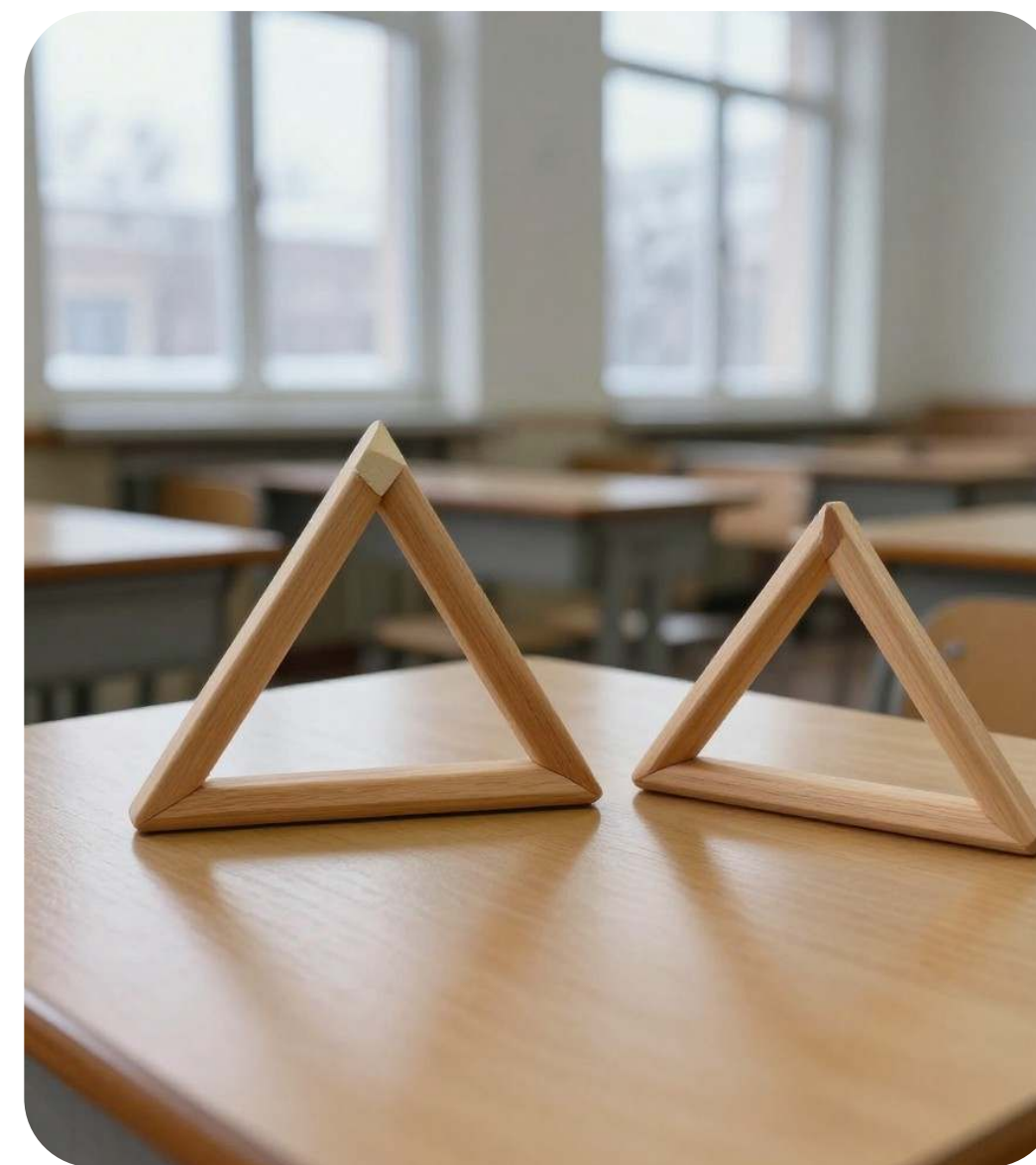
Обобщение правила

Теорема косинусов работает для любого треугольника, а не только для прямоугольного. Поэтому её можно считать расширением известного школьного правила на более широкий случай.



