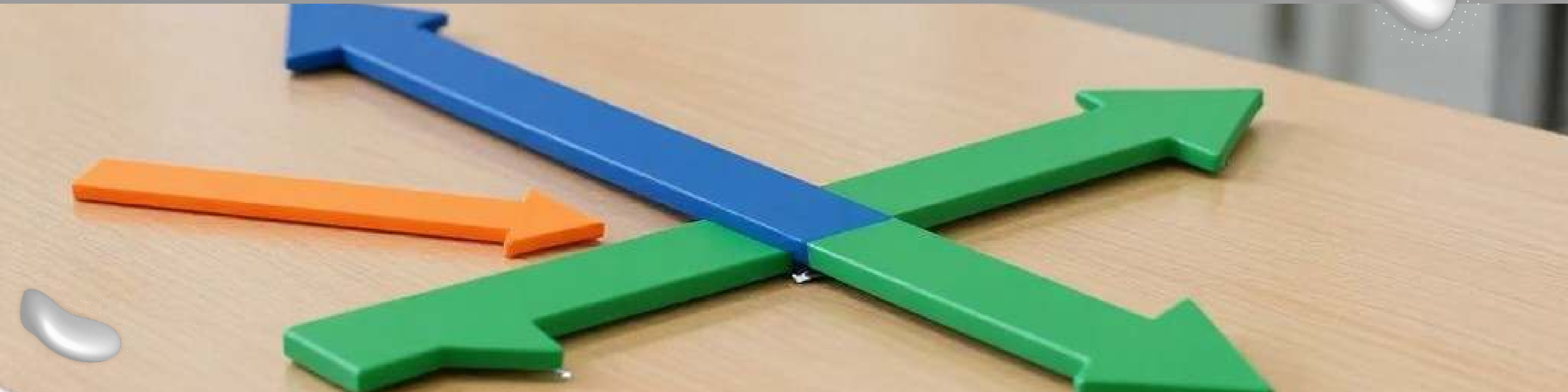


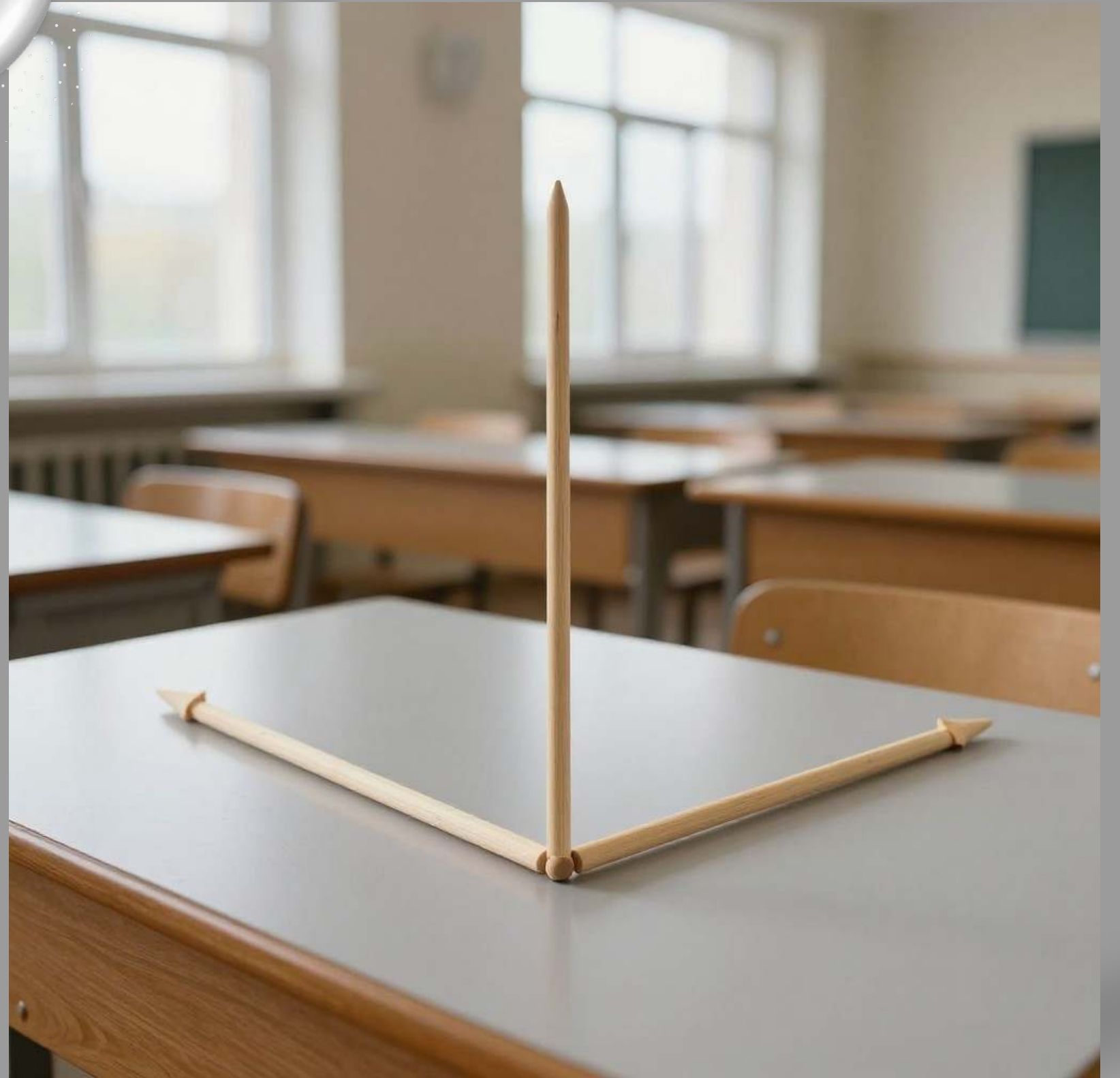
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Научимся выражать один вектор через два других в плоскости и находить коэффициенты разложения.



Зачем разлагать вектор

Разложение помогает решать задачи на координатной плоскости: находить неизвестные отрезки, параметры фигур и проверять утверждения. Идея проста: один вектор удобнее описывать через два выбранных направления.



