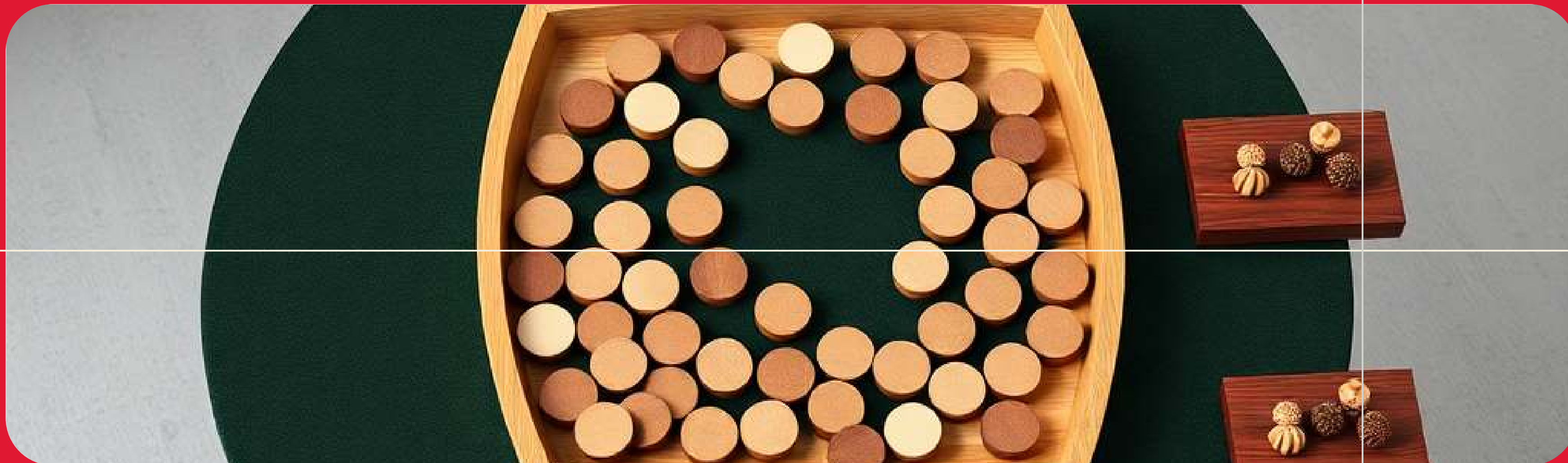
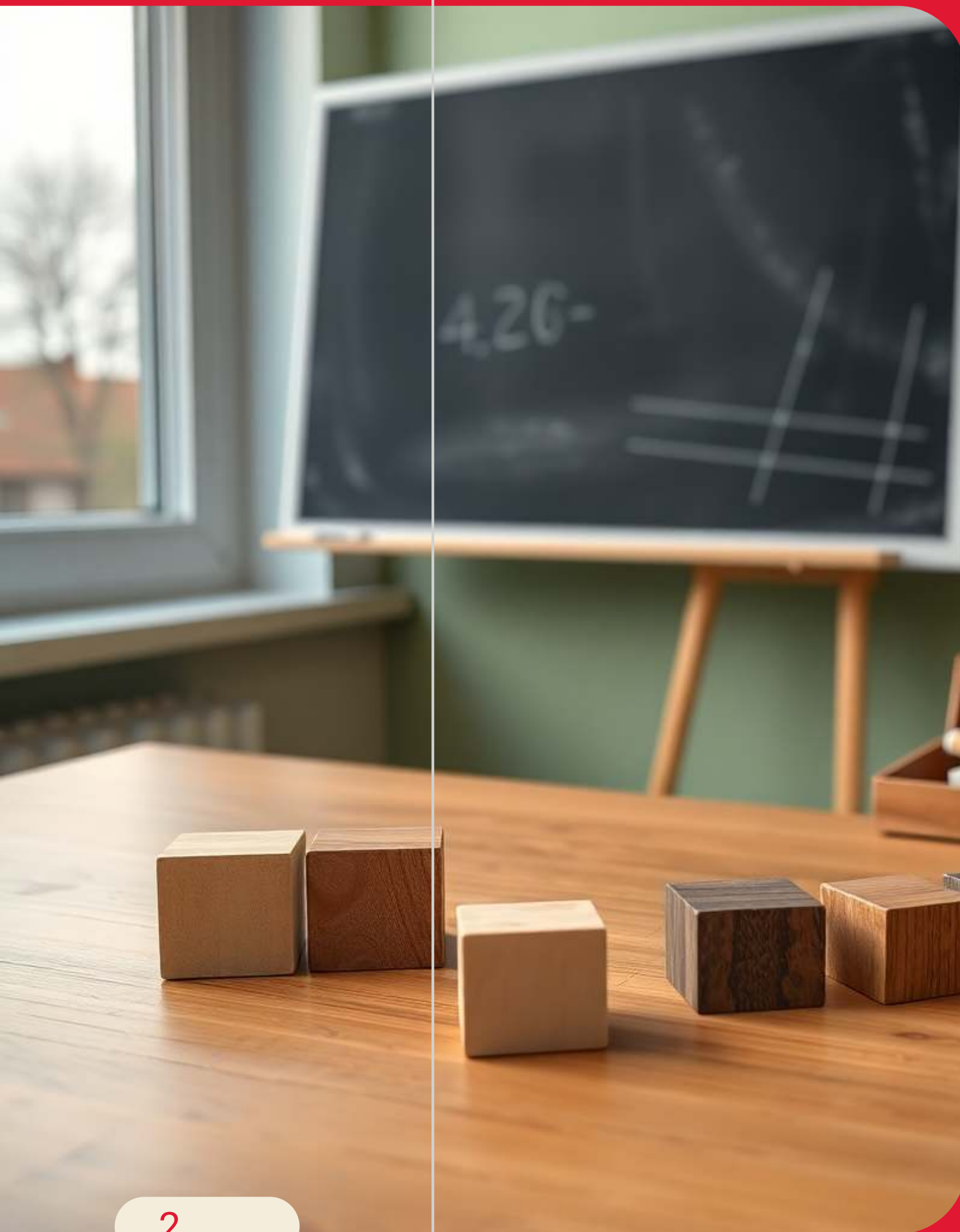




