

Обратная теорема

Связь прямого и обратного утверждений через логику и контрпример.



Обратная теорема в действии

Обратная теорема помогает понять, какие свойства действительно следуют друг из друга и где нужен контрпример или доказательство.



Утверждения вида «если... то...»

.01

Делимость чисел

Если число делится на 6, то оно обязательно делится на 3, потому что шестерка содержит тройку как множитель. Это удобный пример для проверки направления утверждения.

.02

Геометрия фигур

Если четырёхугольник является прямоугольником, то все его углы прямые. Здесь свойство фигуры сразу связано с её определением, поэтому вывод получается без лишних шагов.

.03

Равные углы

Если треугольник равнобедренный, то у него два равных угла. Такое утверждение показывает, как из одного признака можно получить другое, связанное с ним свойство.

Прямая и обратная теорема



Прямая теорема

Прямая теорема записывается так: если выполняется условие A , то следует вывод B . Она показывает направление рассуждения от причины к следствию.



Не всегда совпадают

Иногда прямое утверждение истинно, а обратное — нет. Тогда между ними нельзя ставить знак равенства по смыслу, даже если слова похожи.



Обратная теорема

Обратная теорема меняет части местами: если верно B , то верно A . Нужно проверять её отдельно, потому что логика в обратном направлении может не сработать.

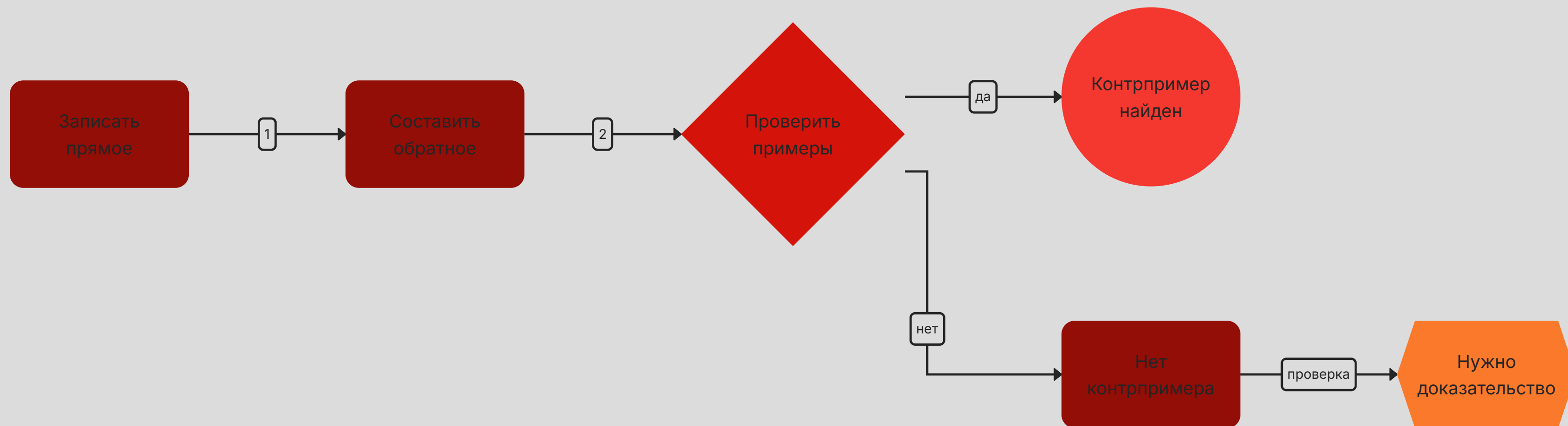


Равносильность

Если же верны оба направления, утверждения называют равносильными. В этом случае каждое можно использовать вместо другого без потери смысла.

Как проверить обратное утверждение

Пошаговая проверка обратного утверждения на примерах и контрпримерах.



Что такое контрпример

.01

Что он делает

Контрпример — это отдельный случай, который сразу опровергает общее утверждение. Он не доказывает всё, но показывает, что хотя бы один пример нарушает правило.