Неллинеарные векторы и их свойства

1

Два вектора называют неколлинеарными, если они не лежат на одной прямой и ни один из них не является числовым множителем другого. Тогда они задают разные направления в плоскости.

2

Если выбрать такие направления, можно попытаться описать любой вектор через их линейную комбинацию. При этом важно, чтобы оба вектора были ненулевыми: иначе теряется одно из направлений.

3

Для разложения нужны именно два разных «направляющих» вектора. Тогда у коэффициентов появляется однозначный смысл: что именно и в каком масштабе нужно добавить и с какой стороны.

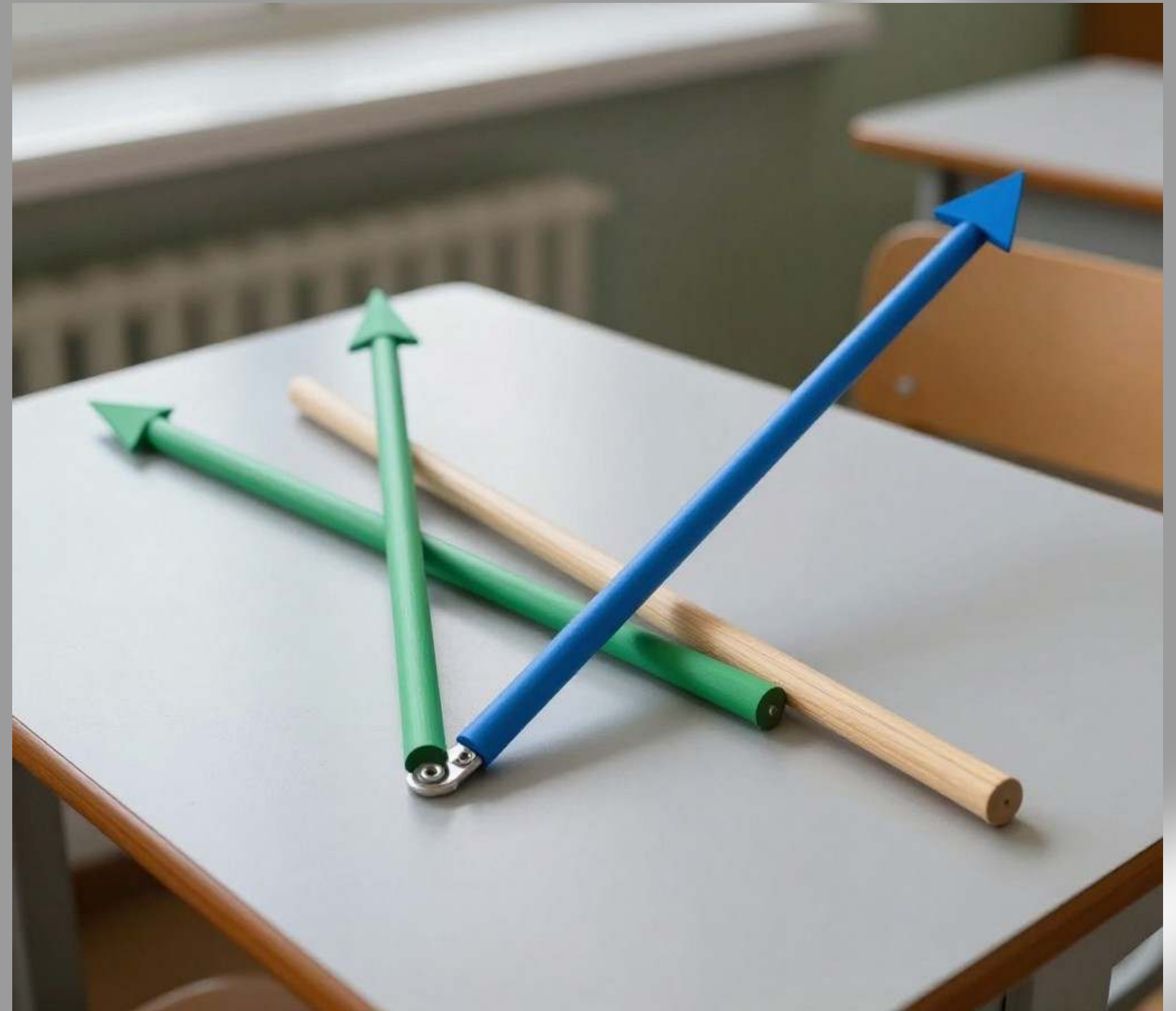
Геометрический смысл разложения

Формула разложения

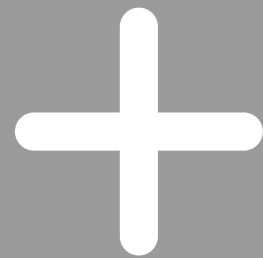
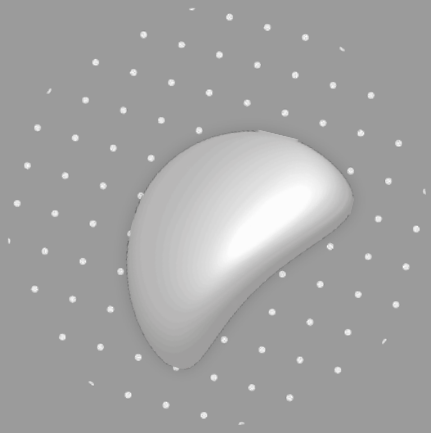
Вектор a можно представить как сумму двух векторов, идущих вдоль неколлинеарных направлений p и q . Тогда пишут $a = x \cdot p + y \cdot q$, где x и y — числа, а не размеры «на глаз».

Параллелограмм на чертеже

На рисунке это соответствует построению параллелограмма: одну сторону откладывают как $x \cdot p$, другую — как $y \cdot q$. Диагональ получается именно равной a , если направления и знаки выбраны верно.



