

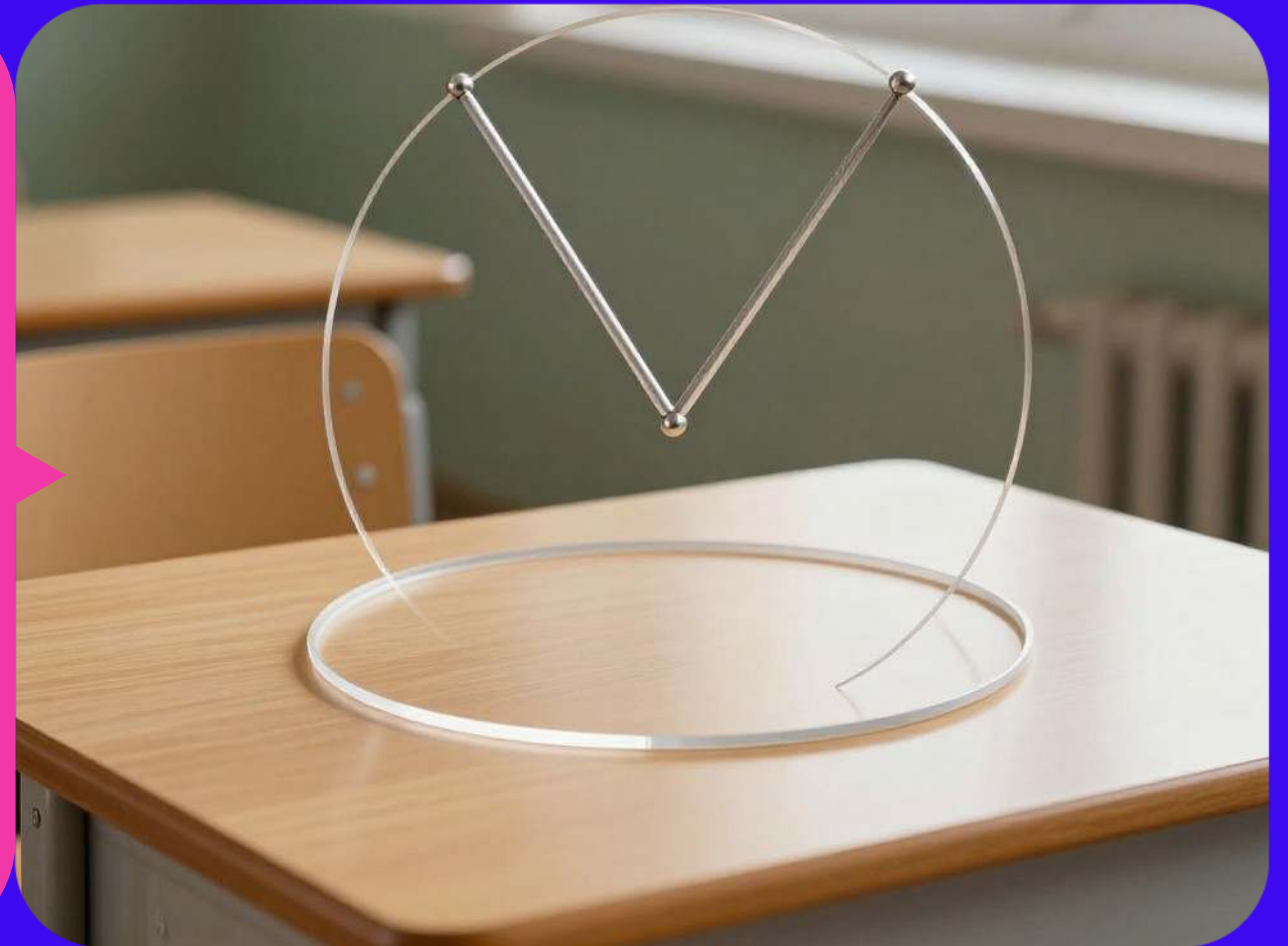
Углы с вершинами внутри и вне круга

Центральные, вписанные, внутренние и внешние углы:
их величины читаются по дугам окружности.



Почему это важно в 10 классе

Тема опирается на свойства окружности, хорд, секущих и касательных. В 10 классе она становится логическим продолжением вписанных углов и опорой для доказательств: часто требуется находить неизвестные элементы рисунка быстро и точно.