Сочетания и их свойства

Выбор без порядка: формула, свойства и задачи комбинаторики.



Сочетания в алгебре 10 класса

Эта тема учит отличать выбор группы от упорядоченного перечисления. Именно поэтому сочетания встречаются в задачах о командах, карточках, тестах и наборах объектов, а также помогают считать варианты точно и без лишних переборов.

$$0 \leq k \leq n$$

— именно при этом условии можно выбрать k элементов из n без повторений.

Сочетание существует только при допустимом числе выбранных элементов; это основа корректного подсчёта.

Определение сочетания в школьном курсе комбинаторики

Перестановки, размещения и сочетания

Сравнение трёх основных видов комбинаторных выборов помогает быстро определить нужную формулу.

Если порядок не важен, число вариантов уменьшается: одинаковые по составу наборы не считаются разными.

Школьная комбинаторика

Объект	Порядок	Формула
Перестановки	учитывается	$P_n = n!$
Размещения	учитывается	$A(n, k) = n! / (n-k)!$
Сочетания	не учитывается	$C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

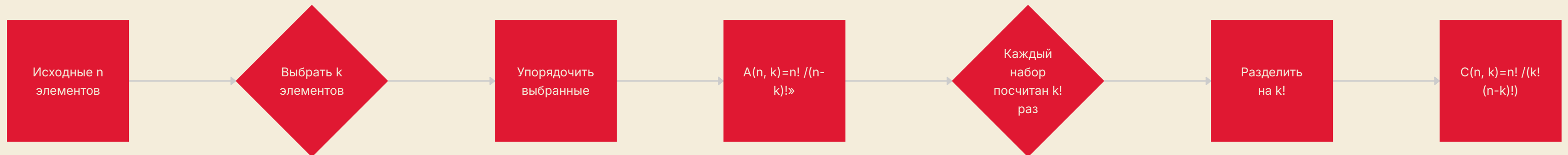
позволяет считать число выборов без полного перечисления всех вариантов.