Коэффициенты разложения

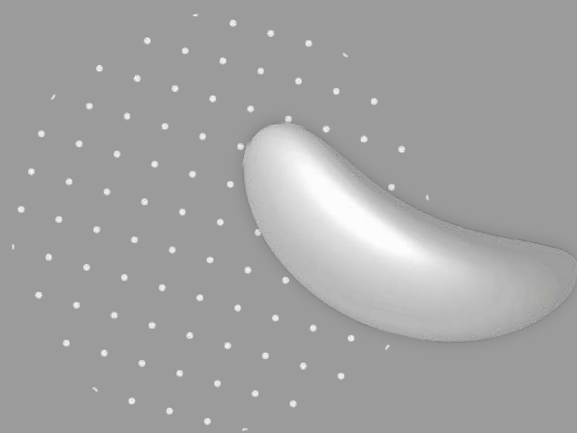
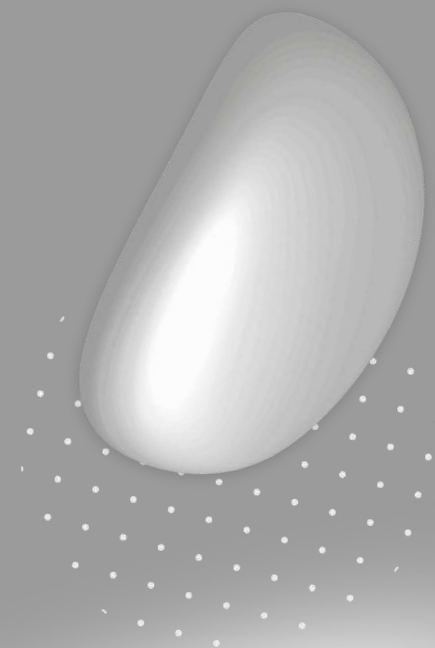


Смысл чисел x и y

Коэффициенты x и y показывают, сколько «единиц» каждого базисного направления входит в разложение. Они относятся к векторам p и q и входят в формулу $a = x \cdot p + y \cdot q$.

Знак коэффициента и направление

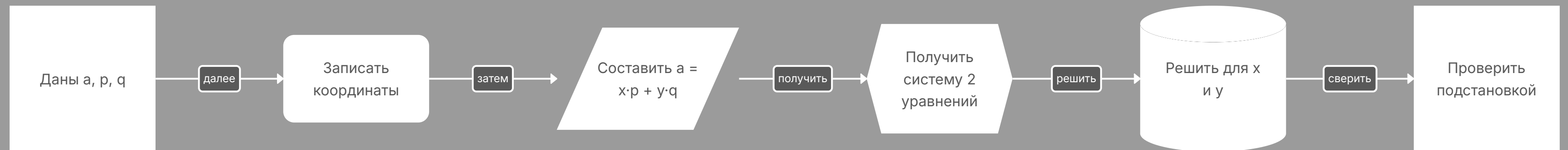
Когда $x > 0$, вклад $x \cdot p$ направлен так же, как p .
При $x < 0$ направление получается противоположным p ; аналогично читается знак для y и вектора q .



Как найти коэффициенты разложения

От координат заданных векторов к системе уравнений для x и y

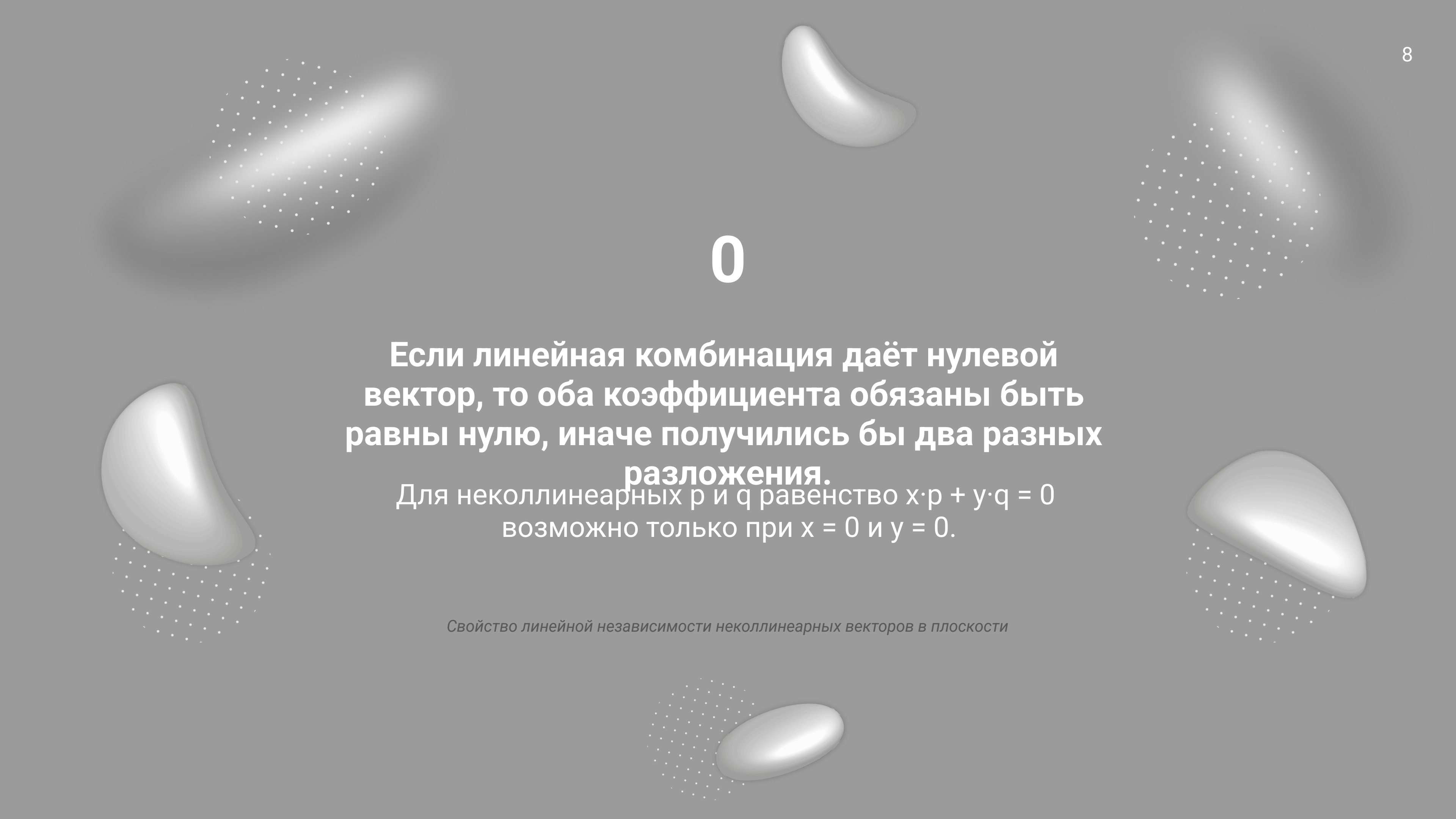
6



Пример разложения в координатах

Вектор	Координаты
a	(5; 3)
p	(2; 1)
q	(1; -1)
Уравнения	$2x + y = 5; x - y = 3$
Ответ	$x = 8/3, y = -1/3$

- Для заданных a, p и q составляем уравнения по формуле $a = x \cdot p + y \cdot q$ и решаем систему.
- Один и тот же вектор a выражается по-разному в зависимости от выбранных неколлинеарных p и q.