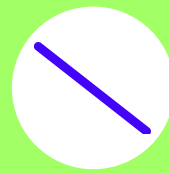


Основные элементы окружности



Окружность

Окружность — множество точек плоскости на одинаковом расстоянии от центра. Она задаёт «рамку» для всех угловых соотношений и позволяет переводить геометрию в работу с дугами.



Хорда

Хорда соединяет две точки окружности. Именно хорды часто образуют углы при пересечении: их концы определяют дуги, от которых зависит величина соответствующего угла.



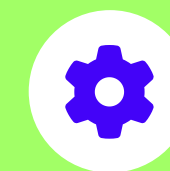
Дуга

Дуга — часть окружности между двумя точками. Для углов с вершинами внутри и вне круга дуги выступают главным источником чисел и формул.



Касательная

Касательная касается окружности в одной точке. В задачах она объединяется с хордой или другой касательной: получаем углы, величины которых снова выражаются через дуги окружности.



Секущая

Секущая прямая пересекает окружность в двух точках. Если секущие пересекаются вне круга, возникает внешняя точка, а дуги определяют разность, участвующую в формуле угла.



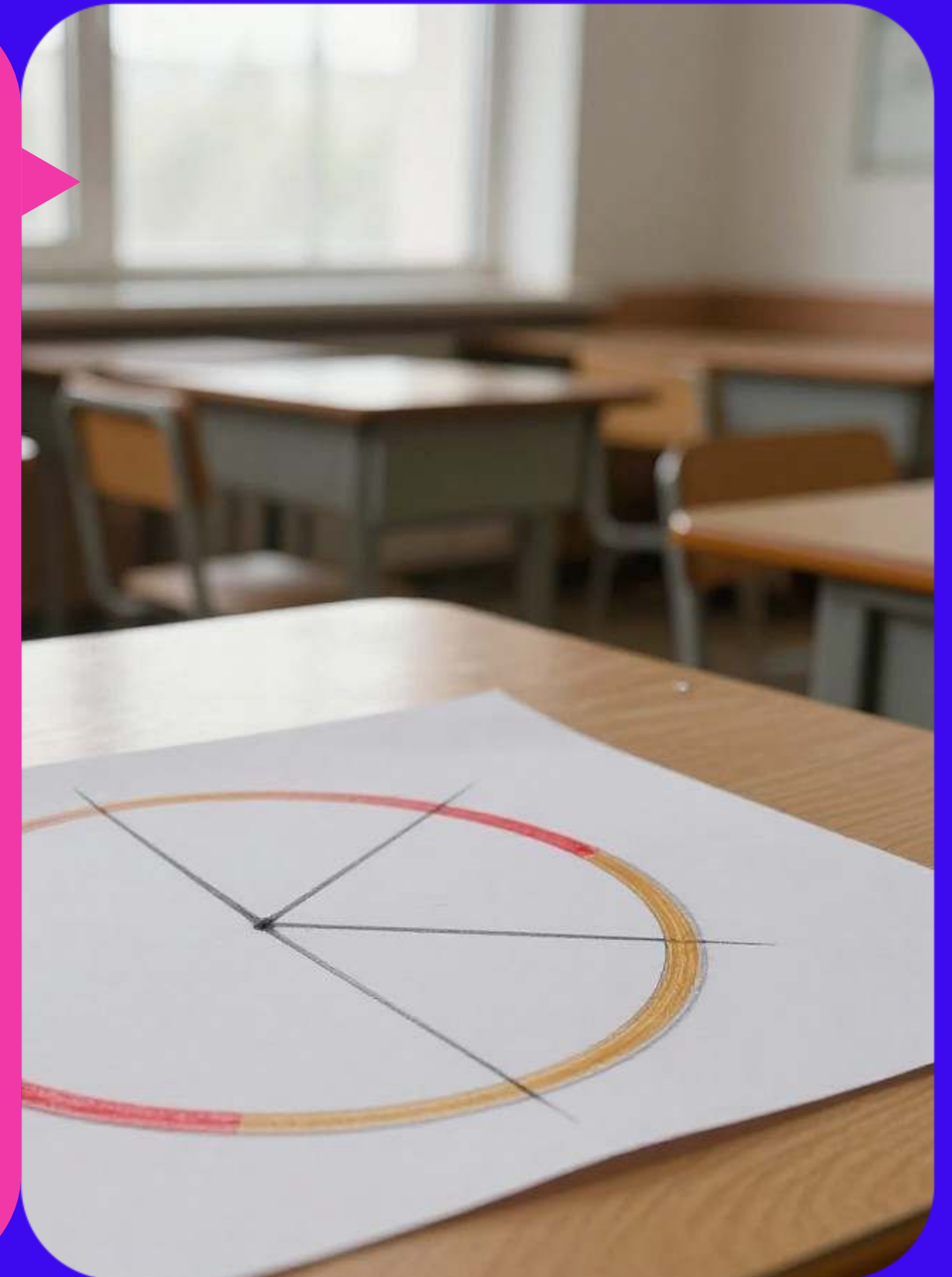
Вписанный угол как исходное правило

01

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Поэтому, если опорная дуга 100° , то угол составляет 50° . Аналогично, при дуге 76° получаем угол 38° .

