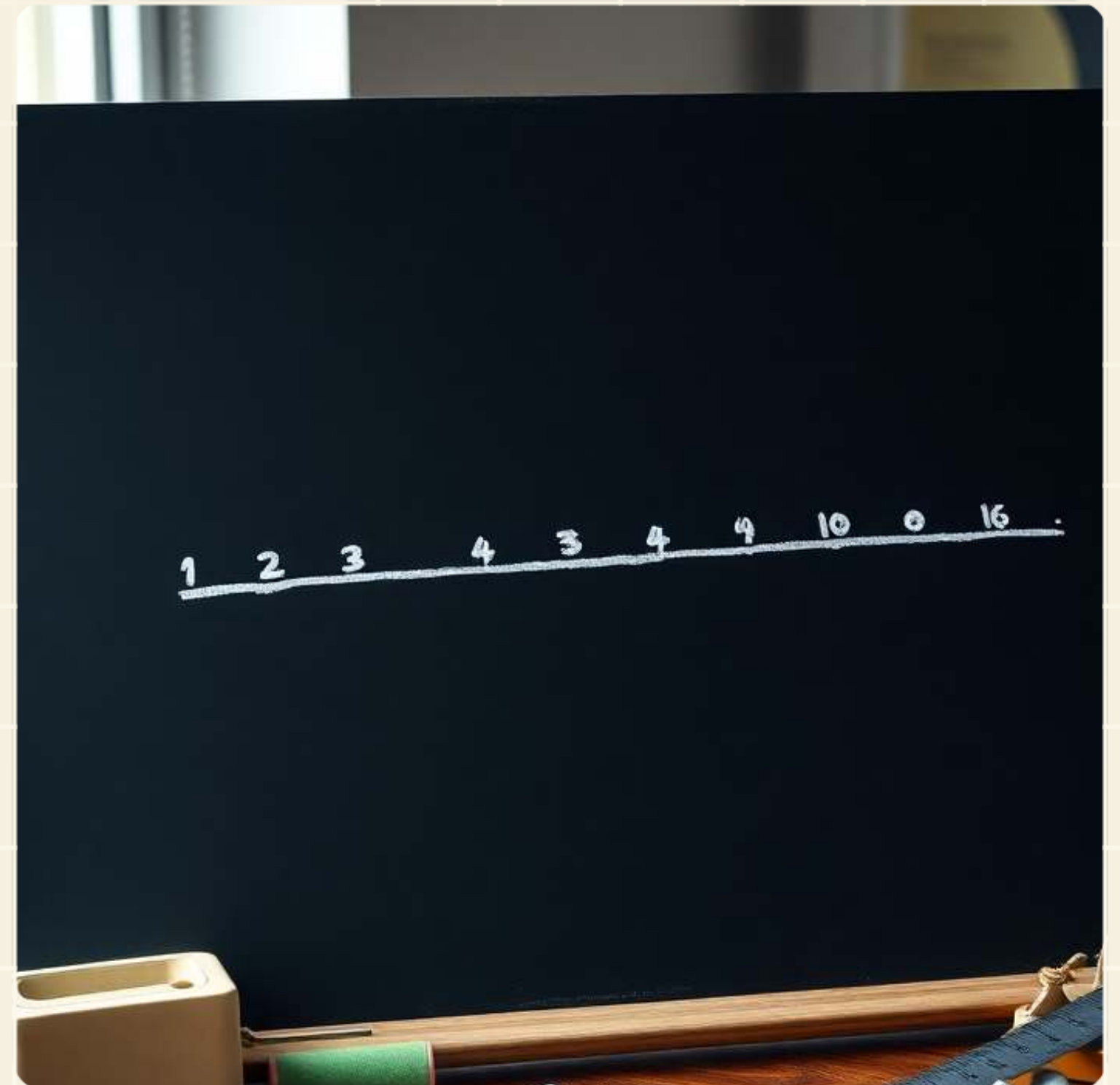




Действительные числа: основа числовой линии в алгебре

Все точки числовой прямой
подчиняются правилам действительных
чисел.



Зачем в алгебре нужны действительные числа

Действительные числа расширяют привычные числовые множества и позволяют точно описывать измерения, сравнивать величины, строить графики и решать уравнения, где целых или рациональных ответов уже недостаточно.



Основные числовые множества и их связь

- Сравнение изучаемых числовых множеств показывает их иерархию и место в системе $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ объединяет рациональные и иррациональные числа; все остальные множества входят в него по включению.