0

Если линейная комбинация даёт нулевой вектор, то оба коэффициента обязаны быть равны нулю, иначе получились бы два разных разложения.

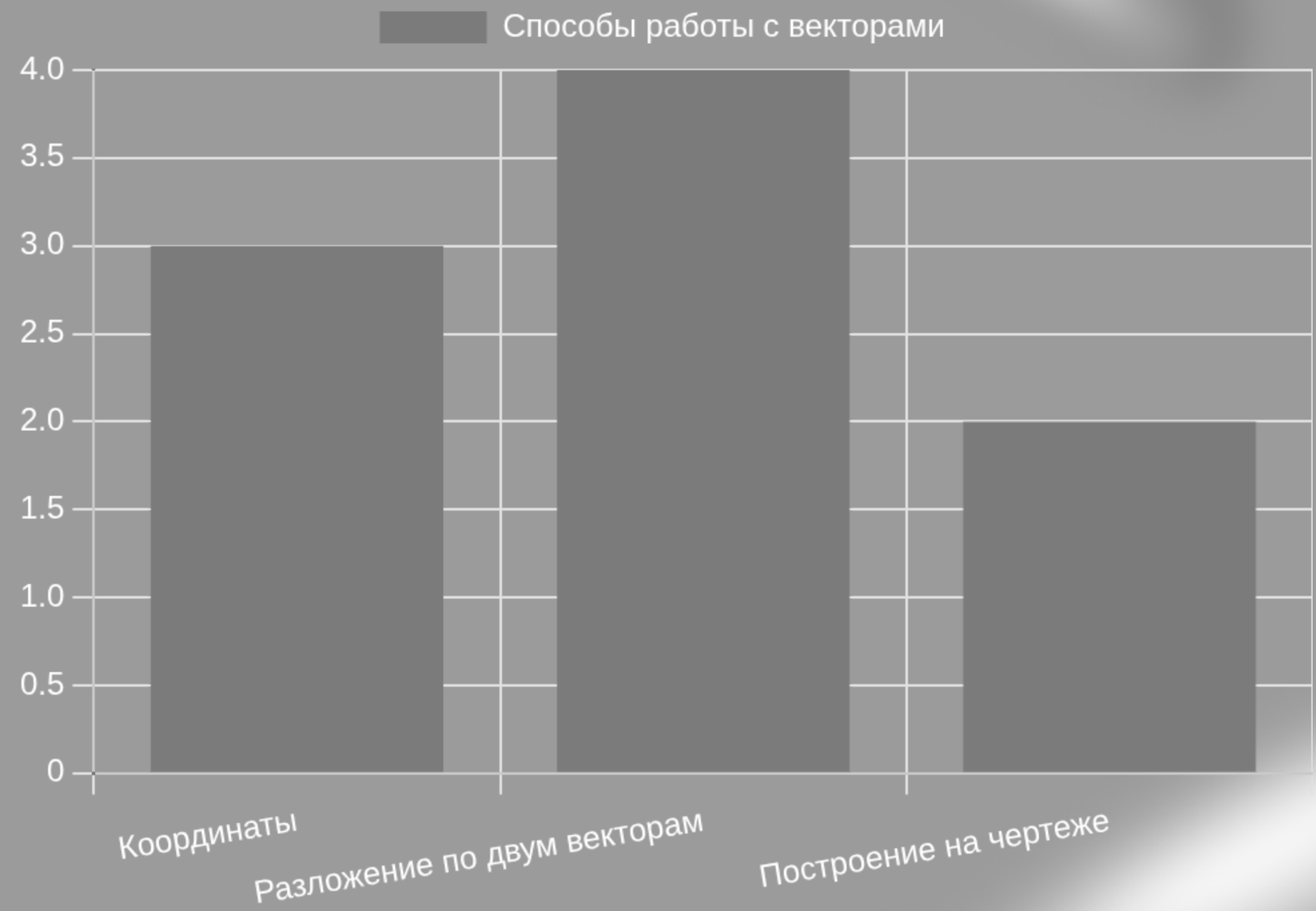
Для неколлинеарных p и q равенство $x \cdot p + y \cdot q = 0$ возможно только при $x = 0$ и $y = 0$.

Свойство линейной независимости неколлинеарных векторов в плоскости

Способы задания вектора и их сравнение

9

- Выбор способа зависит от цели: для вычислений обычно удобнее координаты, а для доказательств — разложение по двум направлениям.
- Разложение связывает геометрию с алгеброй: после него остаётся решить уравнения, а затем сверить результат чертежом.



