



Скалярное произведение векторов и ортогональные векторы

Сегодня разберём, когда векторы перпендикулярны, и как это связано с прямым углом.



Почему это важно в 7–8 классе

Ортогональность помогает решать задачи на прямые углы в геометрии и на координатной плоскости. Связь с работой транспортировки — это скалярное произведение: по нему можно проверить «перпендикулярно или нет» без рисунка, быстро и точно.



Что означает «угол между векторами»

1

Угол между двумя векторами понимают как угол между их направлениями. Для него важна одна общая вершина, где векторы начинаются, а дальше рассматривают поворот от одного направления к другому.

2

Свойство «перпендикулярности» связано именно с величиной угла: если угол равен 90° , направления образуют прямой угол. Тогда часто говорят, что векторы ортогональны.

3

Один из способов записи — через число градусов: 0° , 90° , 180° . Когда в задаче нужен «прямой угол», это превращается в проверку условия на 90° — и его удобно выражать через скалярное произведение.



Прямой угол между направлениями

Прямой угол = 90°

Прямой угол имеет величину 90° . В геометрии на чертеже его отмечают маленьким квадратом у вершины. В задачах с векторами роль «вершины угла» играет общая точка начала направлений.

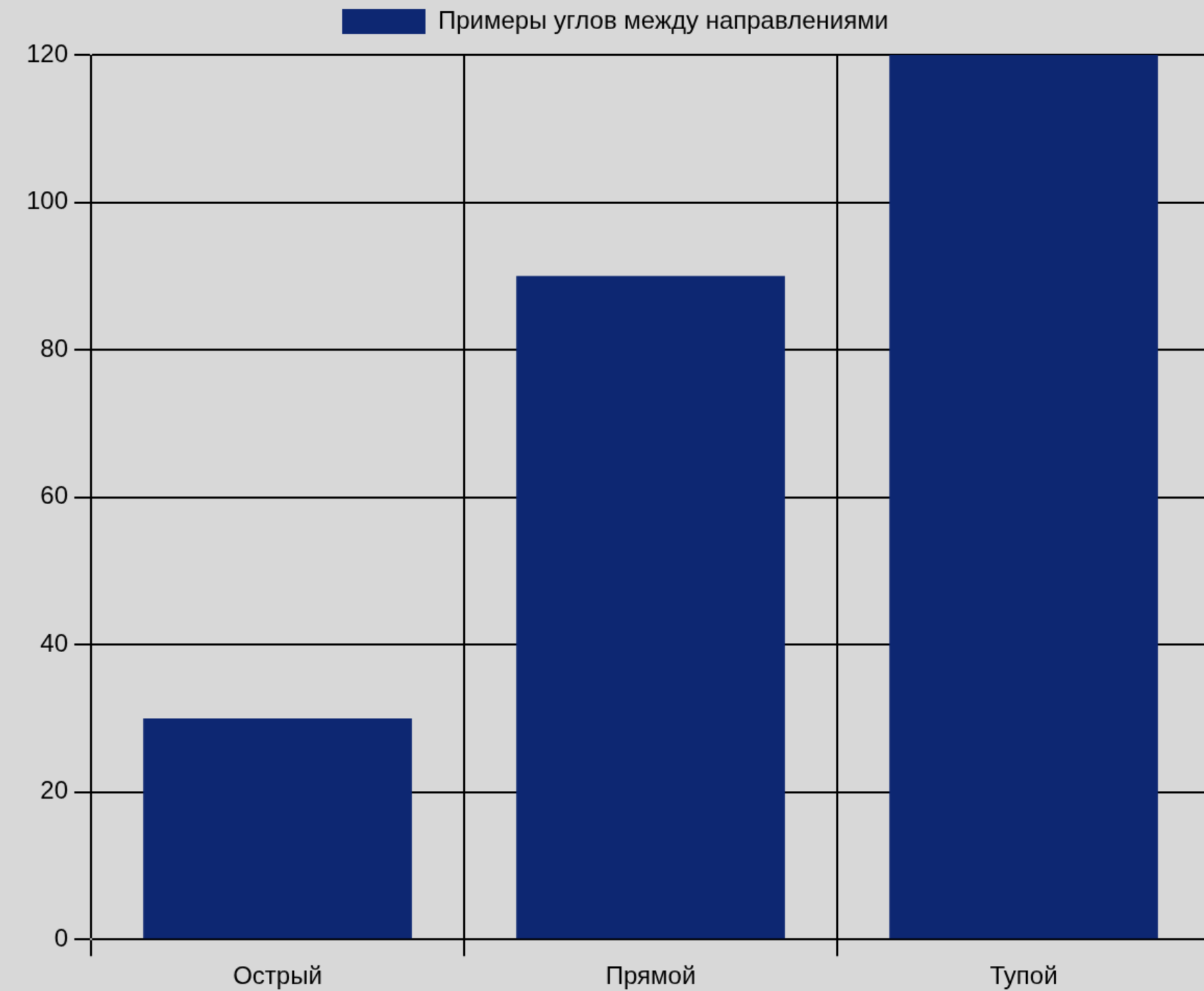
Как это переводится на векторы

Если два вектора направлены так, что угол между ними 90° , их называют ортогональными. Это обозначают словами «перпендикулярные векторы» или используют знак перпендикулярности, аналогично тому, как отмечают прямой угол.

Виды углов по величине

Когда угол между векторами 90° , скалярное произведение становится нулём. Это и есть точный критерий ортогональности в координатной форме.

По диаграмме видно, что при прямом угле появляется особое значение. Именно в точке 90° скалярное произведение даёт удобную проверку ортогональности.