Формула показывает, сколько существует способов выбрать k элементов из n , если порядок не важен.

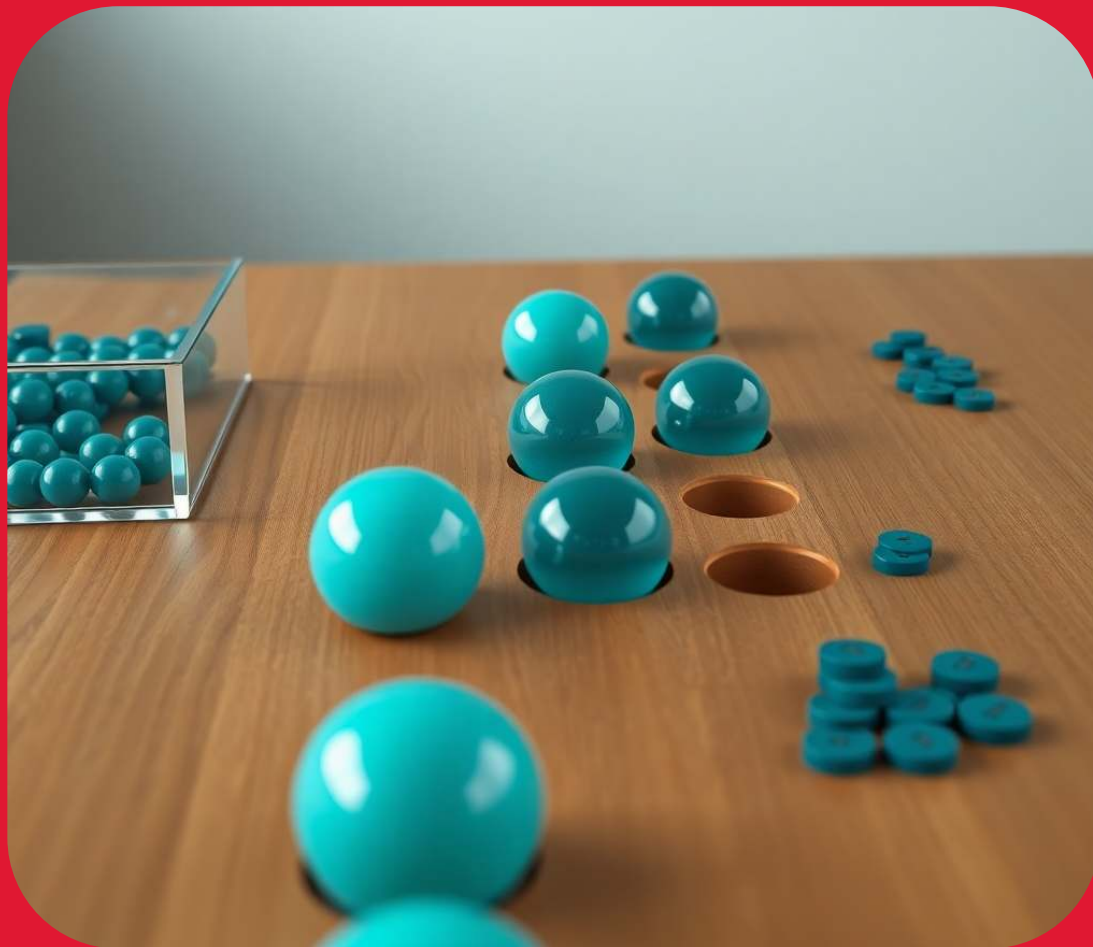
Вывод формулы сочетаний в школьном курсе комбинаторики