Связь с координатной плоскостью

10

1

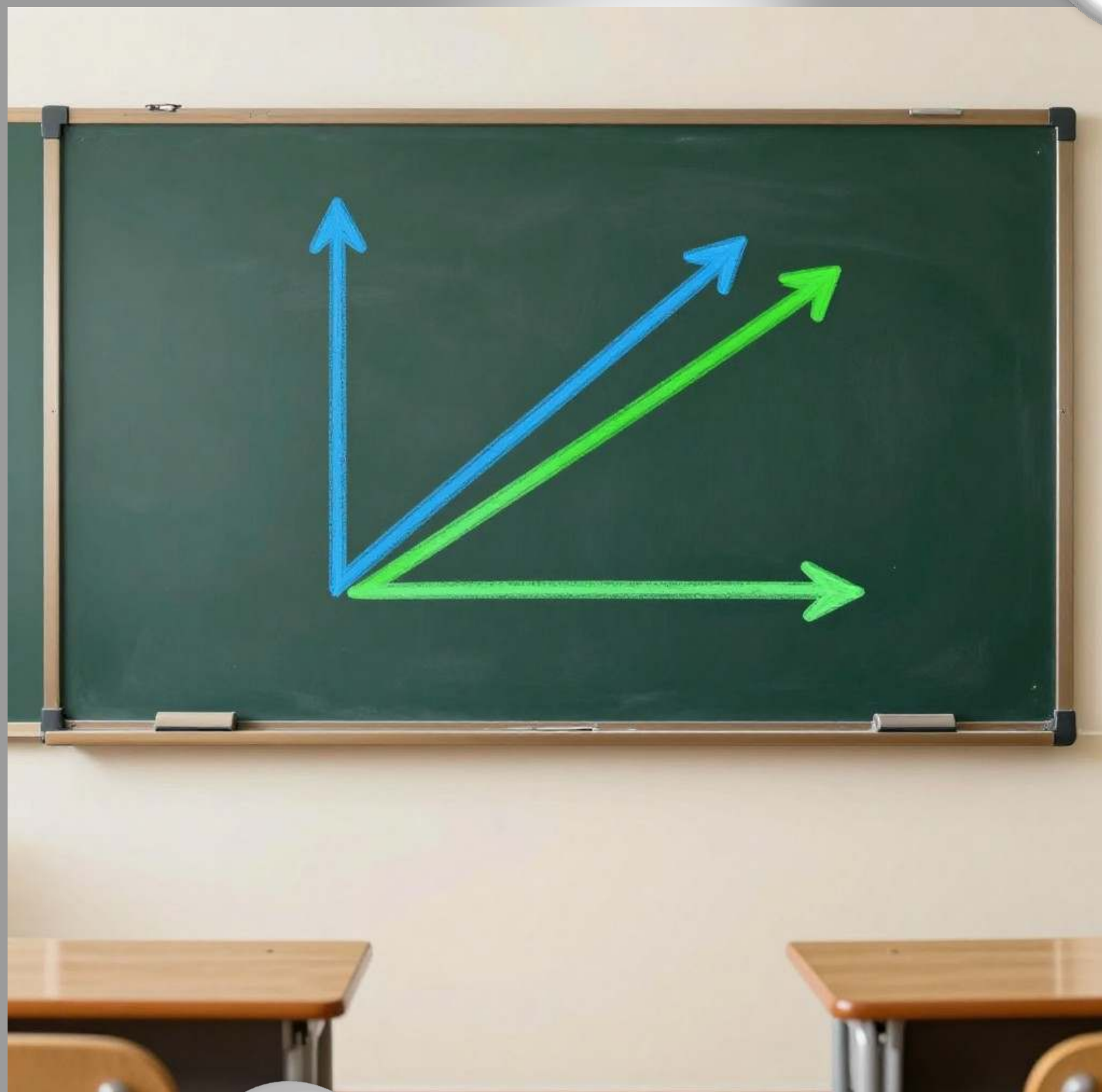
Векторы p и q можно мысленно «поставить» как две оси координат в плоскости. Тогда каждое число x и y отвечает за то, сколько мы берём направления p и q при построении a .

2

Такой базисный подход превращает задачу из геометрии в вычисления. Вместо рисунка достаточно составить уравнение $a = x \cdot p + y \cdot q$ и выразить x и y через координаты.

3

В итоге многие геометрические вопросы сводятся к решению системы двух линейных уравнений. Это помогает системно проверять решения и избегать ошибок со знаками и направлением.



Параллелограмм как модель суммы векторов

- 1 Если из одной точки отложить векторы p и q , то получится параллелограмм. Его диагональ, направленная из исходной точки, равна сумме $p + q$, поэтому совпадает по направлению с нужным вектором.
- 2 Чтобы разложить вектор a , мысленно подбирают такие x и y , чтобы $a = x \cdot p + y \cdot q$. На чертеже это выглядит как построение двух «составляющих» вдоль p и q и проверка совпадения диагонали с a .

Знаки коэффициентов разложения

12

1

Коэффициент x показывает, сколько раз и в каком направлении используется вектор p . Если $x > 0$, то $x \cdot p$ направлен так же, как p ; если $x < 0$, то направление противоположно.

2

Аналогично коэффициент y управляет вектором q : при $y > 0$ берётся направление q , при $y < 0$ — противоположное. По знаку сразу видно, «в какую сторону» смещается составляющая на плоскости.

