

Вписанные и описанные окружности

Вписанная окружность касается сторон треугольника, а описанная проходит через его вершины. Сегодня разберём центры и формулы.



Зачем это нужно в 8 классе

В курсе геометрии 8 класса эта тема помогает находить неизвестные стороны, углы, радиусы и площади. Окружности часто появляются в задачах на построение, в доказательствах и в вычислениях, где важны равенства расстояний и симметрия.



Основные определения

Вписанная окружность касается всех сторон треугольника изнутри. Её центр называется инцентром. Он находится в точке пересечения биссектрис углов, поэтому сразу «учит» искать равенство расстояний.

Описанная окружность проходит через все три вершины треугольника. Центр описанной окружности называют не ортоцентром: ортоцентр — это другая точка, связанная с высотами.

Центр описанной окружности — это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам. От неё одинаково далеко до каждой вершины, поэтому она и становится центром окружности, проходящей через вершины.

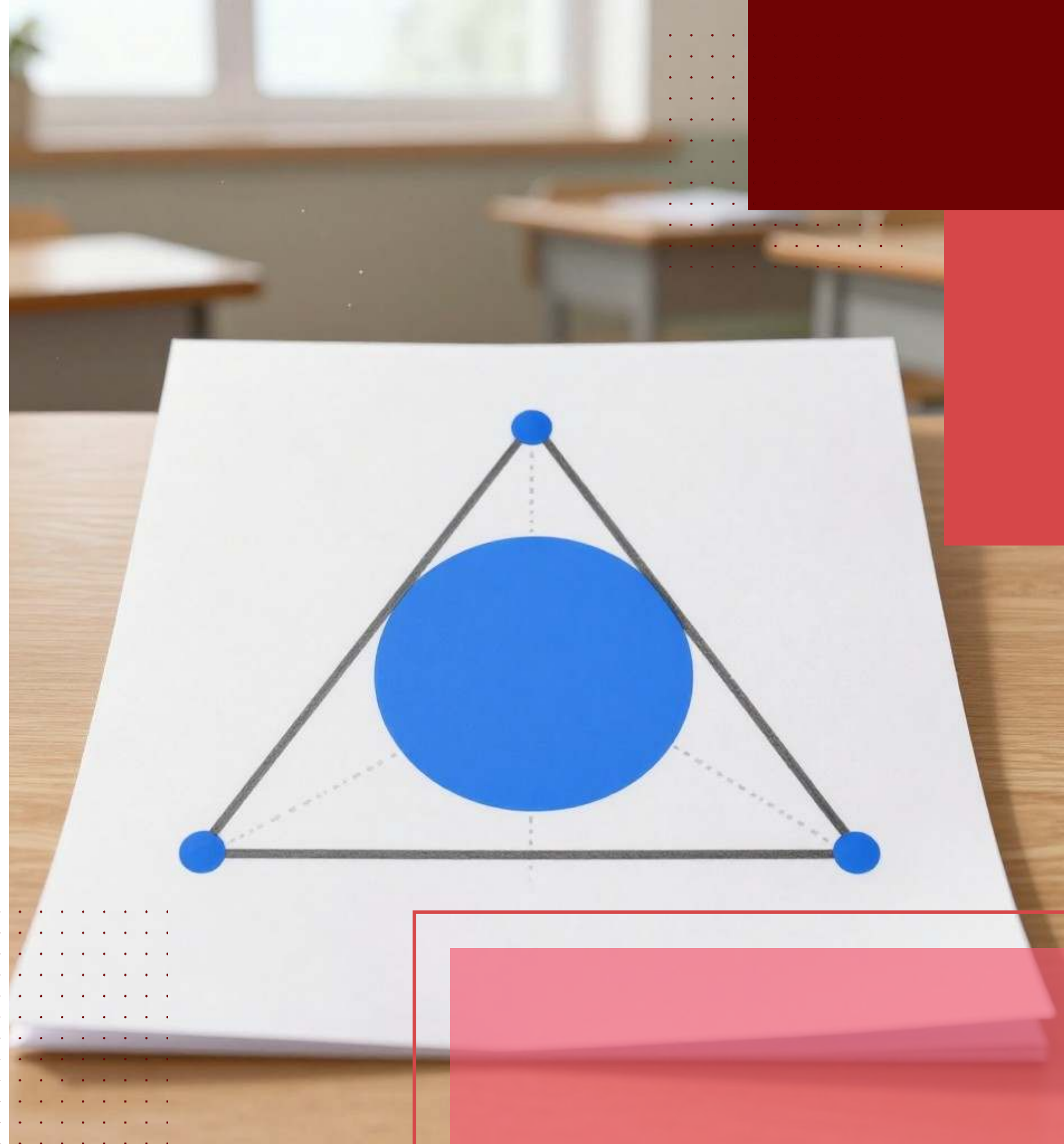
Вписанная окружность и её центр

Инцентр и радиус

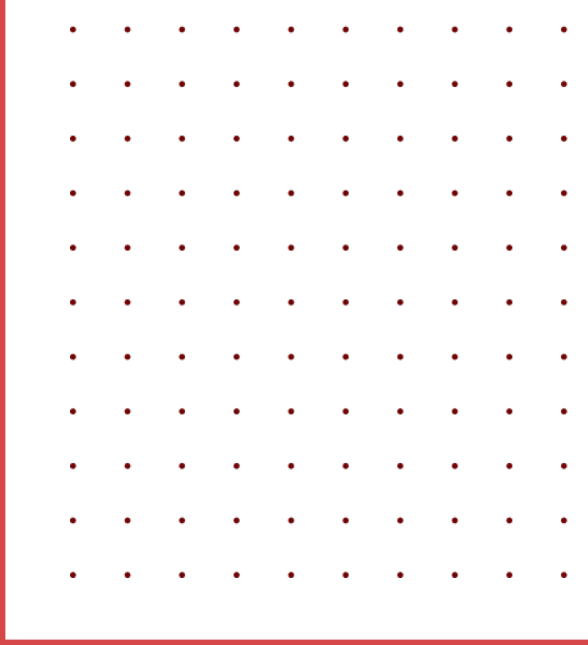
Инцентр равноудалён от всех сторон треугольника. Расстояние от инцентра до стороны равно радиусу вписанной окружности r и всегда измеряется по перпендикуляру к этой стороне в точке касания.

Касание со сторонами

На рисунке показывают треугольник, три точки касания и биссектрисы, которые приводят к инцентру. От инцентра проводят отрезок радиуса r до стороны под прямым углом — это подчёркивает, почему касание происходит «ровно».