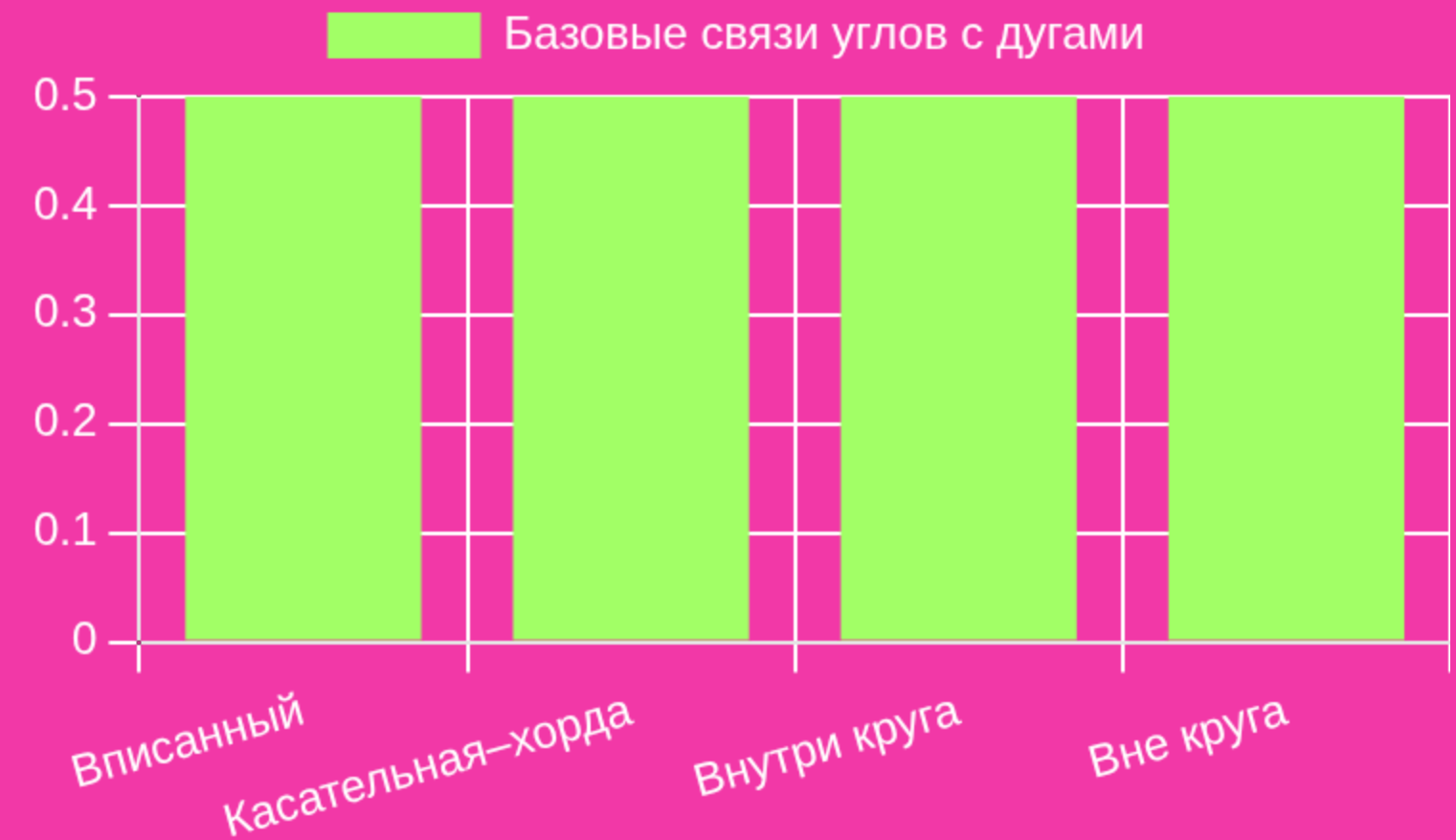
02

Это свойство служит «механизмом» вывода формул для случаев, когда вершина угла находится внутри или вне круга. Более сложные конфигурации удобно разложить на сумму или разность вписанных углов.



Сравнение формул для углов окружности

- Во всех четырёх типах ключевой математический шаг один: переводим задачу к дугам окружности и делим нужную комбинацию на 2.
- Отличие формул — не в множителе, а в том, что складывается или вычитается: сумма для внутреннего угла и разность для внешнего.



Составлено по школьной теории углов и дуг окружности (материалы курса геометрии, без внешних статистических данных).

84° и 56°

При сложении этих дуг и делении суммы пополам получается искомая величина внутреннего угла.

Теоретическая формула для внутреннего угла при пересечении хорд
(учебный материал по планиметрии).

Если две хорды пересекаются внутри окружности, то угол равен половине суммы дуг, на которые он и вертикальный ему угол опираются.



Как устроен внутренний угол при пересечении хорд



Вертикальные углы и «две дуги»

При пересечении двух хорд внутри окружности появляется четыре угла и две пары вертикальных. Каждый внутренний угол связан с двумя дугами, которые лежат напротив него и задают его величину.



Связь с дугами при пересечении

Чем больше сумма этих дуг, тем больше сам угол. Важно понимать роль точки пересечения: она не принадлежит окружности, но «управляет» углом через дуги, определяемые хордами.

Типичные случаи для внутреннего угла

Сводка самых частых конфигураций с вершиной внутри круга: в каждом случае работает идея суммы дуг, а вертикальные углы равны.