Учебная иллюстрация: примеры 30° , 90° , 120° (без статистических данных)

Ортогональность векторов: ключевые идеи



Прямой угол

Если угол между векторами равен 90° , их называют ортогональными. На практике это означает «направления перпендикулярны», как в школьной задаче с отметкой прямого угла.



Смысл направлений

Важно сравнивать не длины, а именно направления. Векторы могут быть разной длины, но оставаться ортогональными, если поворот от одного направления к другому ровно 90° .



Проверка через скалярное произведение

Скалярное произведение векторов даёт число, связанное с косинусом угла. При угле 90° косинус равен нулю, значит скалярное произведение тоже равно нулю.

Как распознать ортогональность (и отличить её от «почти»)

Таблица показывает, как по признакам на рисунке и по числам сделать вывод: ортогональны ли векторы, или угол не равен 90° .

Главный признак ортогональности — равенство 90° . В координатной форме это соответствует тому, что скалярное произведение равно нулю.

Признак	Как выглядит	Чем проверяют
Угол 90°	Похоже на «прямой угол»	Измерением/через критерий 0 скалярного произведения
Перпендикулярность	Направления образуют прямой угол	Проверкой условия: $a \cdot b = 0$
Не ортогональны	Угол отличается от 90°	Проверкой угла или вычислением $a \cdot b \neq 0$

Алгоритм проверки ортогональности

Сначала находят векторы/их координаты, затем вычисляют угол или проверяют условие через скалярное произведение.

Ортогональные отрезки и «лучи» в координатах

1

В школьных задачах перпендикулярными называют не только векторы, но и направления отрезков: если два отрезка лежат на перпендикулярных прямых, говорят о перпендикулярности направлений. Вектор удобно описывает такое направление.