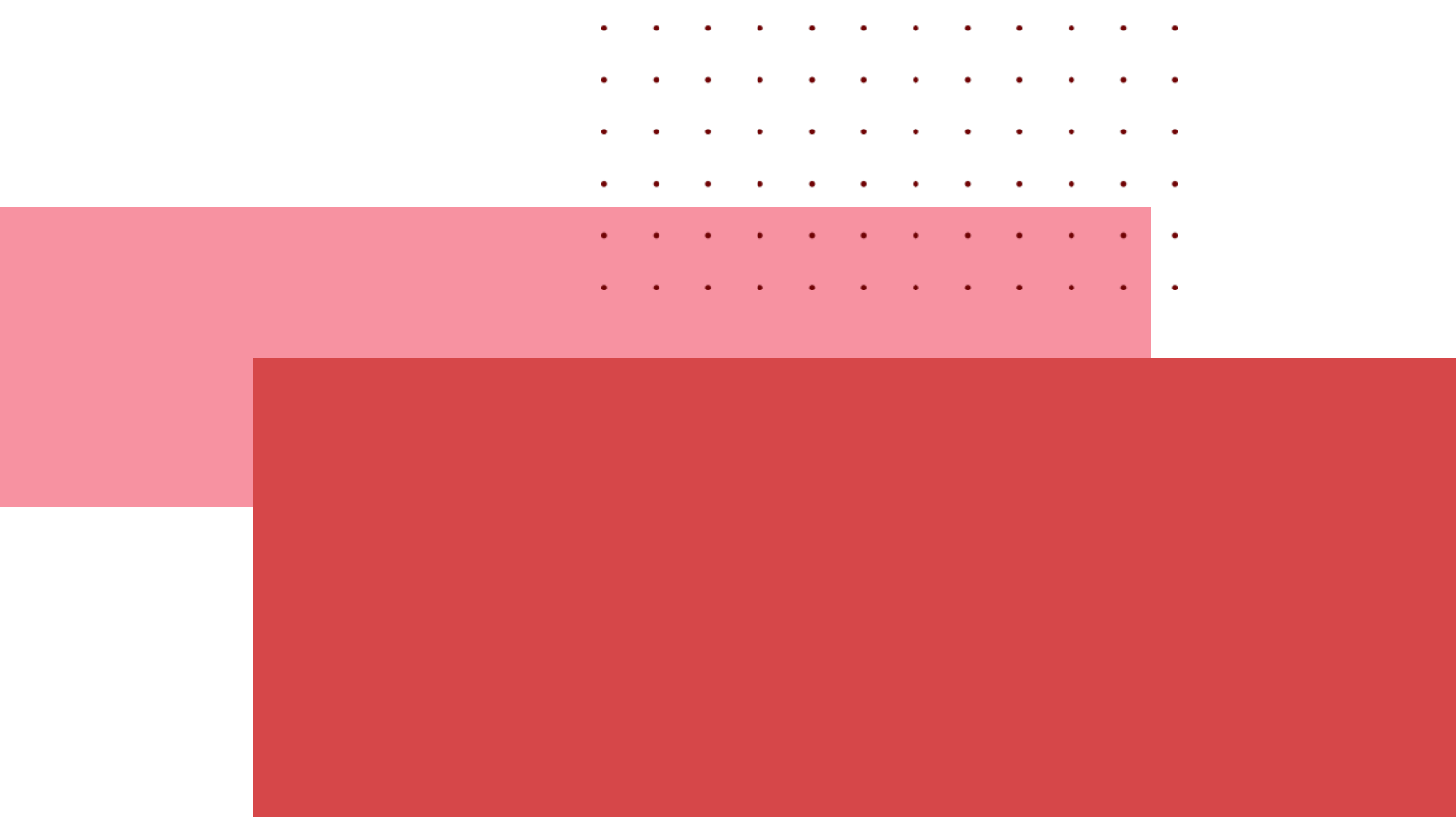
Свойства биссектрис треугольника



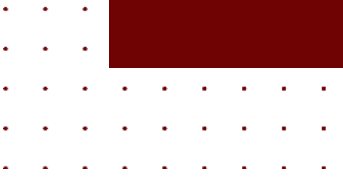
Биссектриса делит угол на две равные части. Поэтому для любой точки на биссектрисе расстояния до сторон этого угла оказываются одинаковыми: точка как бы «на равном уровне» от обеих сторон.

В треугольнике три биссектрисы пересекаются в одной точке. Эта точка лежит внутри треугольника и служит центром единственной вписанной окружности.

Именно равенство расстояний до трёх сторон позволяет провести окружность с одним и тем же радиусом. Поэтому центр вписанной окружности удобно искать через пересечение биссектрис.



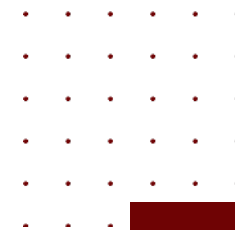
Площадь треугольника через радиус вписанной окружности



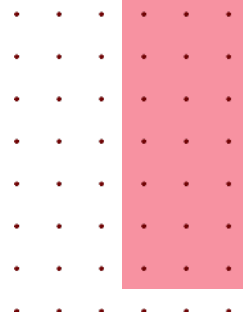
Если полупериметр фиксирован, то S растёт линейно вместе с r : каждое увеличение радиуса увеличивает площадь в одинаковое число раз.

По столбцам видно прямую связь: при $r = 12$ см площади соответствуют значениям $12 \cdot r$. Чем больше радиус вписанной окружности, тем больше площадь.

Формула $S = p \cdot r$; расчёт для $p = 12$ см.