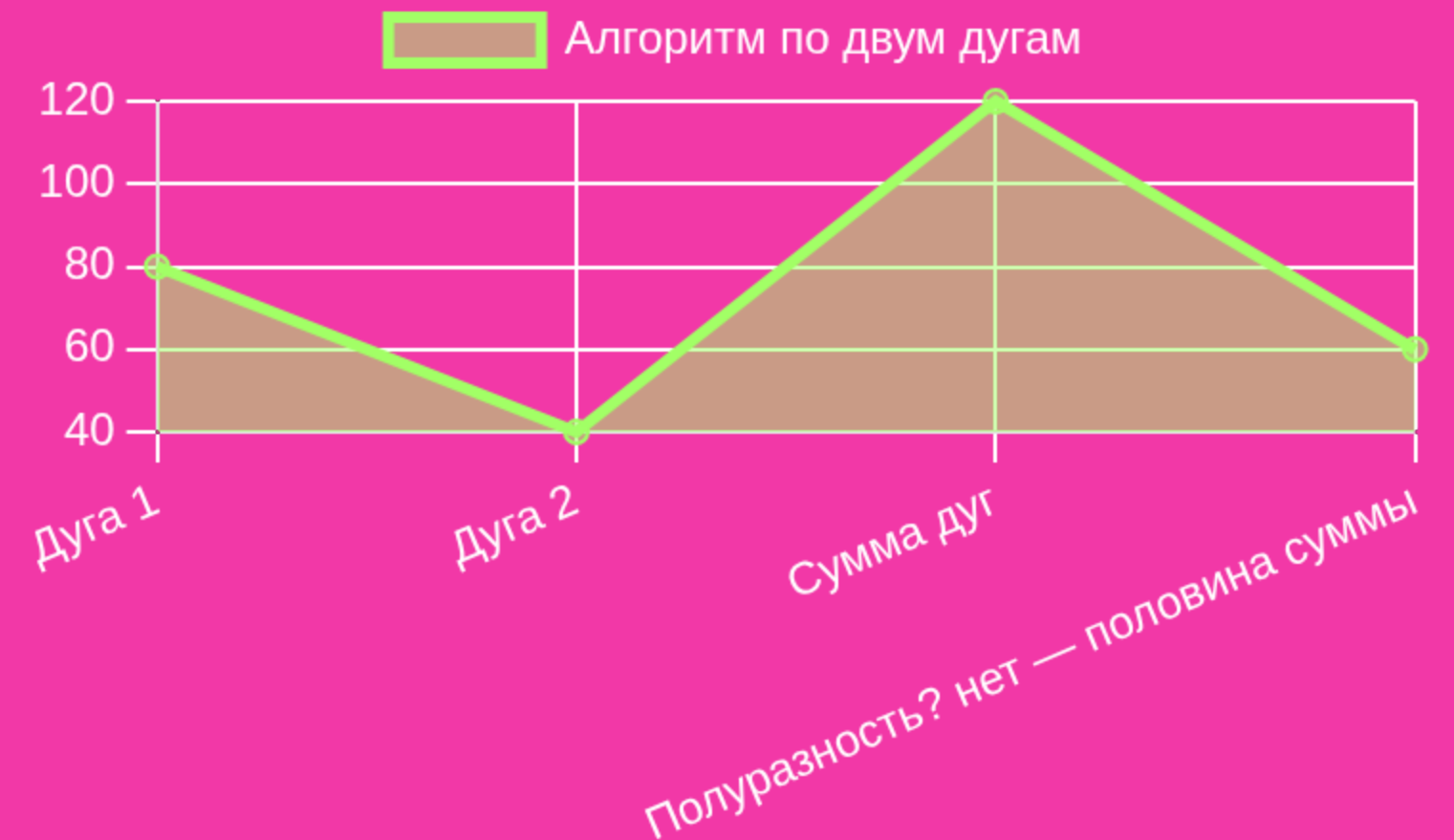
Ключевое правило неизменно: при вершине внутри круга используется сумма соответствующих дуг, а разность не применяется.

Обобщение свойств углов, возникающих при пересечении хорд и прямых, задающих дуги окружности.

Ситуация	Формула	Пример
Пересечение двух хорд	$\sphericalangle = 1/2(\text{дуга}_1 + \text{дуга}_2)$	Дуги 84° и $56^\circ \rightarrow 70^\circ$
Хорда и секущая внутри	$\sphericalangle = 1/2(\text{дуга}_1 + \text{дуга}_2)$	Одинаковая пара дуг
Вертикальные углы	$\sphericalangle_1 = \sphericalangle_2$	Равны при одном наборе дуг

Пример вычисления внутреннего угла

- Здесь видно, что угол не вычисляется «по одной дуге»: он определяется сразу двумя дугами, связанными с пересечением хорд.
- Пошаговый порядок действий прост: сложить две дуги и разделить сумму на 2 — получится величина внутреннего угла.



Числовой пример на основании формулы внутреннего угла при пересечении хорд (учебная теория).