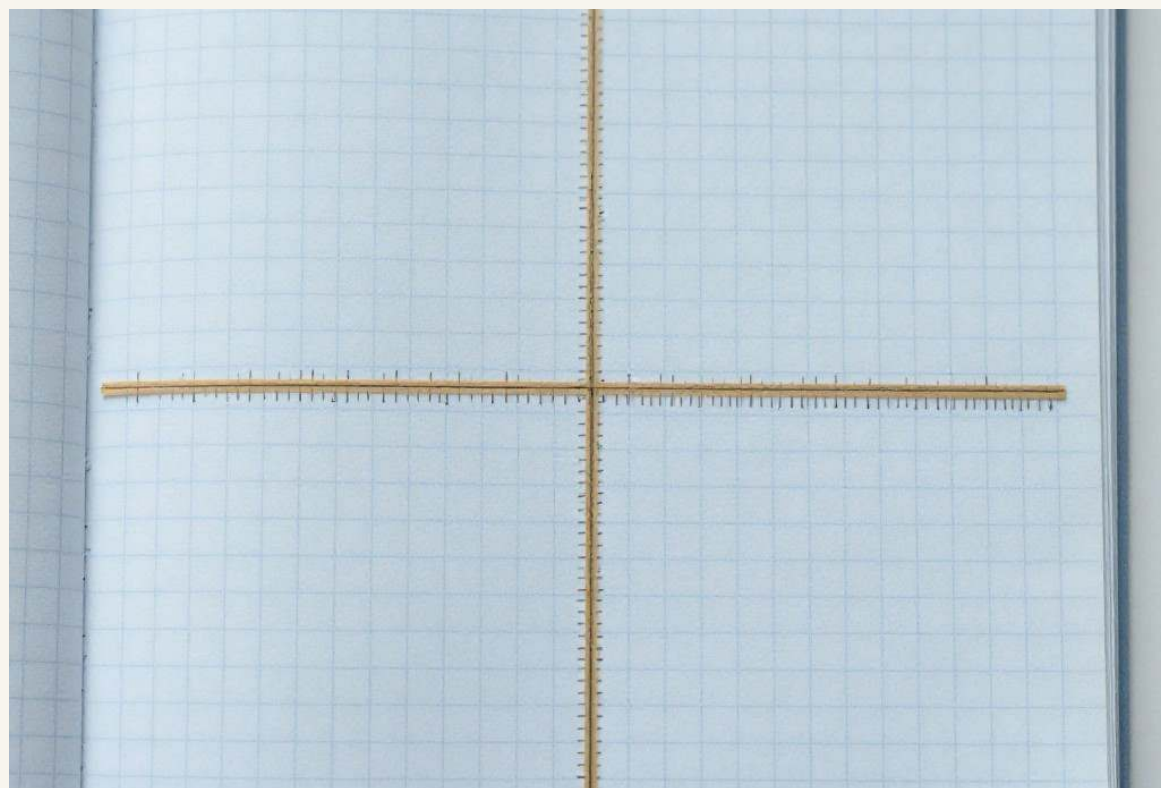
2

Часто в геометрии вершина прямого угла — это точка, где «сходятся» два направления. Поэтому ортогональность векторов естественно возникает в прямоугольниках, на клетчатой бумаге и в чертежах с осями.

3

В координатной плоскости можно просто взять координаты векторов и вычислить их скалярное произведение. Если оно равно нулю, значит направления перпендикулярны, даже если рисунок не помогает точно оценить угол.

Ортогональные направления в окружающих предметах



Уголки в тетради и на листе

В тетрадной клетке легко увидеть пары направлений, которые образуют прямые углы. Если мысленно провести два вектора вдоль сторон клетки, они будут ортогональны. Такие примеры помогают понять, что « 90° » — это не только отметка на рисунке, но и проверяемое свойство направлений.



Рамки и дверные проёмы

В доме часто встречаются прямоугольные элементы: рамки, дверные проёмы, стойки мебели. Соседние направления у них перпендикулярны. Это хороший образ для идеи: вектор можно заменить направлением стороны, а ортогональность затем проверить через скалярное произведение.