.02

Как искать

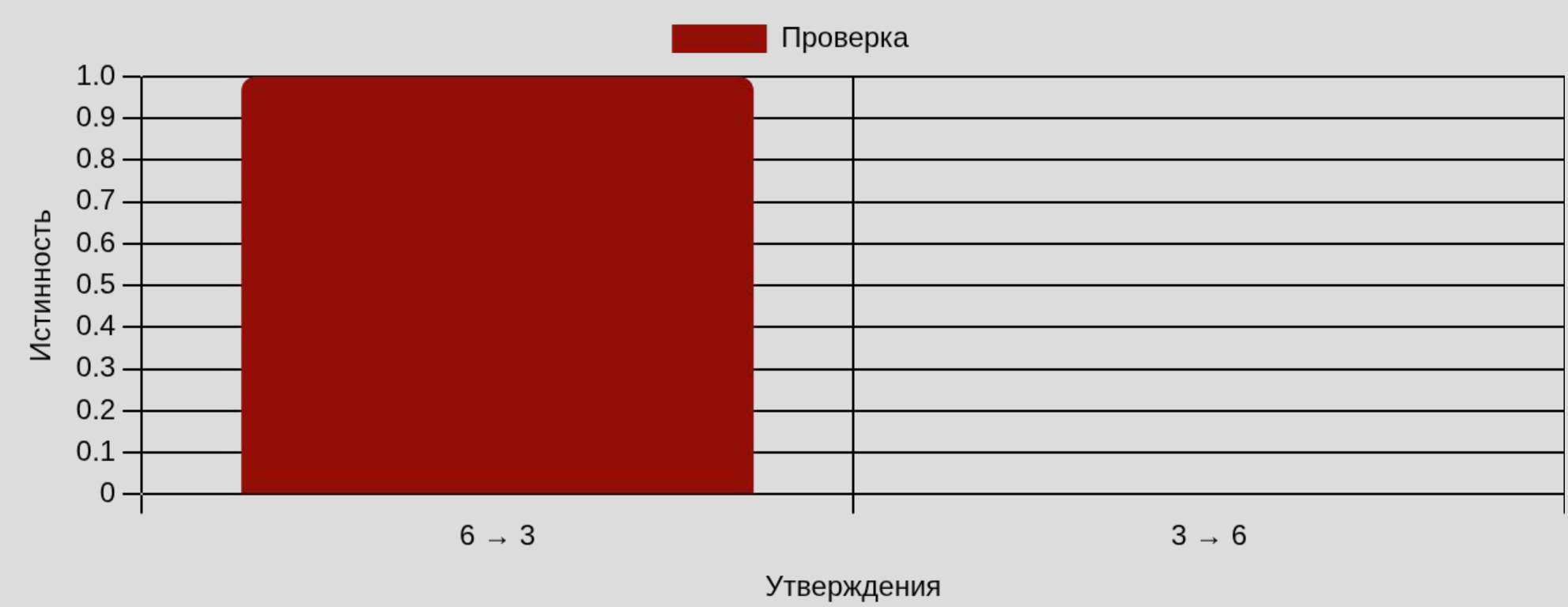
Чтобы опровергнуть фразу «если число чётное, то оно делится на 4», достаточно найти чётное число, которое не делится на 4. Подойдут 2 или 6.

.03

Сила одного примера

Если найден хотя бы один контрпример, общее утверждение уже не может быть верным. Поэтому один точный пример иногда важнее длинного списка случаев.

Делимость: прямая и обратная



Школьные примеры делимости

На диаграмме видно, что делимость на 3 не гарантирует делимость на 6: обратное утверждение ломается уже на простых примерах.

Первое утверждение истинно, второе — ложно. Для обратного достаточно контрпримера: число 3 делится на 3, но не на 6.

Проверка на простых числах

Сравним несколько коротких утверждений и сразу увидим, где обратное верно, а где нет.