3

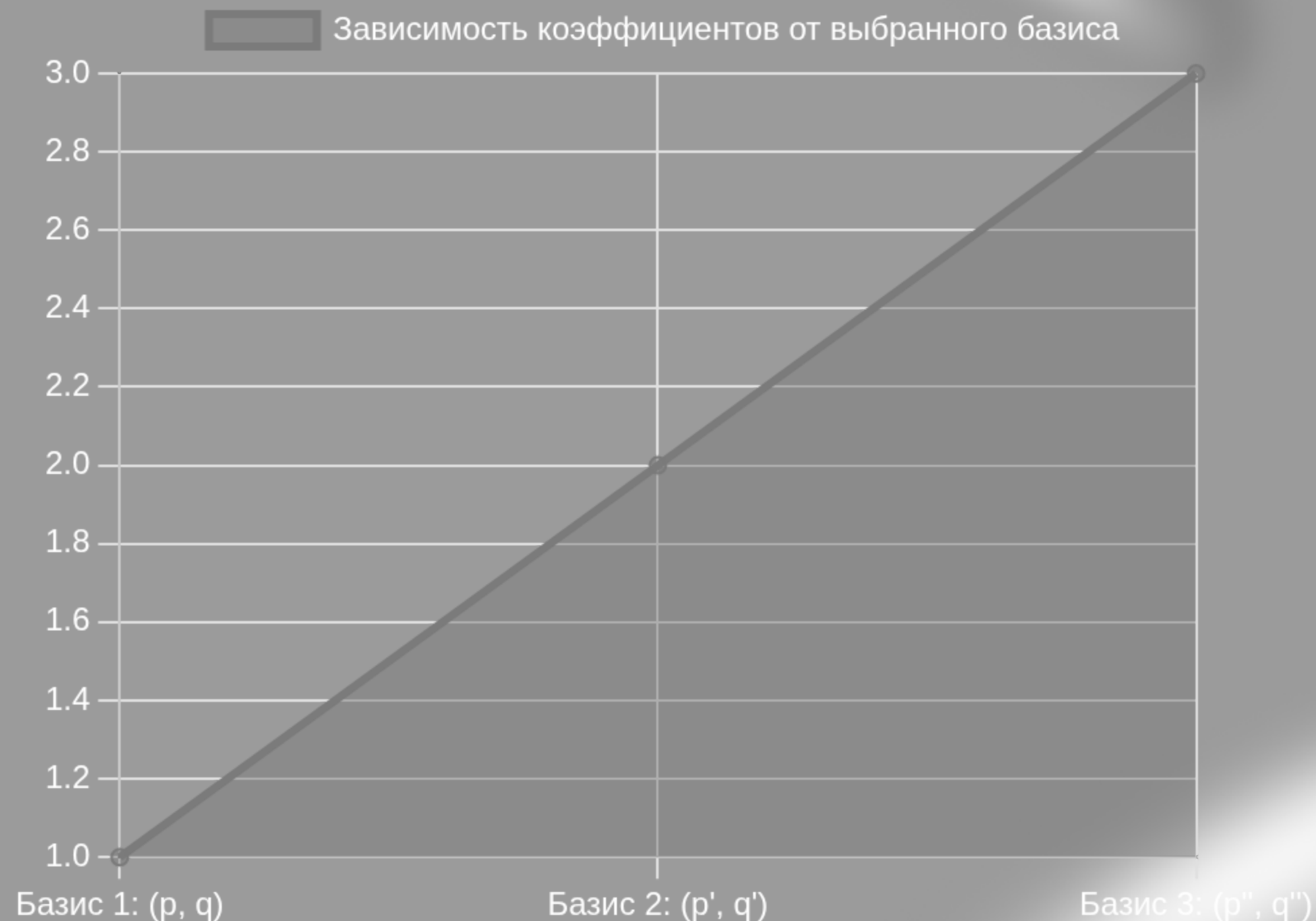
Нулевой коэффициент означает, что соответствующая составляющая отсутствует: например, при $x = 0$ вектор a получается только из $y \cdot q$. Это удобно для задач, где одна координатная «ось» не влияет на результат.

4

Проверка знаков особенно важна, когда векторы направлены в разные стороны: одна неправильно поставленная «минус-смена» меняет направление диагонали на чертеже и приводит к неверной системе уравнений.

Как меняются коэффициенты при выборе других векторов

- Один и тот же вектор a может иметь разные пары коэффициентов x и y , если поменять базисные неколлинеарные векторы p и q .
- По диаграмме видно: меняется именно разложение на составляющие, а сам вектор a остаётся неизменным. Следовательно, коэффициенты зависят от выбранных направлений, а не только от a .



Материал для иллюстрации зависимости коэффициентов от базиса; точные численные значения не заданы, так как диаграмма концептуальная.

Типичная ошибка: коллинеарные векторы

Попытка разложения

Записывают $a = x \cdot p + y \cdot q$, будто это базис.
Но при коллинеарности система становится вырожденной: коэффициенты не определяются однозначно.

Выбор векторов-основ

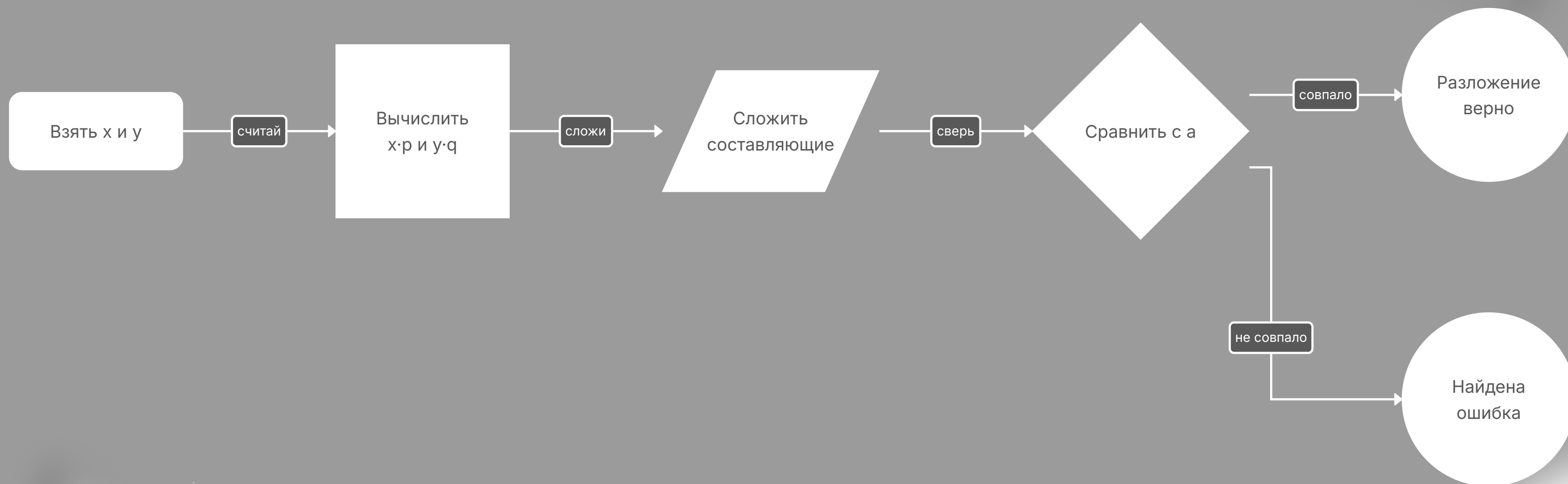
Учащийся берёт два вектора p и q , которые лежат на одной прямой. В этом случае они задают только одно направление на плоскости, и «второго независимого» направления нет.

Неожиданный результат

В координатной записи может не быть решений или появляться бесконечно много решений. Это и служит признаком того, что нужно заменить один из векторов на неколлинеарный.