Почему это важно

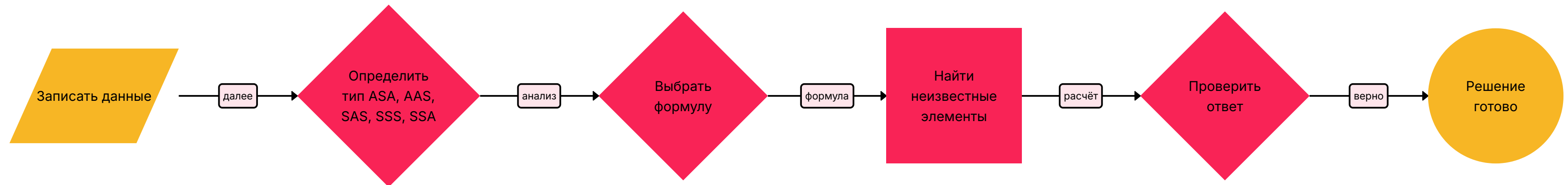
Такое сравнение помогает увидеть, что новые формулы не появляются случайно. Они продолжают уже знакомые свойства и делают решения задач более универсальными.



Алгоритм решения треугольника

11

Порядок действий: от записи известных данных до проверки результата



Случай: известны два угла и одна сторона

12

01

Найти третий угол

Сначала вычитают сумму двух известных углов из 180° . Так получают третий угол, а затем проверяют, что все углы треугольника действительно дают 180° .

02

Применить теорему синусов

Когда известен один угол и одна сторона, остальные стороны удобно находить по теореме синусов. Она связывает каждую сторону с противолежащим углом.

03

Получить однозначный ответ

В этом случае решение обычно единственное: после нахождения третьего угла все остальные элементы вычисляются без выбора между несколькими вариантами.

Случай: известны две стороны и угол между ними

13

01

Сначала косинусы

Теорема косинусов позволяет сразу найти третью сторону, потому что известны две стороны и угол между ними. Это основной шаг в данном случае.

02

Найти остальные углы

После вычисления третьей стороны можно определить остальные углы. Для этого используют теорему синусов или снова обращаются к теореме косинусов.

03

Удобно в практике

Такой набор данных часто встречается в черчении, измерениях и построении фигур, где известны длины двух сторон и угол между ними.

Случай: известны три стороны

14

01

Сначала один угол

Если заданы все три стороны, сначала находят любой угол по теореме косинусов. Это даёт опору для дальнейших вычислений и проверки.

02

Затем остальные углы

После первого угла остальные можно вычислить по теореме синусов или по другим формулам косинусов, выбирая самый удобный путь решения.