Множество	Пример	Связь
$\mathbb{N}$	5	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	-3	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$	$2/7$	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Иррациональные	$\sqrt{2}, \pi$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



Рациональные числа: запись в виде дроби

01

Определение

Рациональное число можно представить в виде p/q , где p и q — целые числа, а q не равно нулю. Это ключевой критерий школьной классификации.

03

Десятичная запись

Рациональные числа имеют конечную или периодическую десятичную запись. Примеры: 0,75; 0,125; 0,333...; 0,4(7). Повторяемость делает дробь распознаваемой.

02

Целые числа тоже рациональны

Любое целое число имеет дробную запись с знаменателем 1: например, $-8 = -8/1$, $0 = 0/1$, $5 = 5/1$. Поэтому целые входят в множество рациональных.

04

Практический признак

Если число можно точно записать как отношение двух целых чисел, оно рационально. Этот признак удобен при проверке ответов и преобразовании выражений.

Иррациональные числа: бесконечная непериодическая запись

01 Главный признак

Иррациональное число нельзя представить в виде дроби p/q . Его десятичная запись бесконечна, но в ней не выделяется повторяющийся период.

02 Известные примеры

К иррациональным числам относятся $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и e . Они часто встречаются в геометрии, анализе и формулах, связанных с окружностью и ростом.

03 Геометрический смысл

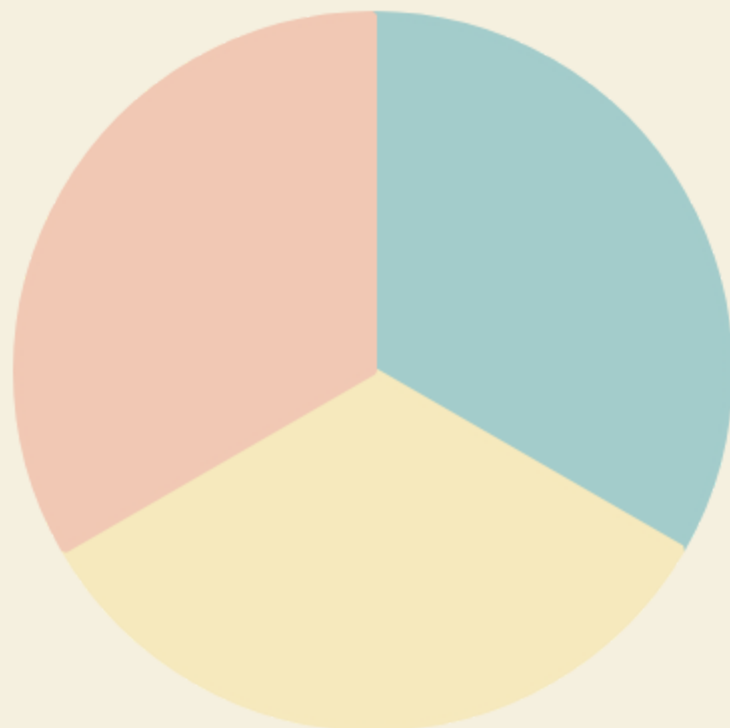
Диагональ квадрата со стороной 1 имеет длину $\sqrt{2}$, а длина окружности выражается через π . Поэтому иррациональные числа естественно возникают из точных геометрических соотношений.

04 Как их используют

В школьных вычислениях иррациональные числа обычно записывают точно или заменяют приближением. Это позволяет выполнять расчёты, не теряя смысла исходной величины.

Виды десятичных записей чисел

■ Конечная десятичная
■ Периодическая десятичная
■ Бесконечная непериодическая



- Тип записи помогает быстро отличить рациональные числа от иррациональных, особенно при работе с дробями и корнями.
- Конечная и периодическая запись указывают на рациональность; бесконечная непериодическая запись — на иррациональность.

Учебные примеры по теме «Действительные числа»



Каждой точке — число

На числовой прямой каждое действительное число соответствует единственной точке, а каждая точка — некоторому числу. Это делает прямую удобной моделью множества $\mathbb{R}$.



Порядок чисел

Чем правее расположена точка, тем больше число. Поэтому сравнение чисел на прямой становится наглядным и не требует сложных вычислений в каждом случае.



Знаки относительно нуля

Положительные числа находятся справа от 0, отрицательные — слева. Ноль служит началом отсчёта и границей между двумя частями числовой прямой.



Рациональные и иррациональные вместе

На одной прямой соседствуют дроби, целые числа и иррациональные значения, например $\sqrt{2}$ и π . Это показывает, что множество $\mathbb{R}$ непрерывно и охватывает все точки.