Как получается формула сочетаний

Связь между упорядоченным выбором и выбором без порядка



Треугольник Паскаля и числа сочетаний



Каждая строка — это выбор из n

В треугольнике Паскаля каждая строка соответствует фиксированному n , а числа в ней — значениям $C(n, k)$. Поэтому строка сразу показывает, сколько существует способов выбрать 0, 1, 2 и так далее элементов из одного набора.



Соседние числа складываются

Внутреннее число треугольника Паскаля получается как сумма двух чисел над ним. Это выражается формулой $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$, которая удобно строит новые строки по уже известным значениям.



Строка $n=6$ как пример

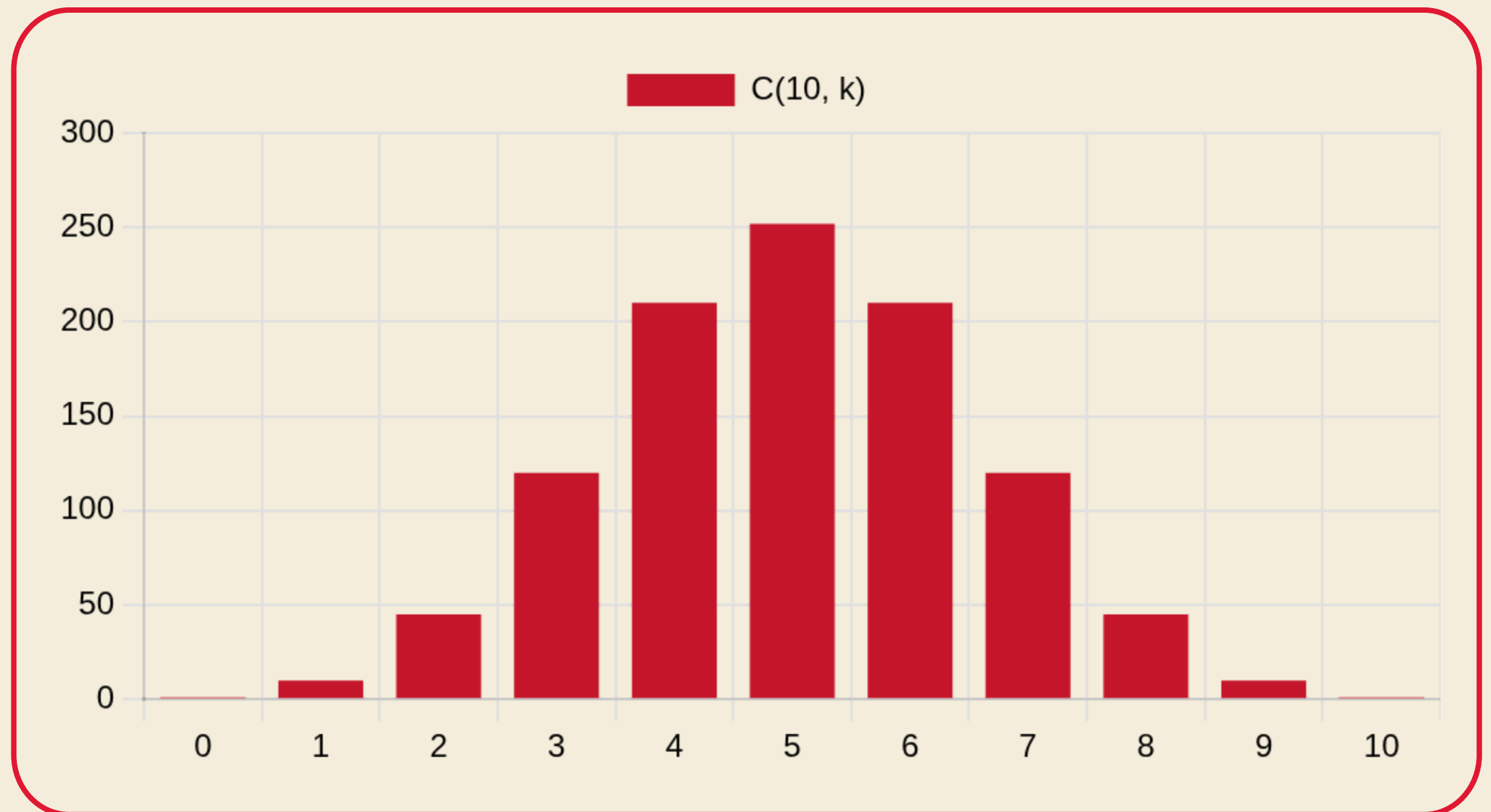
Если выделить строку $n=6$, можно увидеть последовательность $C(6,0)$, $C(6,1)$, $C(6,2)$, $C(6,3)$, $C(6,4)$, $C(6,5)$, $C(6,6)$. Она наглядно демонстрирует и симметрию, и рост чисел к середине строки.