Угол с вершиной вне круга

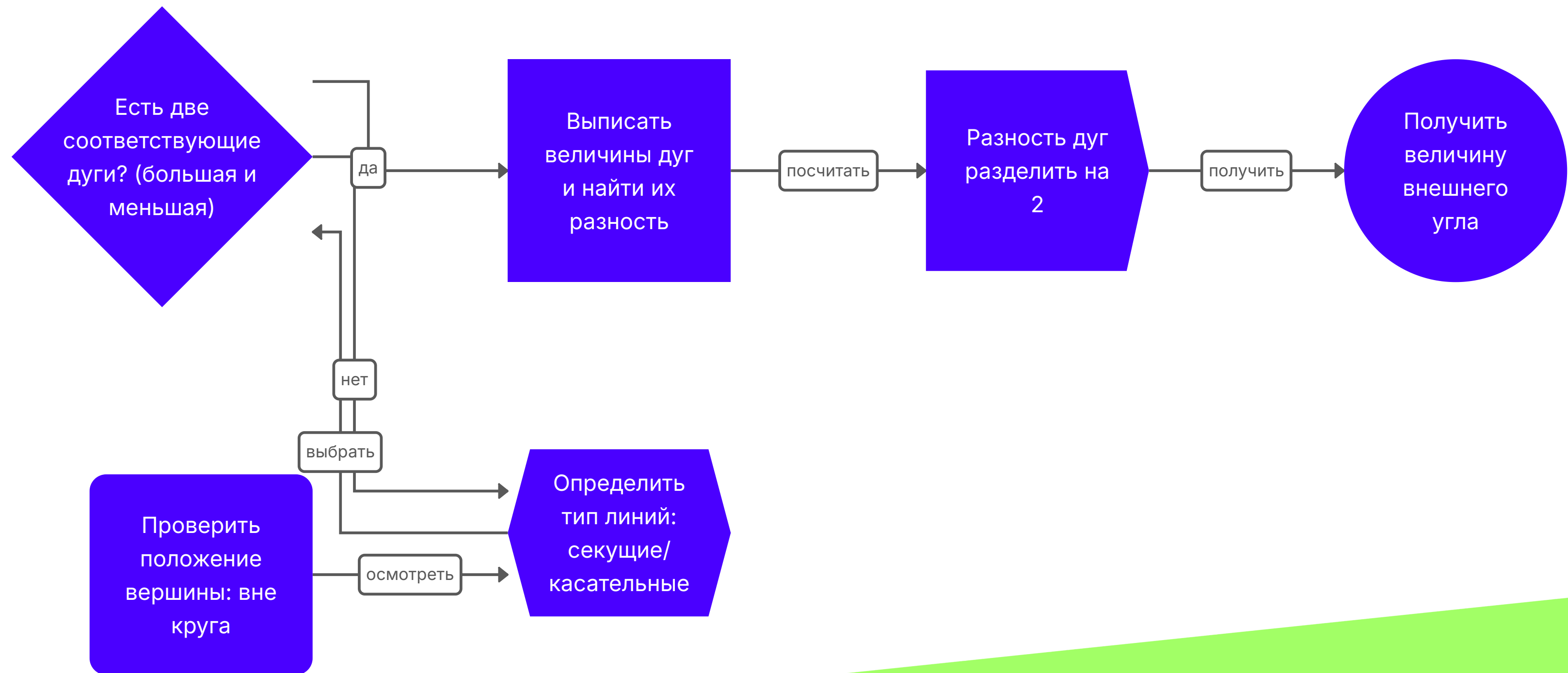
➤ Если две секущие, секущая и касательная или две касательные пересекаются вне окружности, вершина угла находится снаружи. Тогда угол выражается через разность дуг, соответствующих его сторонам.

➤ Вершина лежит вне круга, а стороны угла либо пересекают окружность (секущие), либо касаются её (касательные). Именно поэтому в формуле появляется вычитание, отражающее «разницу дуговых вкладов».

➤ Формула записывается как $\angle = 1/2(\text{большая дуга} - \text{меньшая дуга})$. Например, при дугах 150° и 70° получаем внешний угол 40° , потому что $150^\circ - 70^\circ = 80^\circ$, а половина равна 40° .

Распознавание внешнего угла в задаче

Вершина вне круга и стороны угла проходят через окружность или касаются её.



Касательная и секущая вне круга



➤ Рассматривайте угол между касательной и секущей, проведёнными из внешней точки. Он равен половине разности соответствующих дуг, которые «ограничивают» этот угол.

➤ Например, если угол равен 35° , разность дуг составляет 70° . Если угол равен 48° , разность дуг равна 96° — значит, деление на 2 возвращает исходный угол.

Сравнение внутренних, внешних и вписанных углов

Тип угла	Положение вершины	Формула	Основной признак
Вписанный	На окружности	$\frac{1}{2}$ дуги	Стороны — хорды
Внутренний	Внутри круга	$\frac{1}{2}$ суммы двух дуг	Вершина внутри; пересечение хорд/сечение
Внешний	Вне круга	$\frac{1}{2}$ разности двух дуг	Вершина вне; секущие/касательные



Подберите формулу не по ощущению, а по положению вершины относительно окружности: в каждом случае работает свой дуговой «язык».