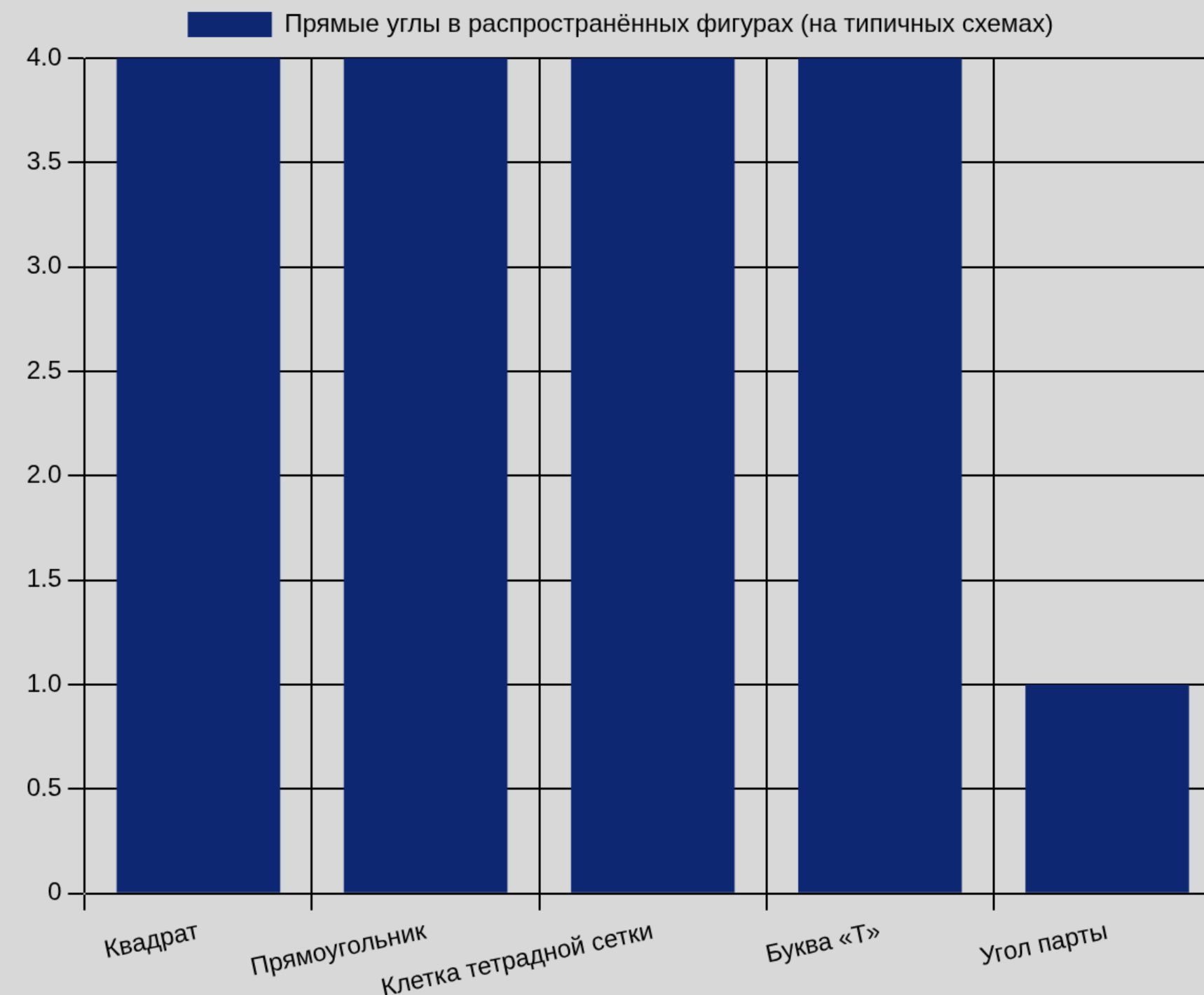
Направления в окне координат

Оси в координатной плоскости задают «две перпендикулярные линии», относительно которых удобно строить векторы. Векторы, направленные вдоль осей, обычно ортогональны. Поэтому в задачах часто сначала сравнивают направления, а затем подтверждают результат вычислением.

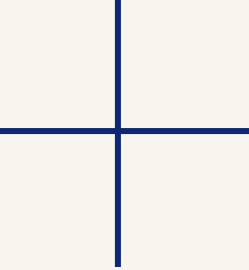
Где в фигурах встречаются прямые углы

На таких фигурах прямые углы легко «считываются» по угловым отметкам: чем больше прямоугольных участков и сеточной структуры, тем больше прямых углов.

Данные показывают: чаще всего прямые углы появляются у фигур с прямоугольными сторонами и чёткой геометрией «по клеткам».



Схематические примеры для учебного обсуждения; значения соответствуют типовым рисункам.