Формулы, связанные с вписанной окружностью

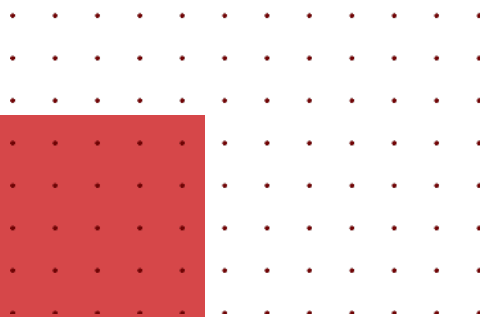


В таблице собраны ключевые соотношения, которые помогают находить p , S и r , а также объясняют прямой угол в месте касания радиусом.

Удобнее всего находить r через уже известные S и p : достаточно подставить в $r = S/p$.

Величина	Обозначение	Формула и смысл
Полупериметр	p	$p = (a + b + c)/2$
Площадь	S	$S = p \cdot r$ (площадь через r)
Радиус и касание	r	$r = S/p$; радиус к стороне в точке касания перпендикулярен стороне

Базовые формулы из школьного курса планиметрии, используемые при выводах для вписанной окружности.



Существование вписанной окружности

В любом треугольнике можно построить ровно одну вписанную окружность. Причина в том, что биссектрисы трёх углов обязательно пересекаются в одной точке.

Эта точка — инцентр — находится на одинаковом расстоянии от всех сторон. Поэтому если взять это расстояние как радиус, получится окружность, которая «одинаково» подходит к каждой стороне.

Остаётся провести окружность с центром в инцентре и радиусом, равным расстоянию до сторон. Такая окружность будет касаться всех трёх сторон, то есть окажется вписанной.

Описанная окружность и её центр

Где прячется центр

Центр описанной окружности — это точка, от которой все вершины треугольника на одинаковом расстоянии. На рисунке она отмечается пересечением серединных перпендикуляров, а радиус R проводится к одной из вершин.