Проверка разложения вектора по двум векторам

Последовательность действий для контроля правильности коэффициентов x и y по формуле $a = x \cdot p + y \cdot q$



Несколько коротких примеров

- В каждом случае используется один и тот же принцип: искать числа x и y так, чтобы $a = x \cdot p + y \cdot q$. Для разных базисов получаются разные коэффициенты.
- Алгоритм работает одинаково: сначала строится равенство $a = x \cdot p + y \cdot q$, затем находятся x и y . Для разных пар базисных векторов коэффициенты различаются.

Случай	Данные (а, р, q)	Результат
1	$a=(4;2), p=(1;0), q=(1;1)$	$x=2, y=2$
2	$a=(3;-1), p=(2;1), q=(1;-1)$	$x=2/3, y=1/3$
3	$a=(0;5), p=(1;2), q=(2;-1)$	x, y через систему

Применение в геометрии и физике



Геометрические задачи

В геометрии разложение помогает работать с диагоналями параллелограмма, серединами отрезков и координатами точек. Оно упрощает доказательства и позволяет точнее переходить к вычислениям.



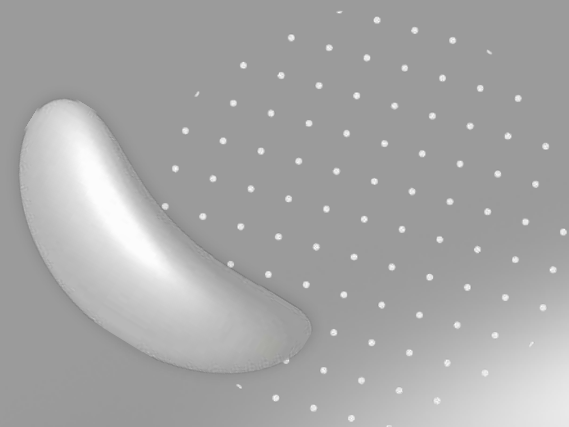
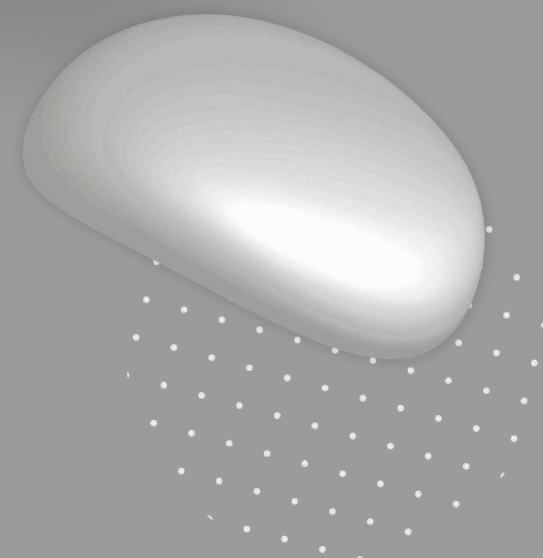
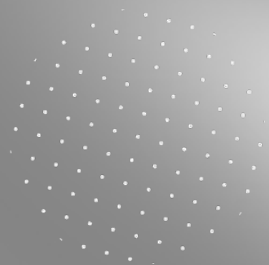
Движение и траектории

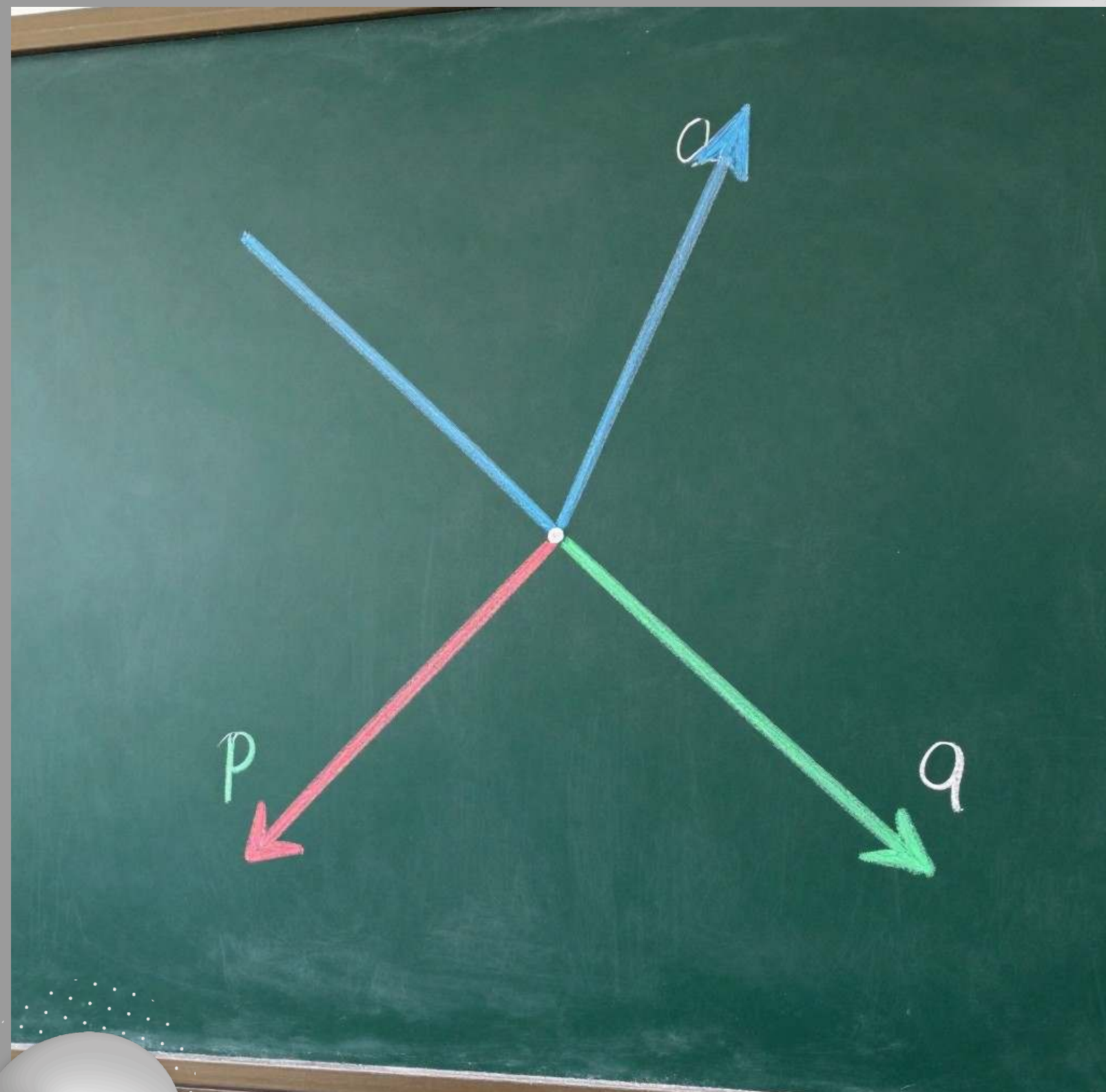
При решении задач о перемещениях в плоскости вектор скорости или перемещения можно разложить на составляющие по двум направлениям. Так проще находить итоговый результат по правилу сложения векторов.