Числовая прямая как модель множества $\mathbb{R}$

Как определить, к какому виду относится число



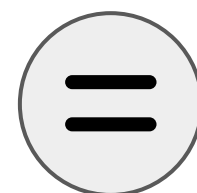
Схема основана на признаках записи числа и его принадлежности к основным числовым множествам.

Сравнение действительных чисел



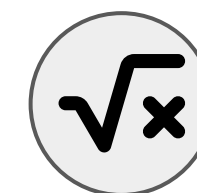
Положение на прямой

Основное правило сравнения простое: большее число расположено правее на числовой прямой. Этот способ универсален и одинаково работает для целых, дробей и иррациональных значений.



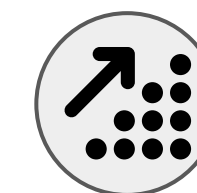
Дроби и преобразования

Для рациональных чисел часто удобно привести дроби к общему знаменателю, перевести их в десятичную форму или сравнить с опорными значениями. Выбор зависит от вида записи.



Иррациональные числа

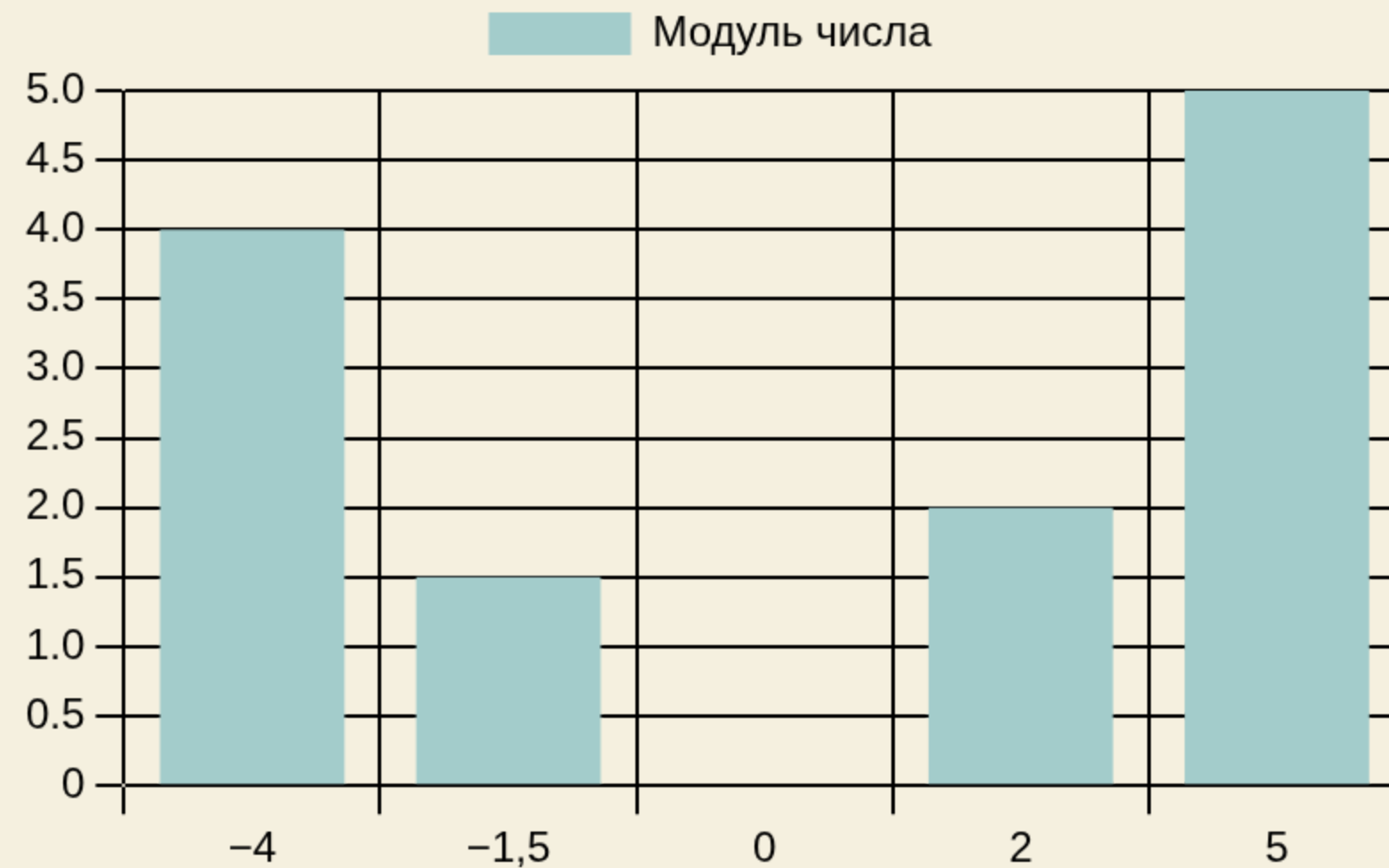
Для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и подобных чисел используют приближённые значения. Так сравнение становится практичным, хотя исходное число остаётся заданным точно.