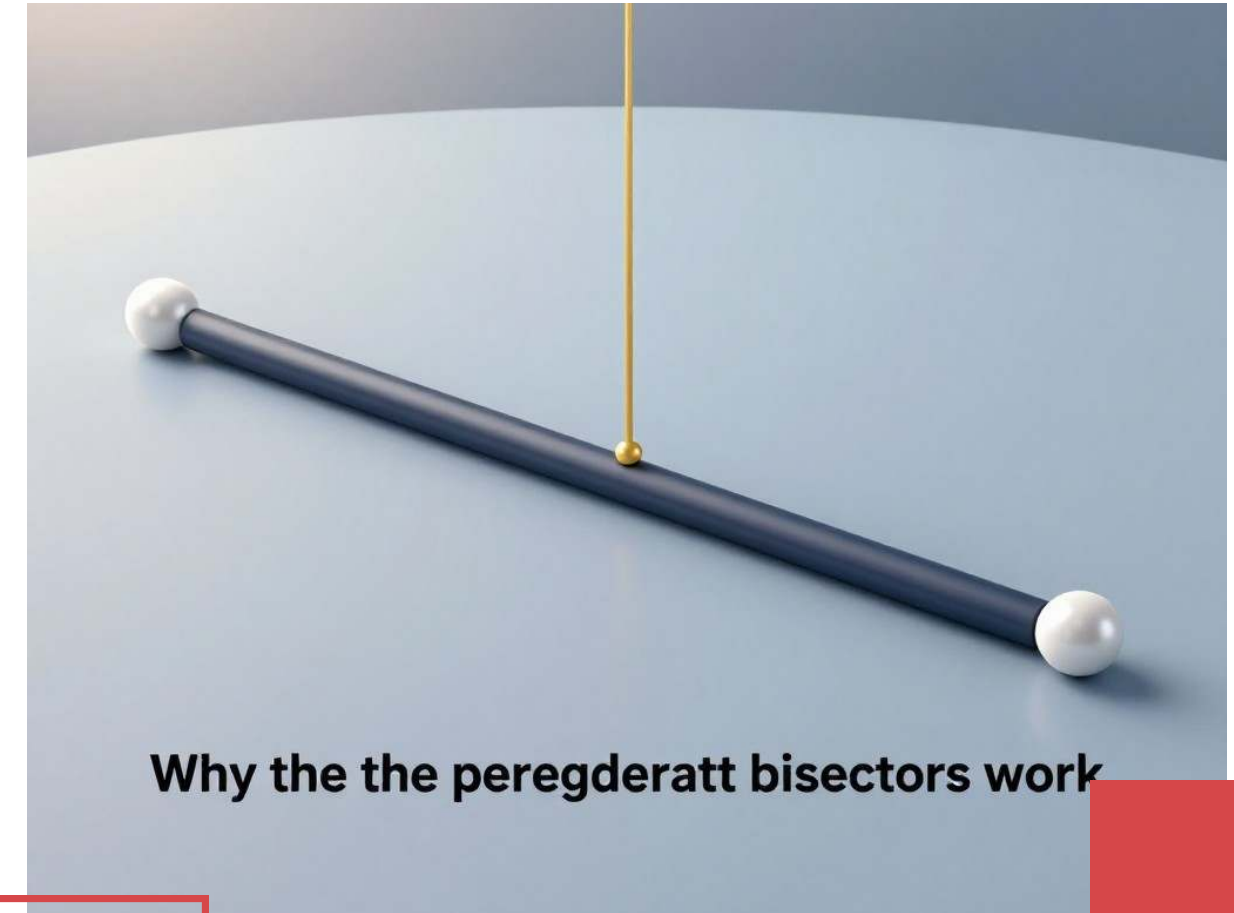
Окружность «держит» вершины

Описанная окружность проходит ровно через все три вершины. Это значит, что расстояния от центра до каждой вершины — одно и то же значение R , поэтому окружность становится естественным способом «собрать» треугольник на одной окружности.



Почему работают серединные перпендикуляры

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны и образует множество точек на равных расстояниях от её концов. Так же работают три серединных перпендикуляра: их пересечение даёт центр окружности, проходящей через вершины.



Why the the peregrderatt bisectors work

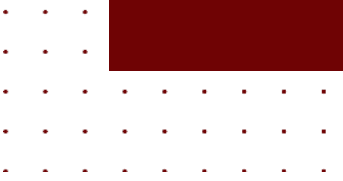
Свойства серединных перпендикуляров

Серединный перпендикуляр проходит через середину отрезка и перпендикулярен ему. Он описывает точки, которые находятся на одинаковом расстоянии от концов этого отрезка — это ключевое свойство.

Если взять два отрезка, то их серединные перпендикуляры тоже определяют точки с равными расстояниями. В треугольнике рассматривают перпендикуляры к трём сторонам, и они «сходятся» в одной точке.

Точка пересечения трёх серединных перпендикуляров является центром описанной окружности. От неё вершины треугольника равноудалены, поэтому окружность, построенная с этим центром и радиусом R , проходит через все вершины.

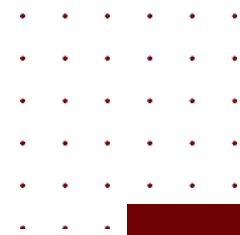
Где расположен центр описанной окружности



В остроугольном треугольнике центр описанной окружности лежит внутри, в прямоугольном — на середине гипотенузы, а в тупоугольном — вне треугольника.

По расположению центра можно сразу понять тип треугольника и выбрать подходящие формулы и схемы построения в задачах.

Сводка по свойствам ортоцентра/центра описанной окружности (школьный курс геометрии), без привязки к конкретным измерениям.



Формулы для описанной окружности

Случай	Формула радиуса	Особенность центра	Важный факт
Произвольный	$R = abc/(4S)$	На пересечении серединных перпендикуляров	Нужны стороны и площадь
Прямоугольный	$R = c/2$	На середине гипотенузы c	Быстро по гипотенузе
Равносторонний	центры совпадают	В центре треугольника	Связь радиусов задаётся специальными соотношениями