03

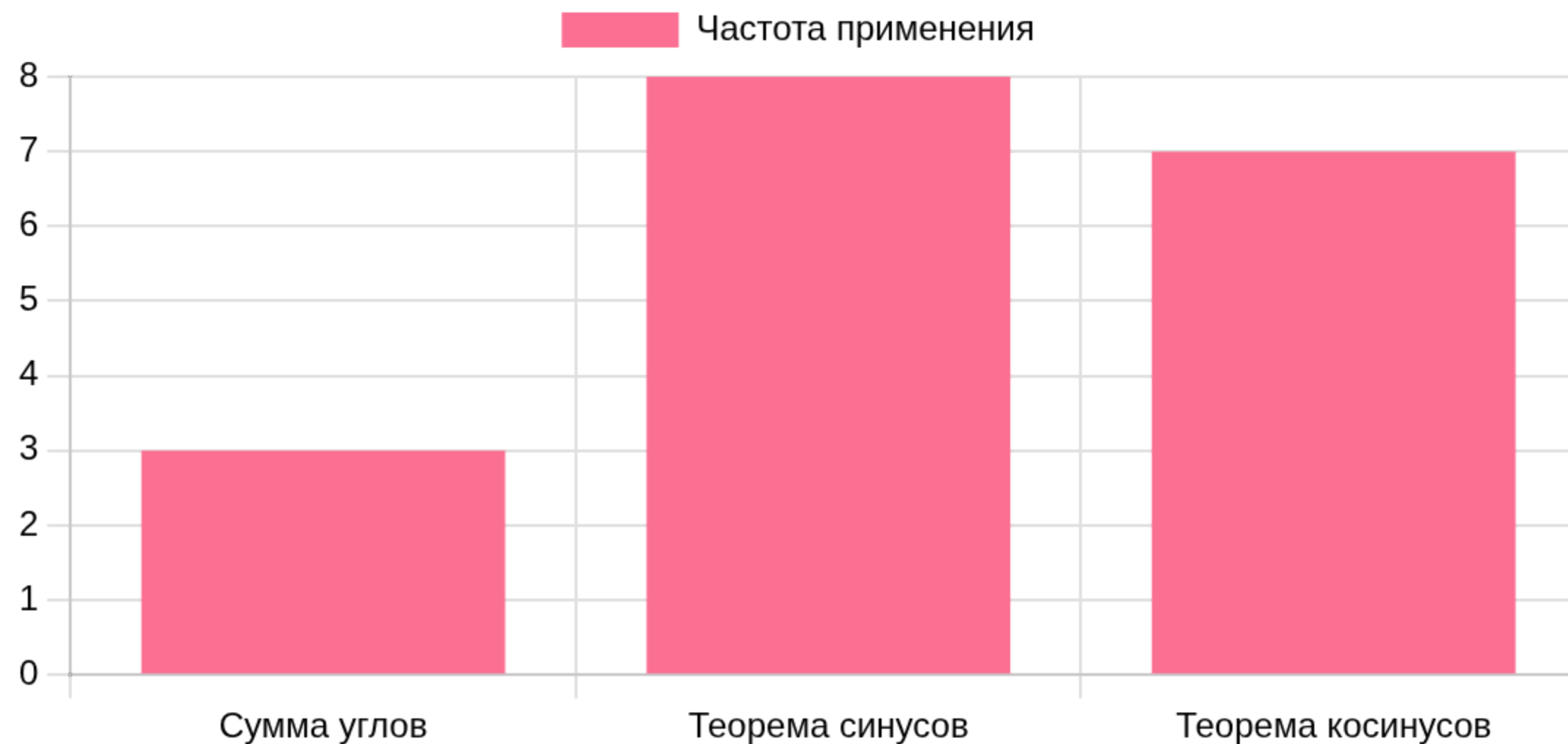
Проверка существования

Этот случай помогает убедиться, что треугольник с такими сторонами существует, а затем использовать его параметры для нахождения площади и других величин.

Какие методы чаще используются в разных типах данных

15

Разные исходные данные ведут к разным приёмам решения. На практике важно не запоминать только формулы, а быстро узнавать подходящий случай по условию задачи.



Если даны углы, чаще помогает сумма углов и теорема синусов; если есть две стороны и угол между ними, удобнее теорема косинусов.

Обобщение учебных случаев по теме «Решение треугольников»

Мини-примеры вычислений по формулам

Дано	Формула	Результат
45° и 65°	Сумма углов	70°
7 см, 9 см, 60°	Косинусы	третья сторона
A=30°, a=5 см, B=45°	Синусы	сторона b

Короткие примеры показывают, как один и тот же треугольник решается по-разному в зависимости от исходных данных.

Набор известных величин определяет выбор формулы: сначала анализируют данные, затем выполняют вычисления без лишних шагов.

Примеры по формулам темы «Решение треугольников»

Неоднозначный случай при использовании теоремы синусов

17



Один или два варианта

Когда известны две стороны и угол напротив одной из них, иногда получается один треугольник, иногда два, а иногда решения не существует.



Почему так бывает

Синус одного угла одинаков для двух углов: острого и тупого. Поэтому по найденному значению приходится проверять оба возможных варианта.



Нужна внимательная проверка

Чтобы не ошибиться, сравнивают длины, углы и условие задачи. Если данные не согласуются, треугольник построить нельзя.

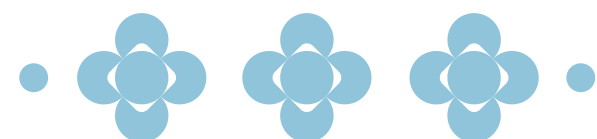


Школьный вывод

Этот случай особенно полезен для тренировки аккуратности: важно не только вычислить, но и понять, сколько ответов допускает условие.

Площадь треугольника через две стороны и угол между ними

18



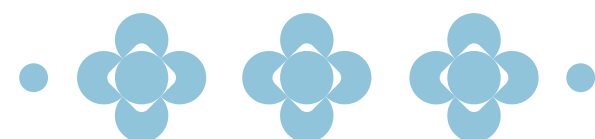
Удобная формула

Если известны две стороны и угол между ними, площадь находят по формуле $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. Она работает без построения высоты.