При измерении транспортиром ориентируйтесь на шкалу и отмечайте, на сколько градусов совпадает вторая сторона. Так проще проверять прямой угол и перпендикулярность.

1°

Точность школьных измерений обычно составляет один градус, поэтому небольшие отклонения допустимы при проверке на 90°.

Школьная практика измерений углов транспортиром (учебные требования к точности в задачах).

Построение перпендикуляра

1

Поставьте угольник так, чтобы его ребро совпало с заданной прямой, а рабочая сторона прошла через нужную точку. Затем проведите линию по краю угольника до пересечения с чертежом.

2

Если угольника нет, используйте линейку и карандаш: через точку на прямой проведите вспомогательную линию, затем отметьте угол 90° по разметке. После этого аккуратно обозначьте перпендикуляр.

3

Построение перпендикуляра «задаёт» направление высоты. Поэтому его удобно применять, когда в треугольнике нужно опустить высоту на сторону или восстановить перпендикуляр к ребру прямоугольника.

4

Перпендикуляр помогает в построениях симметрии: ось симметрии обычно связана с прямыми углами. Точное проведение 90° делает дальнейшие шаги по чертежу наглядными и проверяемыми.

Сравнение углов и их свойств

Вид угла	Величина	Пример	Внешний вид
Острый	$< 90^\circ$	35°	меньше прямого
Прямой	$= 90^\circ$	90°	квадратик у вершины
Тупой	$> 90^\circ$ и $< 180^\circ$	130°	больше прямого

Виды углов различают по величине в градусах: острый, прямой и тупой — это три основные категории для школьных задач.

Главный признак — сравнение величины с 90° : от этого напрямую зависит тип угла и способы проверки на чертеже.

Алгоритм проверки перпендикулярности

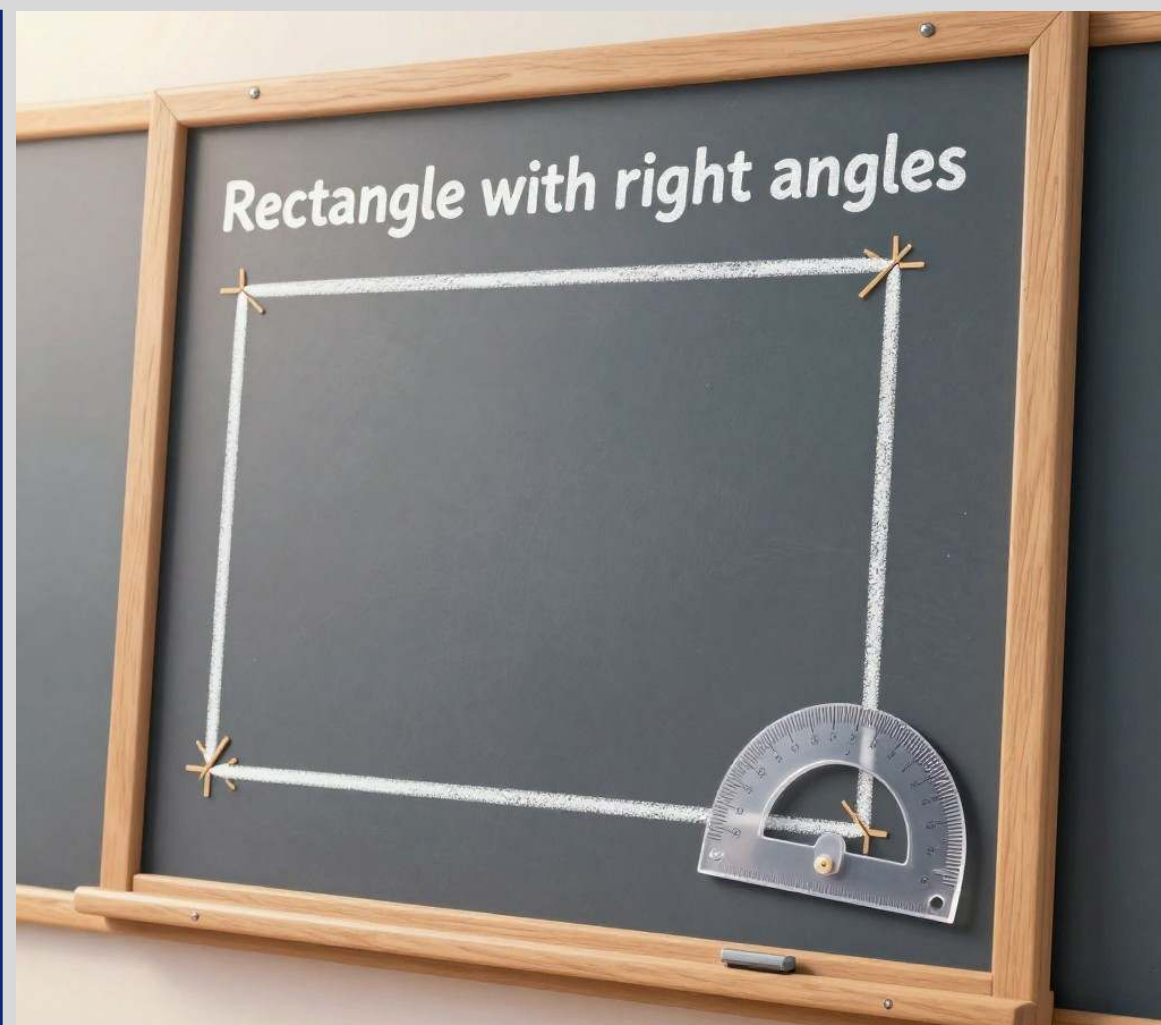
Логика решения задач на перпендикулярность по чертежу или после построения.