Смысл сравнения

Знак не зависит от формы записи. Важно числовое значение, а не то, выглядит ли число как дробь, корень или десятичная запись.

Модуль числа как расстояние до нуля



- Модуль используется при описании расстояний, отклонений и величин без знака, поэтому часто встречается в задачах на координатной прямой.
- Модуль делает отрицательные и положительные числа сопоставимыми по расстоянию от нуля; значение всегда неотрицательно.

Школьный курс алгебры 10 класса

Интервалы и запись промежутков

01

Что такое промежуток

Интервал задаёт все значения переменной между двумя границами и позволяет записать ответ компактно. Такой способ особенно удобен, когда решений много и перечислять их по отдельности неудобно.

03

Виды интервалов

Открытые, закрытые и полуоткрытые промежутки отличаются тем, входят ли концы в множество решений. В записи с бесконечностью всегда используют круглую скобку, потому что бесконечность не является числом.

02

Скобки и границы

Круглые скобки означают, что граница не включается в промежуток, а квадратные — что включается. Поэтому запись $(0; 5]$ описывает числа больше нуля, но не больше пяти, включая 5.

04

Где применяются

Интервалы используют при решении неравенств, указании области допустимых значений и описании ограничений в задачах. Они помогают сразу увидеть весь допустимый диапазон значений переменной.

05

Удобство записи

Один короткий символический вид заменяет длинный список чисел и делает ответ наглядным. Поэтому интервальная запись стала стандартным языком школьной алгебры и анализа.

Точные и приближённые значения



Точное	Приближённо	До десятых	Погрешность
$\sqrt{2}$	1,414...	1,4	$\approx 0,014$
π	3,1416...	3,1	$\approx 0,042$
$1/3$	0,333...	0,3	$\approx 0,033$

- Таблица показывает, как точное число переходит в приближённое
- запись при округлении до десятых и как оценивается абсолютная погрешность.

- Приближение удобно для вычислений, но точность зависит от числа знаков после запятой. Абсолютная погрешность помогает понять, насколько результат близок к исходному значению.
-

Школьные примеры действительных чисел; округление до десятых.

Числа в измерениях и на координатной плоскости



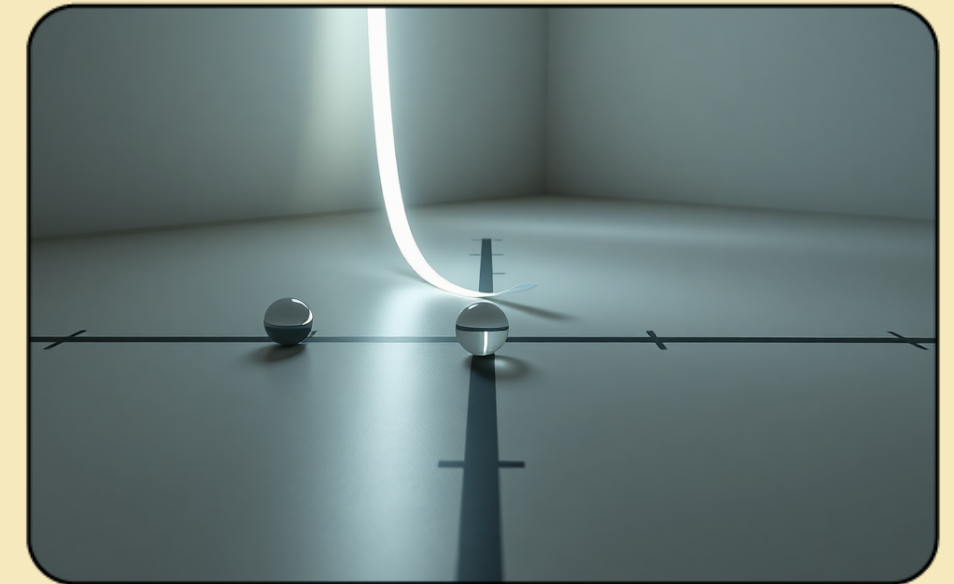
Линейка и рулетка

На практике действительные числа появляются уже в обычных измерениях длины. Результат почти всегда записывают приближённо, потому что прибор имеет ограниченную точность, а значение нельзя узнать абсолютно точно.