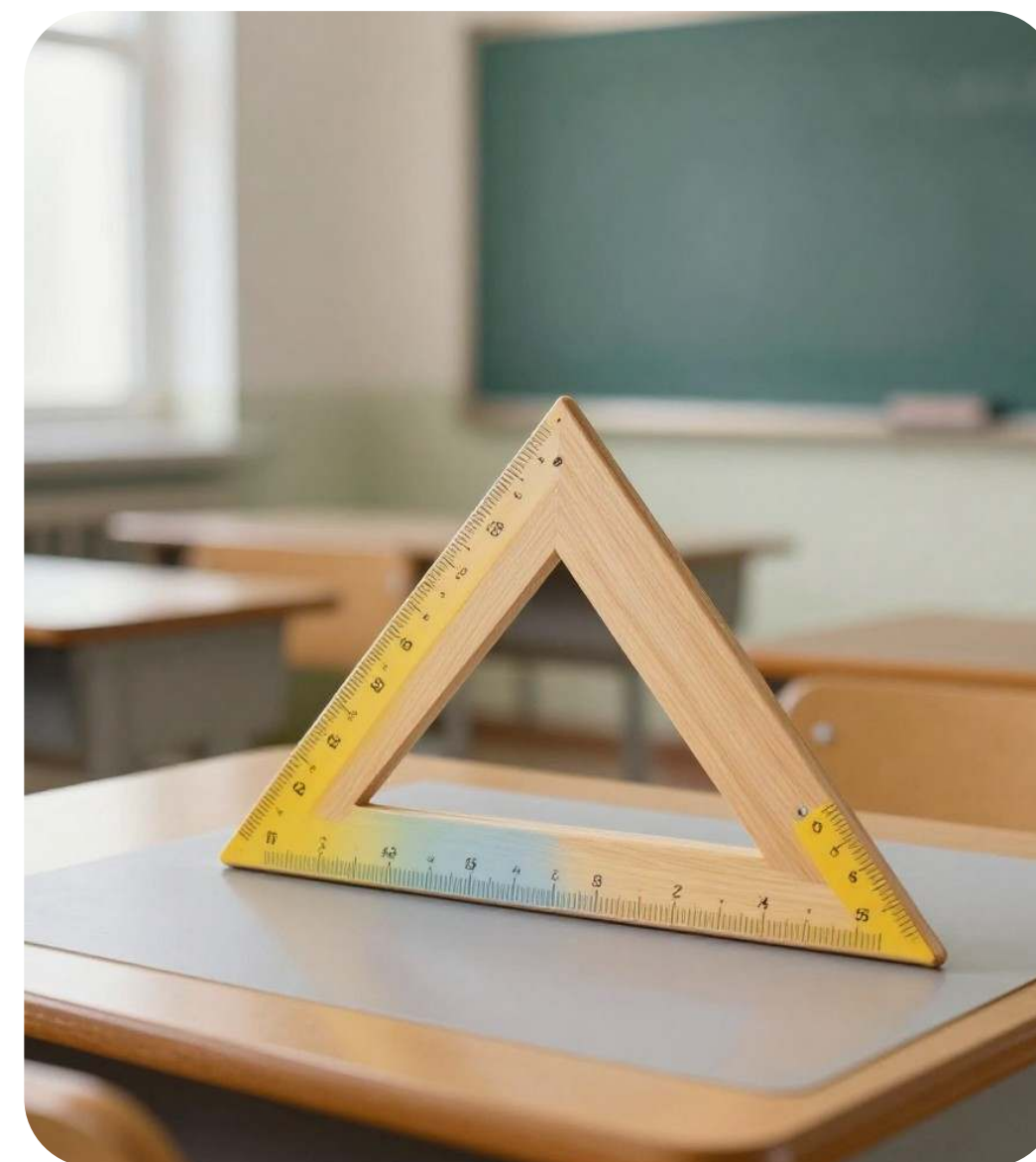
Быстрый расчёт

Сначала подставляют длины сторон, затем значение синуса угла. Так можно сразу получить площадь треугольника в нужных единицах.



Связь с фигурой

Формула показывает, что площадь зависит не только от сторон, но и от их взаимного наклона, то есть от угла между ними.



Проверка ответа и типичные ошибки

19

01

Проверить сумму углов

После вычислений первым делом убеждаются, что сумма всех углов равна 180° . Это самый простой способ заметить ошибку в решении.

02

Не путать пары

Сторона должна стоять напротив своего угла. Если перепутать обозначения, теоремы синусов и косинусов дадут неверный результат.

03

Выбрать верные единицы

Нужно не смешивать градусы и радианы, а также не округлять числа слишком рано. Иначе погрешность быстро возрастает.

04

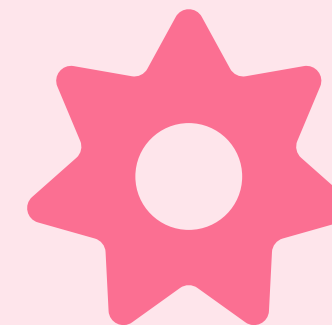
Проверить существование

Для некоторых наборов данных треугольник не существует. Поэтому важно заранее сравнить условия задачи с геометрическими ограничениями.

05

Записать ход решения

Аккуратная запись помогает увидеть, где именно возникла ошибка, и делает ответ понятным даже при длинных вычислениях.



Треугольники становятся понятнее, когда есть план

Теперь можно решать треугольники по данным, выбирать нужную формулу, находить стороны, углы и площадь, а главное — проверять ответ и избегать ошибок.