Как меняются значения $C(n, k)$ при фиксированном n

Для строки $n=10$ видно, как выборы концентрируются вокруг середины. Это типичная форма коэффициентов бинома Ньютона.

Наибольшее значение достигается в центре строки, а края всегда равны 1; распределение симметрично.

Строка $n=10$ треугольника Паскаля; значения вычислены по формуле $C(10, k)$



$$C(n, k) = C(n, n - k)$$

позволяет заменить выбор k элементов на выбор невыбранных элементов.

Если k близко к n , удобнее считать меньшую часть строки и использовать симметрию.

Свойство симметрии чисел сочетаний

Граничные значения сочетаний

01

Ничего не выбрать

Значение $C(n, 0)=1$ означает единственный способ не брать ни одного элемента. Такой результат естественно соответствует пустому выбору и образует левый край строки треугольника Паскаля.

02

Выбрать всё множество

Равенство $C(n, n)=1$ показывает, что существует только один способ взять все элементы. Здесь не остаётся свободы выбора, поэтому это правый край строки Паскаля.

03

Один элемент или один пропуск

Если выбирают один элемент, имеем $C(n, 1)=n$; если не выбирают один элемент, то $C(n, n-1)=n$. Эти значения удобно запоминать как соседние края одной строки.

Числовые примеры вычисления сочетаний

Примеры показывают, как формула сочетаний работает для разных значений n и k , а также как быстро растёт число вариантов даже при небольшом увеличении числа объектов.

Число сочетаний растёт очень быстро: даже небольшое увеличение n заметно увеличивает количество вариантов выбора.

Формула $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$ из школьной комбинаторики

n	k	C(n, k)	Смысл
5	2	10	Пара из 5
6	3	20	Тройка из 6
8	1	8	Один из 8
10	4	210	Четвёрка из 10

120

вариантов выбрать тройку из десяти учеников,
если порядок не учитывается.

В задачах на выбор команды важен только состав группы, поэтому используют сочетания. Это позволяет отличить такой выбор от упорядоченного перечисления участников.