Время, масса, температура

Те же числа описывают время, массу, температуру и скорость. В реальных задачах удобно сравнивать данные, переводить единицы и анализировать изменения, не выходя за рамки множества $\mathbb{R}$.

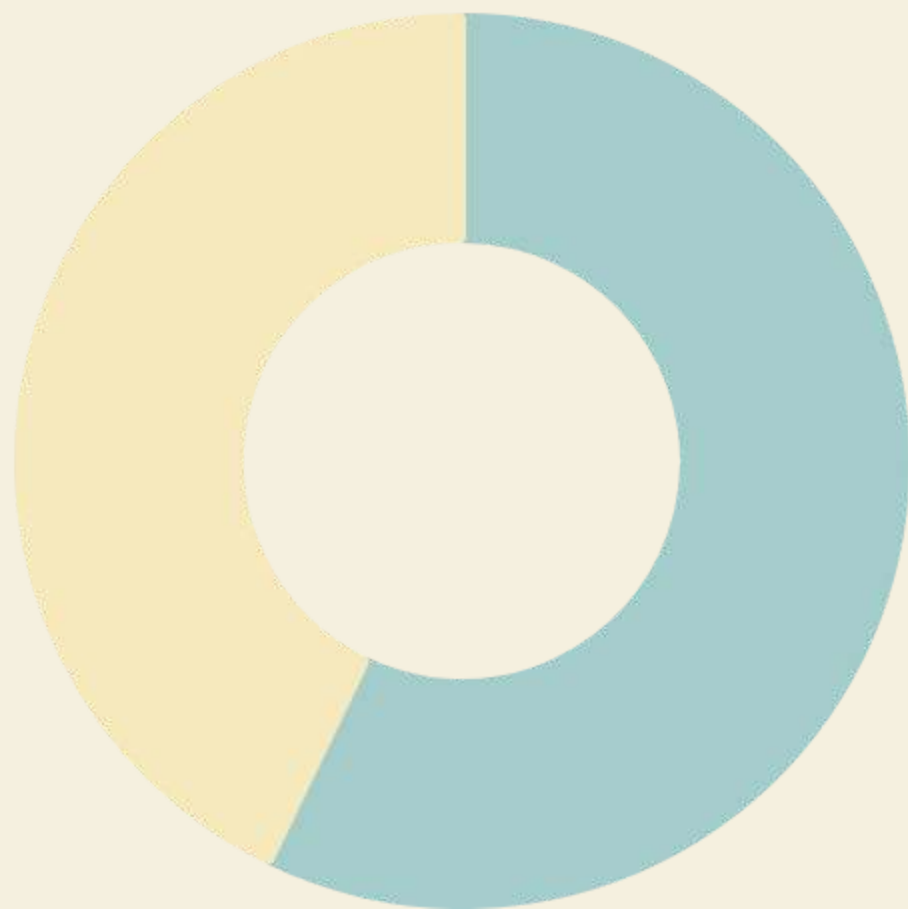


Точки и графики

На координатной плоскости действительные числа помогают задавать точки и читать графики функций. Именно поэтому алгебра связывает вычисления с геометрическим изображением и делает решения наглядными.

Рациональные и иррациональные числа в школьных примерах

Рациональные Иррациональные



- Примеры показывают, что в школьных задачах чаще важна форма записи числа, чем его внешний вид. Одни значения выражаются точно, другие — только приближённо.
-

- Рациональные и иррациональные числа встречаются рядом, но отличаются способом задания. Для решения задач важно быстро распознавать тип числа по записи.
-

Примеры из школьного курса алгебры: $\frac{2}{5}$, -7 , $0,125$, $0,4(7)$, $\sqrt{5}$, π , e .



Свойства действий над действительными числами

Переместительное свойство

При сложении и умножении порядок чисел можно менять местами без изменения результата. Это свойство часто упрощает вычисления и помогает быстрее приводить выражения к удобному виду.

Сочетательное свойство

При группировке слагаемых или множителей результат не меняется, если сохраняется их порядок. Благодаря этому можно по-разному расставлять скобки и выбирать наиболее удобный путь вычисления.

Распределительное свойство

Умножение раскрывает скобки через распределение по каждому слагаемому. Это свойство лежит в основе преобразования многочленов, упрощения формул и раскрытия скобок в уравнениях.

Нейтральные элементы

Ноль не изменяет число при сложении, а единица не изменяет его при умножении. Эти элементы помогают проверять вычисления и строить алгебраические преобразования без лишних шагов.