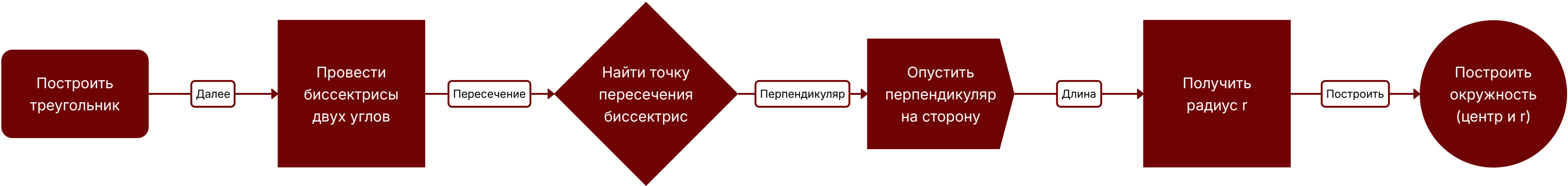
Учебные формулы школьного курса геометрии для треугольников, школьные справочные материалы (без конкретного издания).

Таблица помогает быстро выбрать формулу радиуса R для заданного треугольника и учесть, где расположен центр.

Для вычислений R чаще всего достаточно либо гипотенузы (прямоугольный случай), либо сторон и площади (общий случай); для равностороннего треугольника центры совпадают.

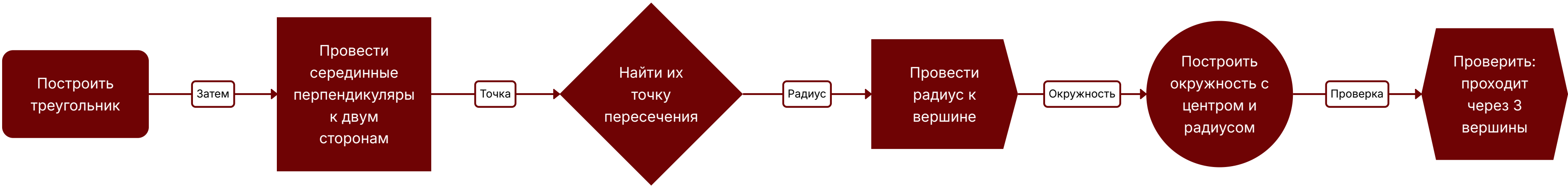
Построение вписанной окружности по шагам

Схема опирается на то, что центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис, а радиус — перпендикуляр до стороны.

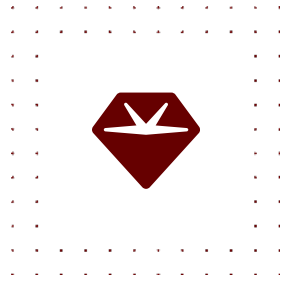


Построение описанной окружности по шагам

Схема использует то, что центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров, а радиус равен расстоянию до любой вершины.



Частные случаи в треугольниках



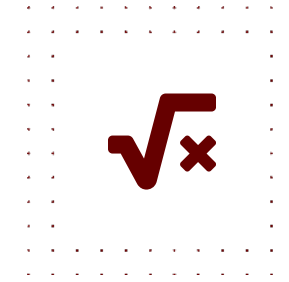
Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают: единственная точка одинаково далеко и от сторон, и от вершин. Поэтому оба радиуса связаны симметрией.



Равнобедренный треугольник

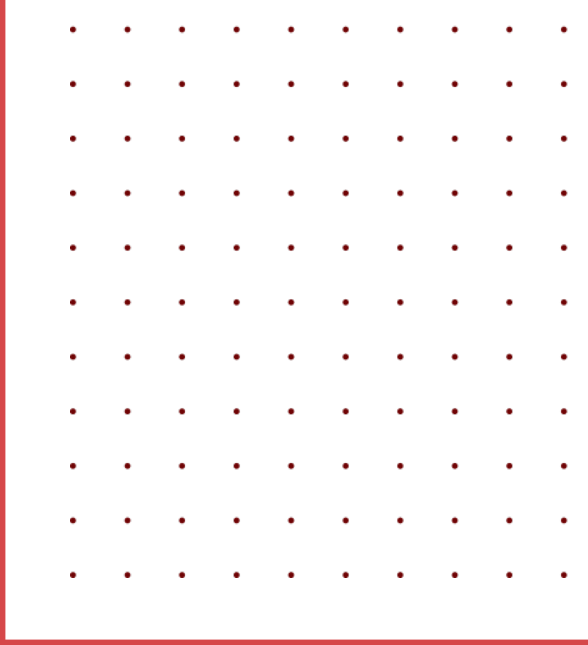
В равнобедренном треугольнике оба центра лежат на оси симметрии: прямой, проходящей через вершину и середину основания. Это упрощает построение и поиск нужных отрезков.



Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности находится в середине гипотенузы. Значит, радиус равен половине гипотенузы, и круг легко построить по одной длине.

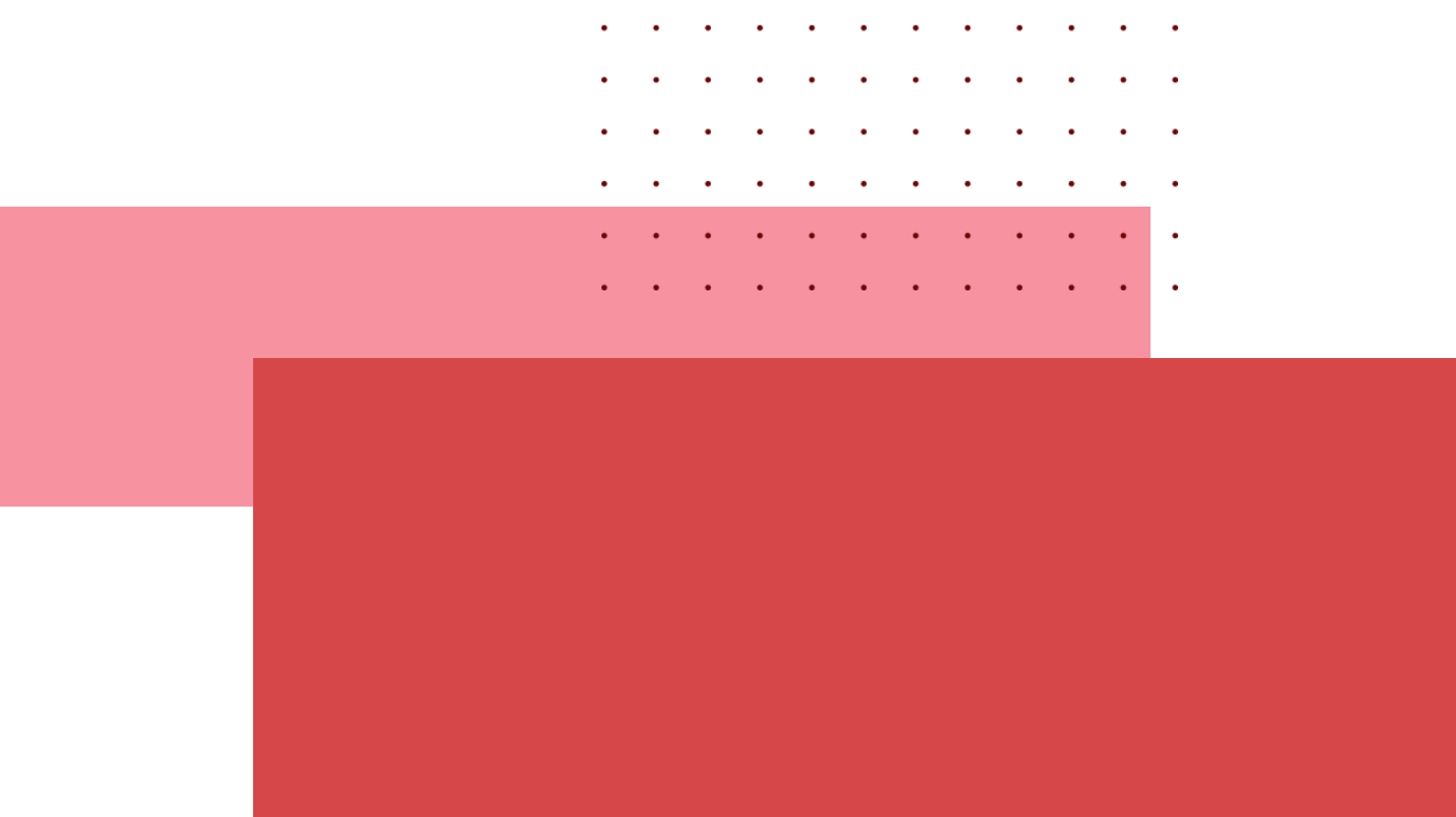
Связь с углами и четырёхугольниками



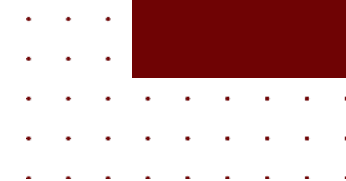
Вписанный угол, который опирается на одну и ту же дугу, в два раза меньше центрального угла, соответствующего этой дуге. Это позволяет быстро переводить один тип углов в другой.

Если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° . Тогда при известной части углов остальное находится сразу.

Эти связи применяют в задачах на поиск углов и коротких доказательствах: достаточно распознать, какие точки лежат на окружности и какая дуга задаёт угол.



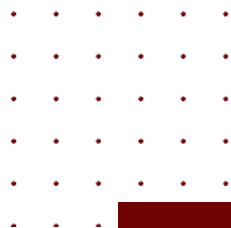
Сравнение вписанной и описанной окружностей



Радиус вписанной окружности связан с расстояниями до сторон, а радиус описанной — с расстояниями до вершин. Поэтому формулы выбирают, исходя из того, какие величины даны.

Если в условии просят касание и площадь — чаще подходит вписанная окружность; если фигурируют вершины и равные расстояния до них — рассматривают описанную.

Обобщение школьных свойств вписанной и описанной окружностей (материал для 8 класса), без конкретных числовых экспериментов.



Типичные ошибки при изучении темы

Часто путают биссектрисы и серединные перпендикуляры: биссектриса делит угол на равные части, а серединный перпендикуляр проходит через середину отрезка и перпендикулярен ему.