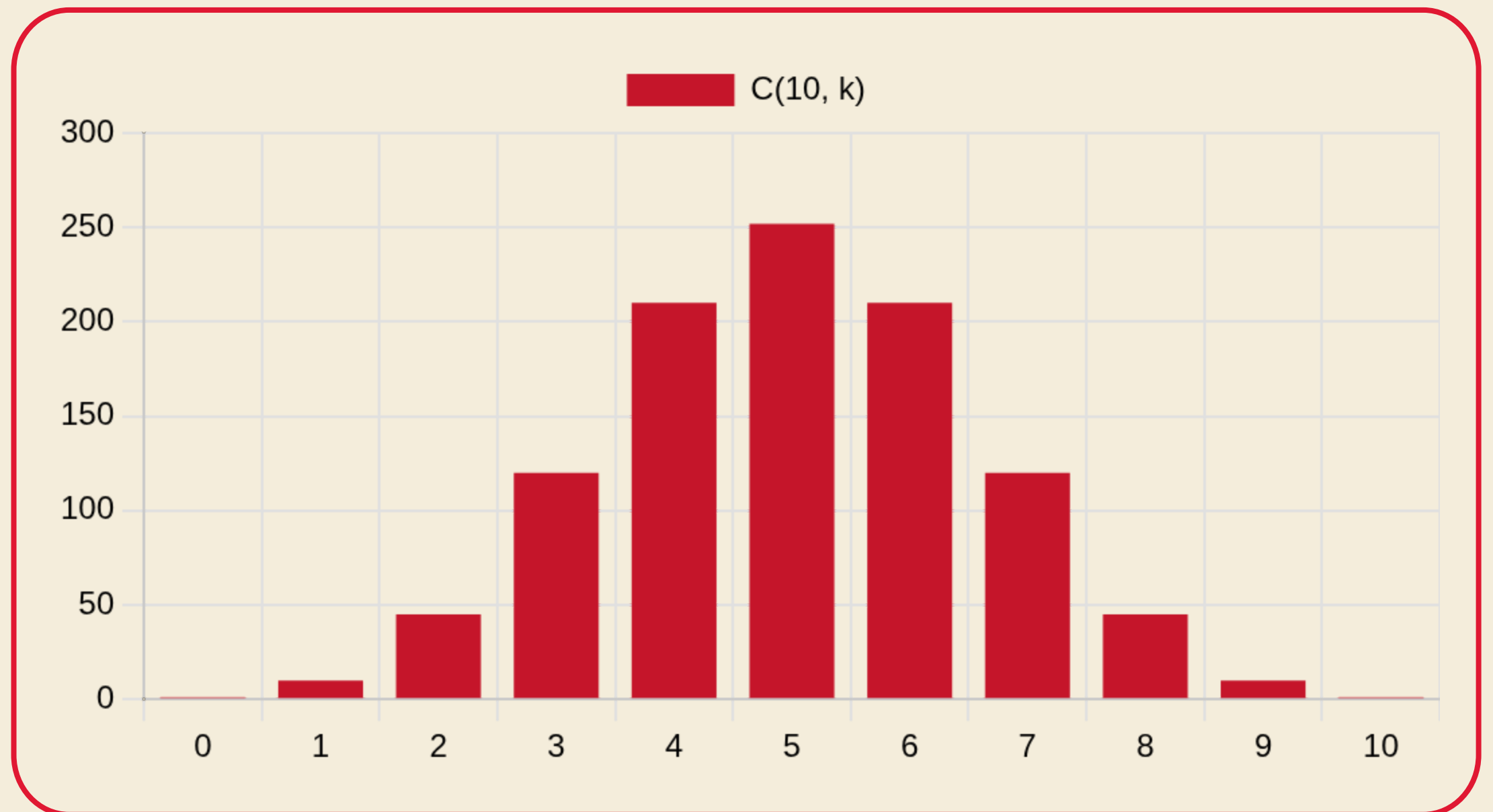
Расчёт по формуле $C(10,3)=120$

Распределение значений $C(10, k)$

Строка коэффициентов бинома имеет чётко выраженную симметрию: значения растут к середине, а затем так же уменьшаются.

Максимум достигается в центре строки, что наглядно показывает концентрацию наибольших сочетаний около середины.

Значения $C(10, k)$, вычисленные по формуле сочетаний



$$2^n$$

равна сумме всех сочетаний фиксированного n по всем k от 0 до n .

Для $n=4$ сумма коэффициентов строки равна 16, что совпадает с числом всех подмножеств множества из четырёх элементов.