Главное различие: одна и та же «дуга» участвует по-разному — для внутренних углов берут сумму, для внешних углов — разность.

Систематизация по дуговым соотношениям для углов окружности (школьная геометрия).

Связь с теоремой о вписанном угле

01

Формулы для углов с вершиной внутри и вне круга выводятся через теорему о вписанном угле. Затем используются свойства вертикальных углов, чтобы связать получившиеся части.

02

Многие «сложные» картинки удаётся разбить на два вписанных угла, а общий результат выразить через суммы и разности дуг. Вся работа сводится к аккуратному учёту дуг.

03

Поэтому эти правила не выглядят как разрозненные формулы: одна базовая теорема объясняет разные конфигурации на чертеже и делает рассуждения логичными.

Типичные ошибки в задачах на окружность

➔ Чаще всего «ломается» именно дуговая разметка: неправильный выбор большей/меньшей дуги меняет знак в разности и тем самым искажает итог.

➔ Если системно проверять положение вершины и соответствие дуг конкретному углу, большинство ошибок можно предотвратить до вычислений.



Наблюдения по разбору типовых решений и проверочных задач (учебная практика).

Алгоритм решения задач



1) Определить вершину

Сначала установите, где находится вершина угла: на окружности, внутри круга или вне его. От этого зависит, будет работать сумма дуг или их разность.



2) Разобраться в линиях

Проверьте, какие линии образуют стороны угла: хорды, секущие или касательные. От их типа зависит, какие дуги считаются «соответствующими» углу.



3) Выбрать дуги

Найдите дуги окружности, которые связаны с данным углом на рисунке. Обычно это две дуги, ограничивающие стороны угла, и они отличаются по величине.



4) Применить нужную формулу

Используйте правильное соотношение: для нужного типа угла берите половину дуги, половину суммы или половину разности. Выполните вычисление строго по формуле.

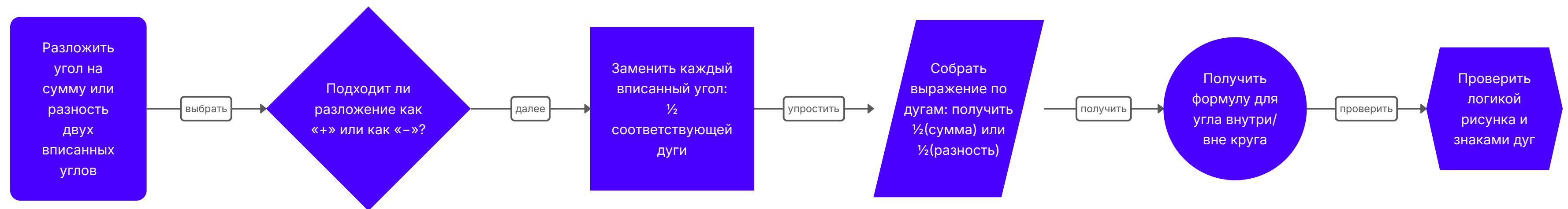


5) Проверить результат

Оцените ответ по смыслу: внешний угол не может оказаться больше, чем даёт разность дуг, а внутренняя формула всегда опирается на две дуги. При несоответствии вернитесь к дугам.

Как выводятся формулы через вписанные углы

Любой случай сводится к сумме или разности вписанных углов и их дуговых величин.