Ещё одна ошибка — считать, что центр описанной окружности всегда внутри треугольника. Для прямоугольного он лежит на гипотенузе, а для тупоугольного — вне фигуры.

Путают радиусы: r — радиус вписанной окружности, который относится к расстоянию до сторон, а R — радиус описанной окружности, который относится к расстоянию до вершин.

В задачах на построение иногда берут неверную точку центра. Проверьте: для вписанной окружности нужна точка пересечения биссектрис, а для описанной — пересечение серединных перпендикуляров.

Опорные факты для решения задач

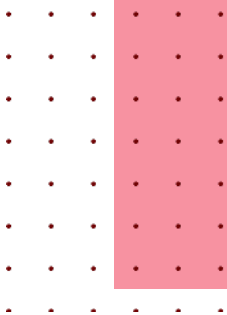
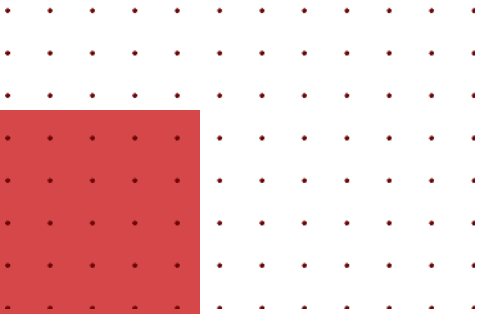


Таблица подсказывает, какую окружность выбрать: вписанную — когда работают с касаниями и площадью, описанную — когда нужны вершины и угловые связи.

Правильный выбор окружности сокращает решение: одна и та же геометрическая задача обычно связывается либо с расстояниями до сторон, либо с расстояниями до вершин.

Объект	Центр	Главное свойство	Где применяется
Вписанная окружность	пересечение биссектрис	равные расстояния до сторон	площадь, касания
Описанная окружность	пересечение серединных перпендикуляров	равные расстояния до вершин	построение, углы

Сборник базовых свойств вписанной и описанной окружностей из школьного курса геометрии (без привязки к конкретному изданию).



Уверенный шаг в треугольную геометрию

Вписанная окружность связана со сторонами треугольника, а описанная — с его вершинами. Центр вписанной окружности находят через биссектрисы, а центр описанной — через серединные перпендикуляры. Формулы и свойства помогают решать построения, вычисления и доказательства в геометрии 8 класса.