Силы в физике

В физике часто требуется разложить силу на две составляющие — например, горизонтальную и вертикальную. Это позволяет применять законы движения отдельно к каждому направлению.





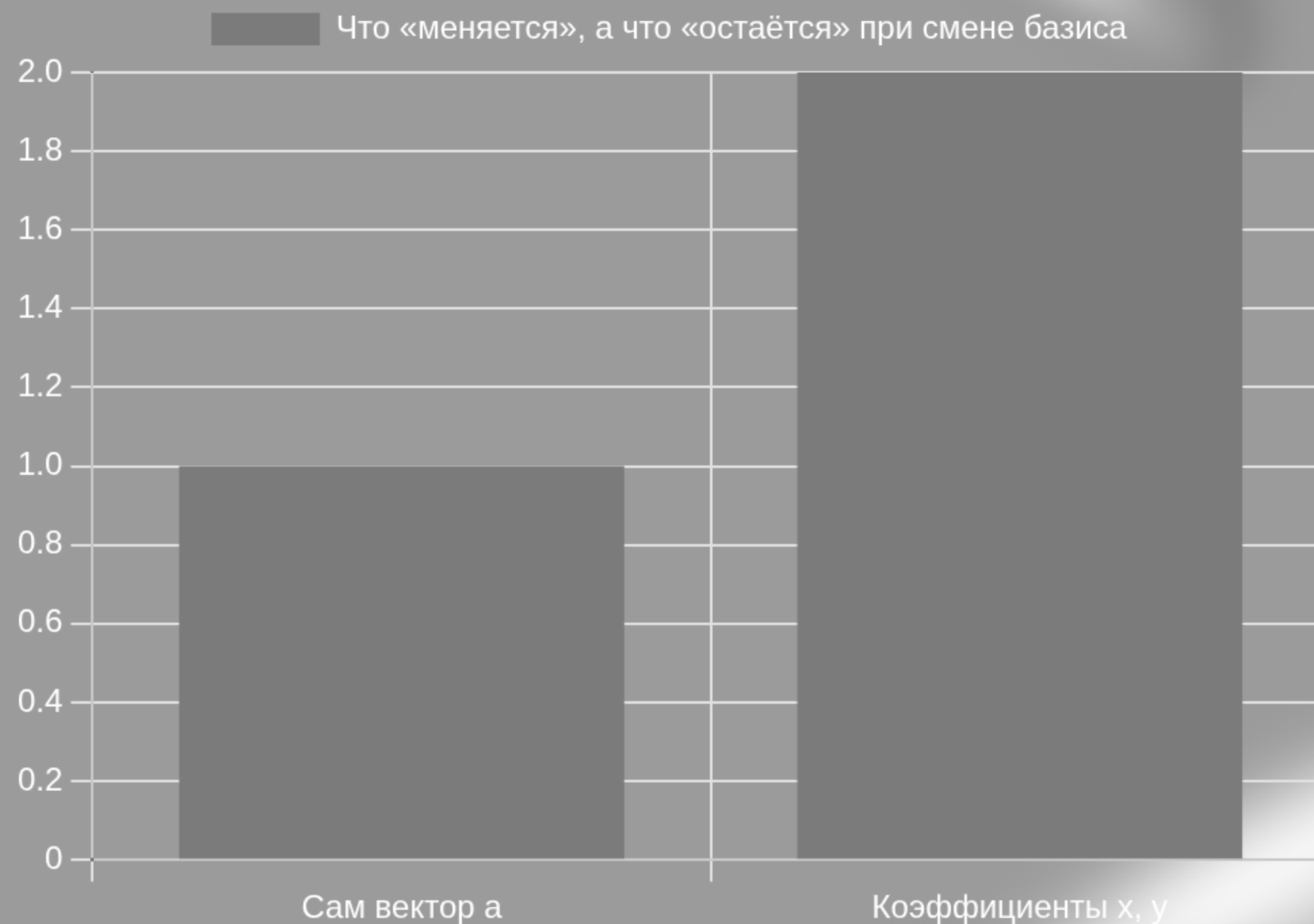
Графическая проверка на чертеже

- На рисунке важны начальная точка и направления стрелок. Затем строят составляющие вдоль заданных p и q (используя их параллельный перенос), чтобы получить $x \cdot p$ и $y \cdot q$, а затем их сумму.
- Если всё сделано верно, итоговый вектор на чертеже совпадает по направлению и по координатам с исходным a . Такой способ помогает сопоставить вычисления с геометрией и вовремя заметить ошибку в знаках.

Итоги изучения темы

19

- Смена базисных векторов меняет разложение на составляющие, но не меняет сам исходный вектор a . Это ключевая идея при работе в координатном подходе.
- Диаграмма подчеркивает различие между неизменной геометрической величиной и зависящими от базиса коэффициентами. Значит, нужно внимательно фиксировать выбранные p и q .



Концептуальная диаграмма (масштаб условный), отражающая качественную зависимость коэффициентов от базиса.

Главный вывод урока

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам — один из базовых способов работы с векторами в геометрии 9 класса. Оно опирается на понятие базиса, даёт единственный ответ и связывает геометрию с координатами и уравнениями.