Тождество суммы коэффициентов бинома Ньютона

Рекуррентное свойство сочетаний

01

Два случая выбора

Любое сочетание можно рассматривать через судьбу одного фиксированного элемента: он либо входит в набор, либо не входит. Эти две возможности полностью разбивают задачу на непересекающиеся случаи.

02

Формула соседних значений

Из такого разбиения следует рекуррентное соотношение $C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$. Оно позволяет находить новые значения, опираясь на уже известные соседние числа.

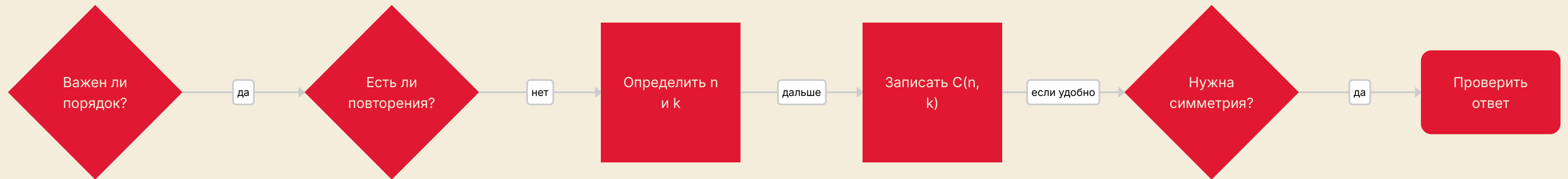
03

Связь с треугольником Паскаля

Именно это свойство лежит в основе построения треугольника Паскаля. В школьных вычислениях оно удобно для проверки результата и быстрого восстановления пропущенных значений.

Алгоритм решения задач на сочетания

Последовательность проверки признаков задачи и выбора формулы подсчёта



Сочетания в задачах вероятности

Благоприятные исходы

В комбинаторных моделях вероятность часто выражают через отношение числа благоприятных сочетаний к общему числу возможных сочетаний. Такой подход особенно удобен, когда порядок элементов не влияет на событие.

Точность модели

Использование сочетаний помогает строго описывать пространство исходов и избежать лишнего счёта одинаковых наборов. Это особенно важно в школьных задачах на вероятность, где требуется аккуратный подсчёт вариантов.

Пример с картами

При выборе нескольких карт из колоды важен только набор, который оказался на руках, а не очередность вытаскивания. Поэтому число исходов считают по формулам сочетаний, а не по правилам упорядоченного выбора.



Типичные ошибки при работе с сочетаниями

Ошибки обычно возникают из-за неверного выбора модели подсчёта. Поэтому сначала нужно определить, что именно считается различным вариантом в условии задачи.

Точная интерпретация условия задачи важнее механического вычисления: она определяет, какую формулу нужно применять.