Типичные построения в геометрии 7 класса



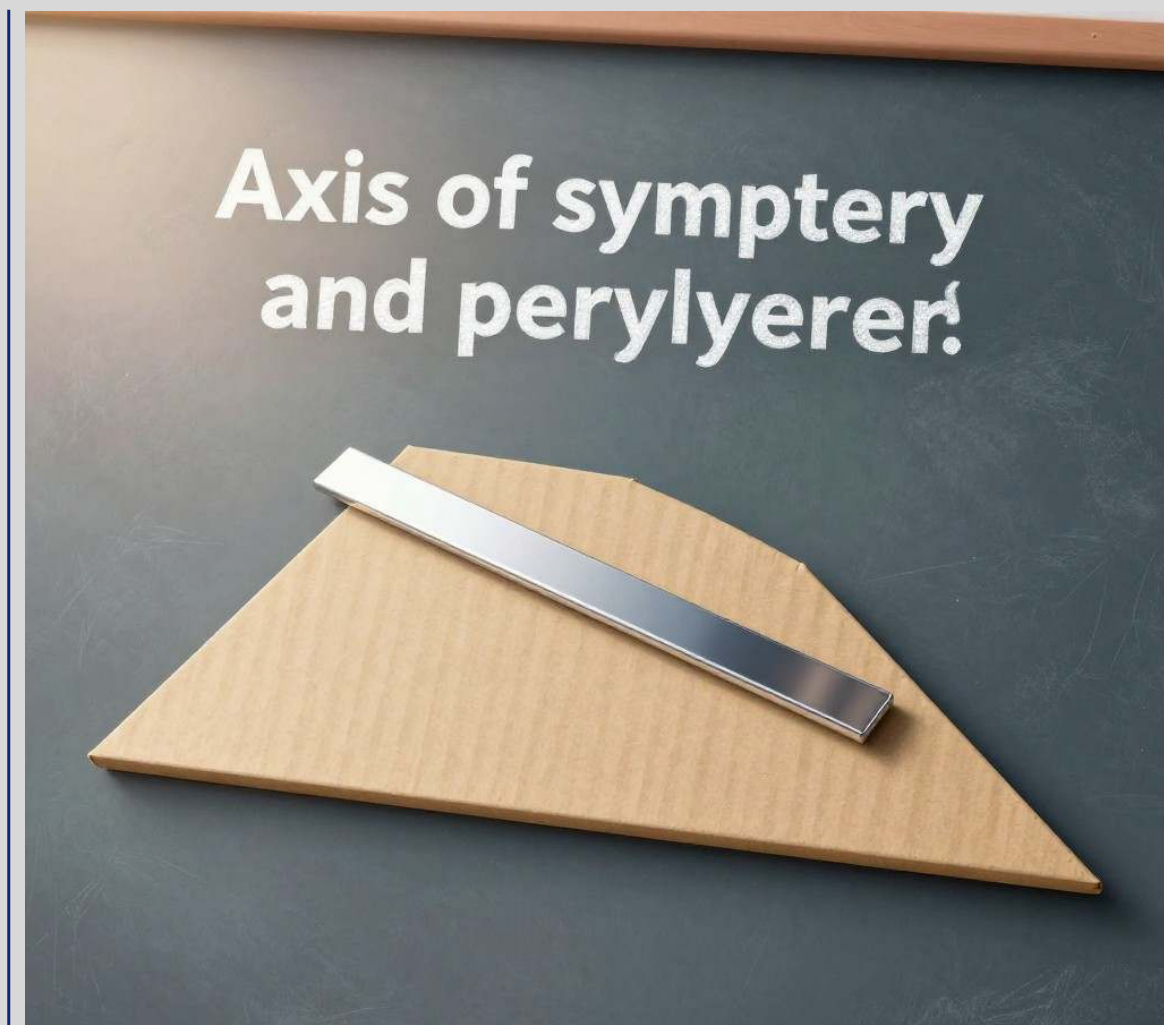
Высота треугольника

Чтобы провести высоту, в нужной точке к стороне строят перпендикуляр. Получившаяся прямая образует угол 90° и превращает задачу о треугольнике в более наглядную: высота помогает находить площади и стороны по свойствам фигур.



Прямоугольник «по прямым углам»

В прямоугольнике каждая пара соседних сторон перпендикулярна, поэтому прямые углы можно отмечать сразу. При построении чертежа сначала задают длины сторон, а затем проверяют, что углы действительно равны 90° , используя угольник или транспортир.