Противоположное и обратное

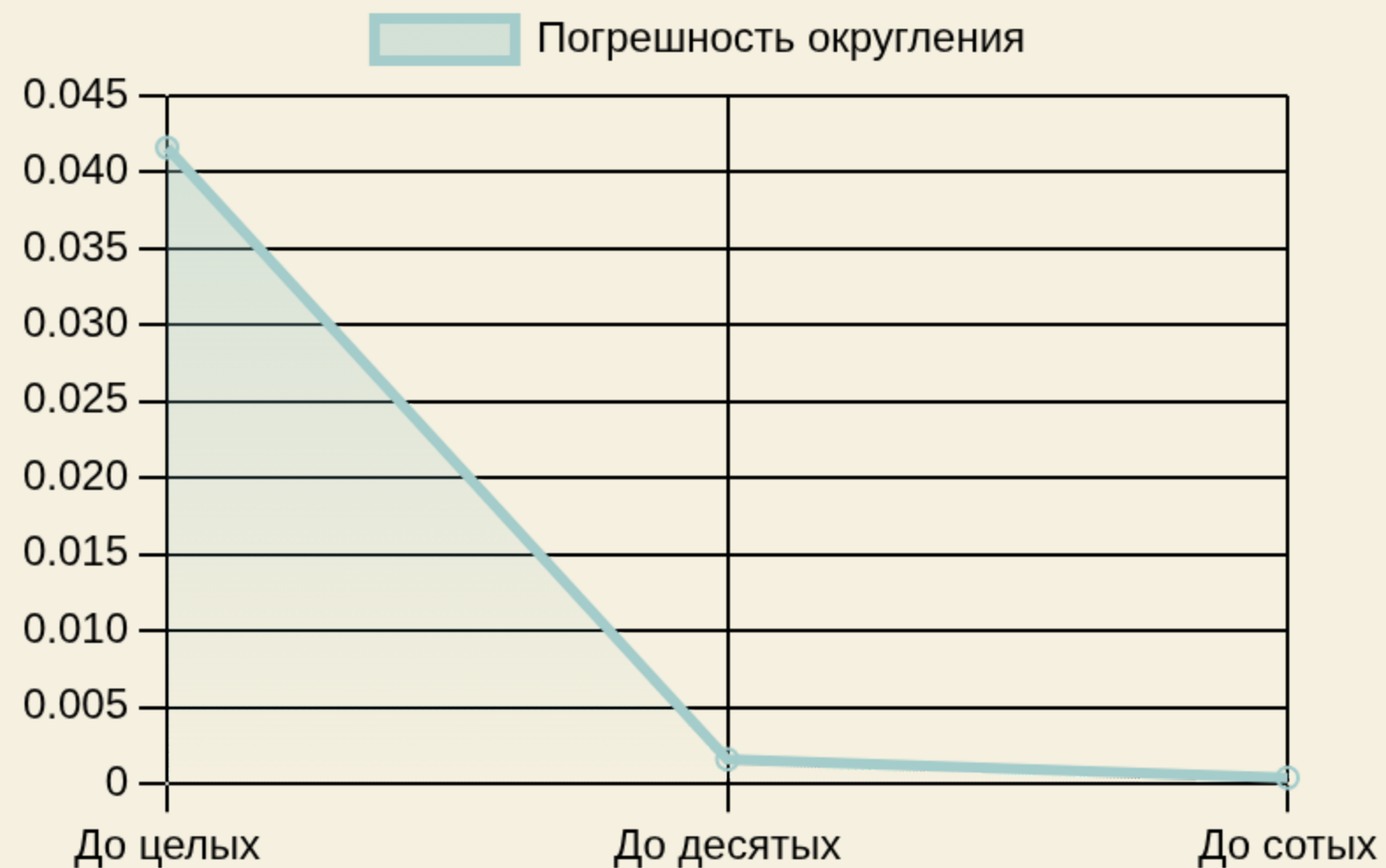
Для любого числа существует противоположное, а для ненулевого — обратное. Именно эти пары позволяют выполнять вычитание через сложение и деление через умножение в алгебраических преобразованиях.

Решение уравнений в множестве R



Схема показывает последовательность равносильных преобразований и обязательную проверку области допустимых значений.

Округление и точность вычислений



- Чем больше знаков сохраняется в записи, тем ближе приближённое число к точному значению. Это особенно важно в задачах, где требуется заданная точность ответа.
- Грубое округление заметно увеличивает ошибку, а уточнение записи уменьшает её. Выбор точности должен соответствовать условию задачи.

Пример на числе π : 3,1; 3,14; 3,142. Ошибка показана относительно 3,1416.

Типичные ошибки при работе с действительными числами



Путаница в классификации

Часто путают рациональные и иррациональные числа, ориентируясь только на длину записи. На самом деле решающим признаком является возможность представить число в виде дроби p/q .