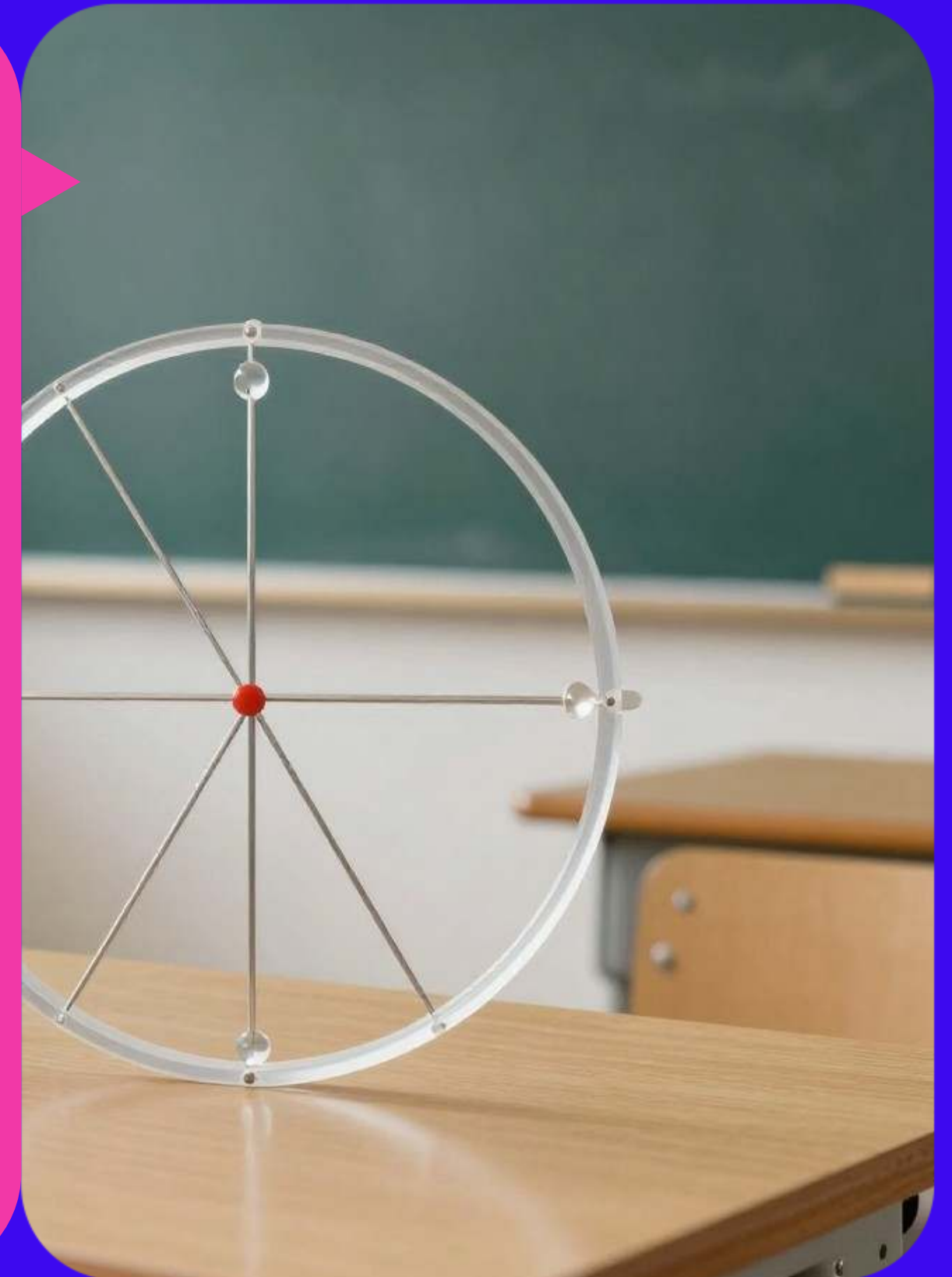
Зачем нужны эти формулы в школьной геометрии

01

Формулы помогают не «угадывать» величины на рисунке, а уверенно связывать углы с дугами. Это развивает навык чтения чертежа и поиска скрытых отношений между элементами.

02

В школьной практике такие связи требуются в задачах на доказательство, вычисление и анализ геометрической конструкции: от ОГЭ- и ЕГЭ-подобных материалов до олимпиадных заданий.



Итоговая схема формул

- Памятка работает как единый инструмент: после распознавания типа угла вы просто берёте нужную операцию над дугами и делите на 2.
- Когда ошибки связаны с дугами и знаком операции, проверка «сумма или разность» и контроль деления на 2 резко повышают точность.



Обобщение по разбору типовых ошибок в задачах темы (учебная практика, без привязки к одному тесту).

Главный вывод: угол — это дуга, оформленная действием

Углы с вершинами внутри и вне круга удобно находить через дуги: на окружности — половина дуги, внутри — половина суммы дуг, снаружи — половина разности дуг. Это даёт единую систему решений.