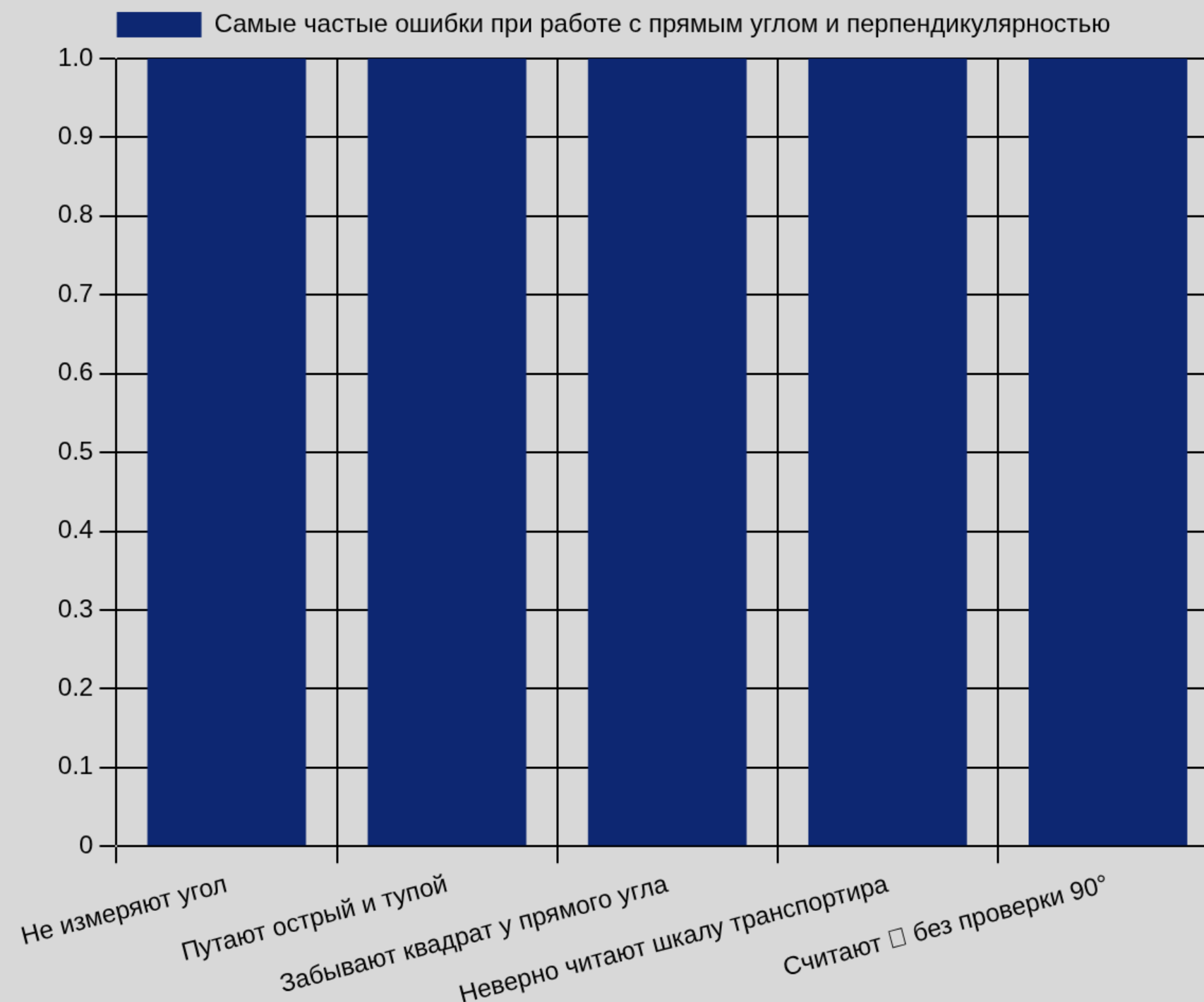
Ось симметрии и перпендикуляр

В задачах на симметрию часто нужно найти линию, которая делит фигуру на зеркальные части. Для этого применяют построения с прямыми углами: перпендикулярные направления позволяют точно восстановить положение точек и границ по заданной оси.

Самые частые ошибки при изучении темы

В большинстве случаев ошибка возникает не в «теории», а в проверке: угол могут не измерить или принять за 90° похожую разметку.

Даже одна пропущенная проверка ведёт к неверному выводу. Поэтому сравнение с 90° — ключевой шаг перед записью результата.



Набор типичных ошибок из методических разборов; диаграмма показывает их набор, а не статистику по классу.

Задачи для закрепления

- 1** Найдите на рисунке все прямые углы в прямоугольнике и квадрате. Отметьте вершины, где можно уверенно поставить угловые квадратики, и посчитайте их общее число.
- 2** Определите, перпендикулярны ли две прямые по чертежу. Для проверки используйте транспортир: найдите угол между линиями и сравните его с 90° .
- 3** Постройте прямой угол от заданного луча: через указанную точку проведите линию так, чтобы между лучом и новой прямой получился угол 90° . Проверьте результат угольником.
- 4** Сравните три угла по величине и распределите их на острые, прямые и тупые. Для этого последовательно оцените каждый угол относительно 90° и убедитесь в корректности отметок.

Главные сведения урока

Три опорные записи помогают быстро ориентироваться: что такое прямой угол, как обозначают перпендикулярность и чем её проверяют.

Во всех основных ситуациях ключевое число — 90° : оно связывает прямые углы, перпендикулярные направления и проверку на чертеже.

Признак	Запись	Комментарий
Прямой угол	$= 90^\circ$	угол четверти окружности
Перпендикулярные прямые	$a \perp b$	обозначение перпендикулярности
Проверка	измерением угла	сравните угол с 90°
Фигуры	квадрат и прямоугольник	содержат прямые углы

Перпендикулярность — это 90° на практике

Понятия угла, прямого угла и перпендикулярных прямых образуют основу для геометрии 7 класса. Прямой угол равен 90° , а перпендикулярность подтверждают измерением и построениями на чертеже.