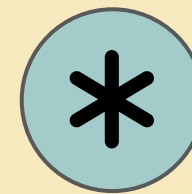
Неверное сравнение

Ошибка возникает, когда дроби сравнивают по числителю или знаменателю без общего основания. Правильно учитывать реальное значение числа, а не только его внешний вид.



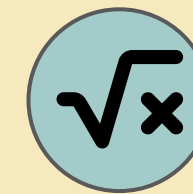
Периодическая запись

Неправильное оформление десятичной дроби приводит к искажению ответа. Нужно чётко различать конечную запись, периодическую дробь и бесконечную непериодическую последовательность.



Модуль и ОДЗ

При раскрытии модуля и определении области допустимых значений легко пропустить знак или запрет на деление на ноль. Из-за этого верное решение может быть потеряно или ошибочно добавлено.



Ошибки с корнями

Выражения $\sqrt{a^2}$ и $\sqrt{(a+b)}$ требуют аккуратности, потому что свойства корня нельзя применять механически. Неверное преобразование часто меняет знак или область допустимых значений.

Сводная характеристика ключевых чисел

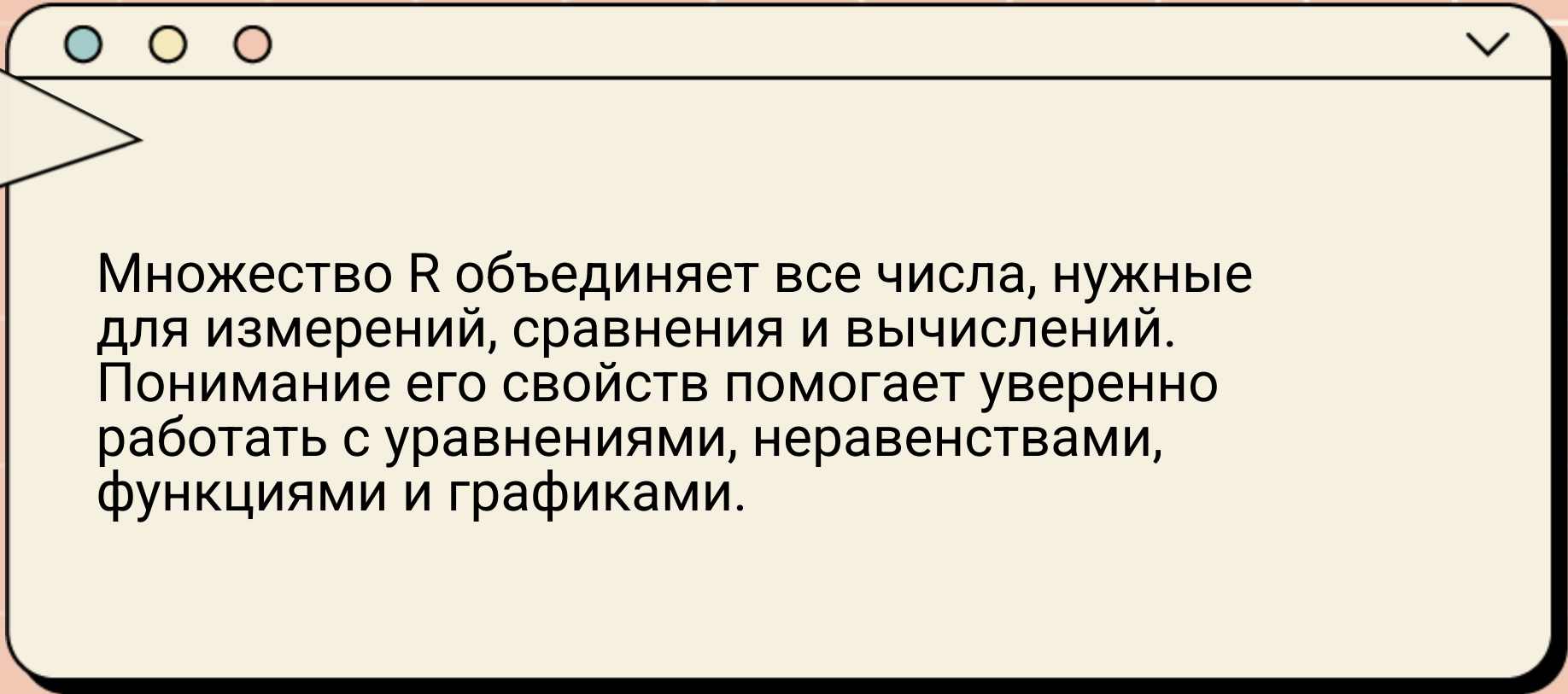
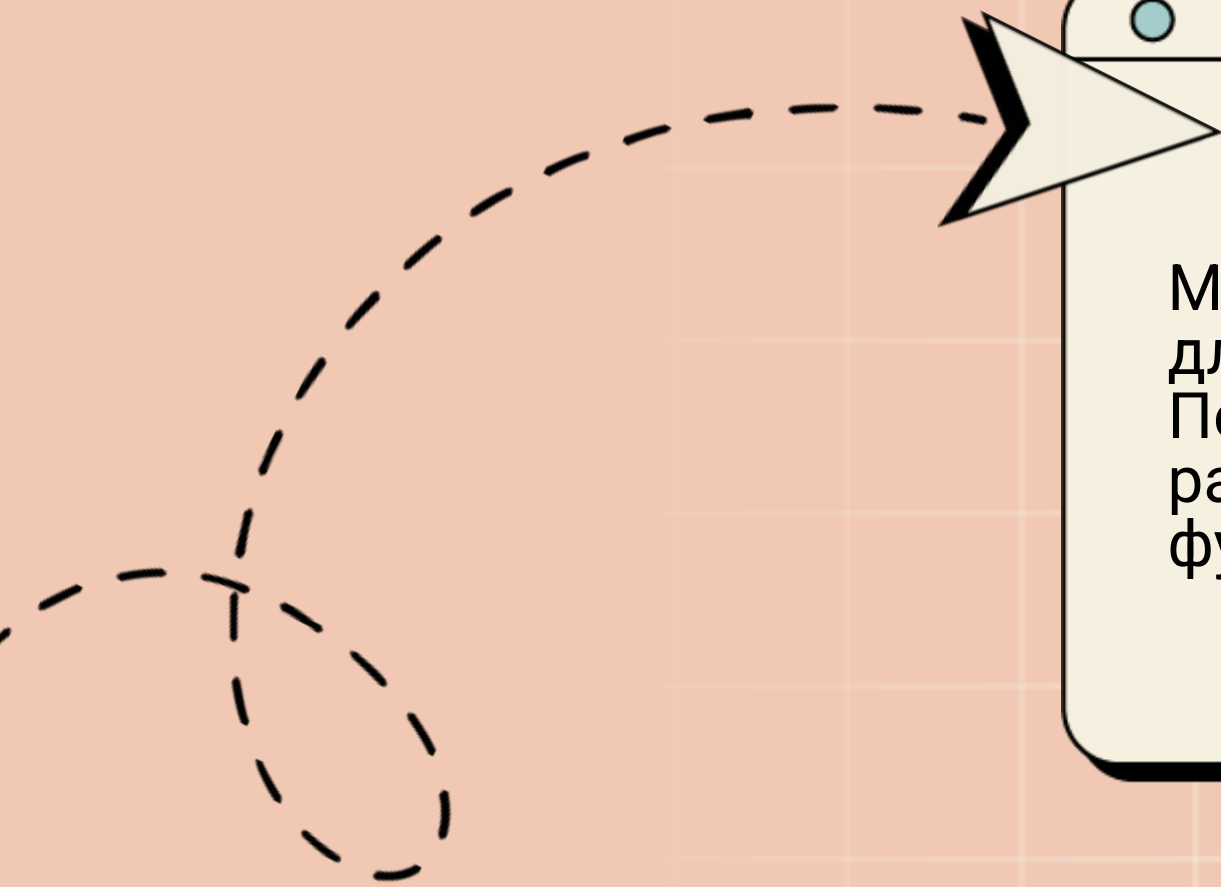
- Таблица объединяет основные примеры и помогает быстро увидеть, к какому множеству относится каждое число и как оно располагается на числовой прямой.
- Все приведённые числа принадлежат множеству действительных чисел, но по-разному записываются и по-разному расположены на прямой. Это важно для сравнения и преобразований.

Число	Множество	Запись	Пример
0	$\mathbb{Z}$	целое	в центре
$\frac{3}{8}$	$\mathbb{Q}$	дробь	между 0 и 1
$\sqrt{2}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	иррацион.	между 1 и 2



Примеры из школьного курса алгебры: 0, -5, $\frac{3}{8}$, $0,4(7)$, $\sqrt{2}$, π .

Действительные числа как основа алгебры 10 класса



Множество $\mathbb{R}$ объединяет все числа, нужные для измерений, сравнения и вычислений. Понимание его свойств помогает уверенно работать с уравнениями, неравенствами, функциями и графиками.