Школьная комбинаторика; формула сочетаний

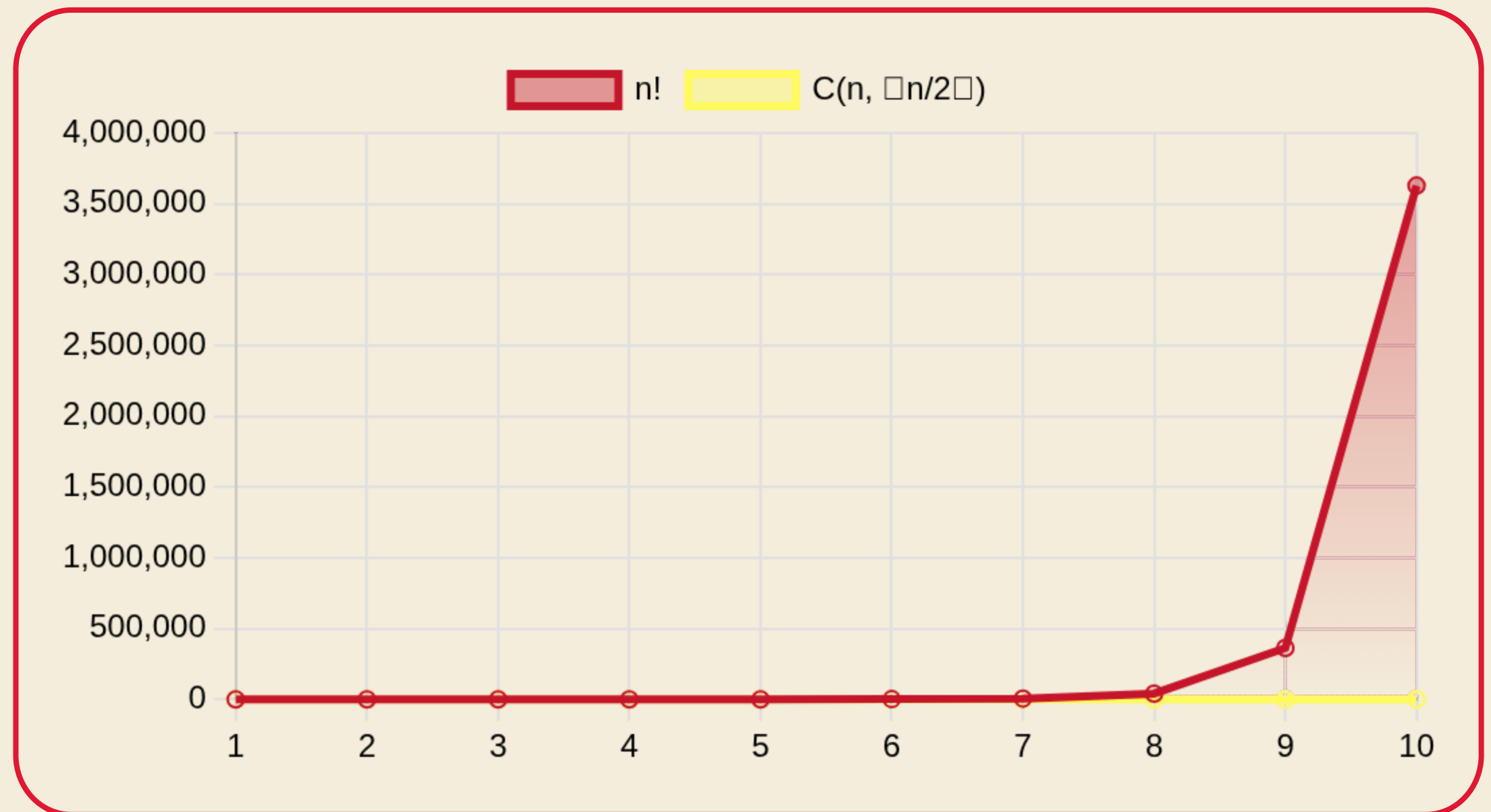
Ошибка	Причина	Верный подход
Учитывают порядок	Путают с размещениями	Использовать $C(n, k)$
Смешивают с перестановками	Считают набор как ряд	Сначала проверить условие
Ошибка в факториалах	Неверная запись формулы	Писать $n! / (k! (n-k)!)$
Не используют симметрию	Лишние вычисления	Заменять на $C(n, n-k)$

Сравнение роста $n!$ и $C(n, k)$

На одном промежутке видно, что факториал быстро уходит далеко вверх, тогда как центральные сочетания растут значительно медленнее.

Разница темпов роста подчёркивает, насколько сильно сочетания сокращают число вариантов по сравнению с упорядоченными перечислениями.

Вычисления по стандартным формулами $n!$ и $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$



Сочетания — удобный язык выбора

Сочетания позволяют точно считать варианты, когда порядок не важен. Их формула, симметрия, граничные и рекуррентные свойства делают решение задач на выбор, вероятность и подмножества ясным и системным.