Не каждое истинное прямое утверждение имеет истинную обратную форму. Чаще всего это нужно проверять отдельно на простых числах.

Утверждение	Ответ
$6 \rightarrow 3$	верно
$3 \rightarrow 6$	неверно
чётное $\rightarrow 2$	верно
$2 \rightarrow$ чётное	верно

Школьные примеры делимости и чётности

Когда обратная теорема тоже верна

.01

Прямое утверждение

У прямоугольника все углы равны 90° . Это не просто случайное свойство, а часть самого определения фигуры, поэтому прямое утверждение здесь надёжно и всегда выполняется.

.02

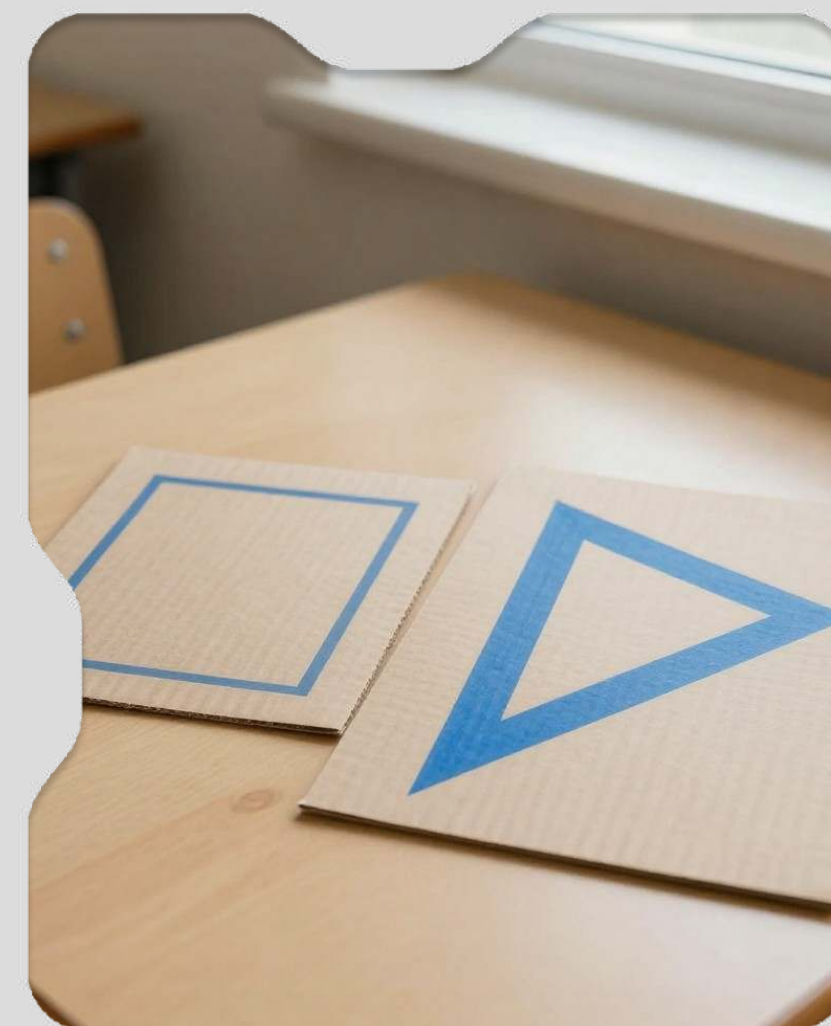
Обратное тоже верно

Если у четырёхугольника все углы прямые, то он является прямоугольником. Значит, обратное утверждение тоже верно и не требует отдельного исключения.

.03

Равносильность

Когда оба направления истины совпадают, свойства фигуры можно использовать взаимозаменяемо. Это и есть равносильность — очень удобная ситуация в геометрии.



Ромб и равные стороны



Определение ромба

Ромб — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Такое определение удобно тем, что сразу выделяет фигуру по одному признаку и помогает узнавать её на чертежах.



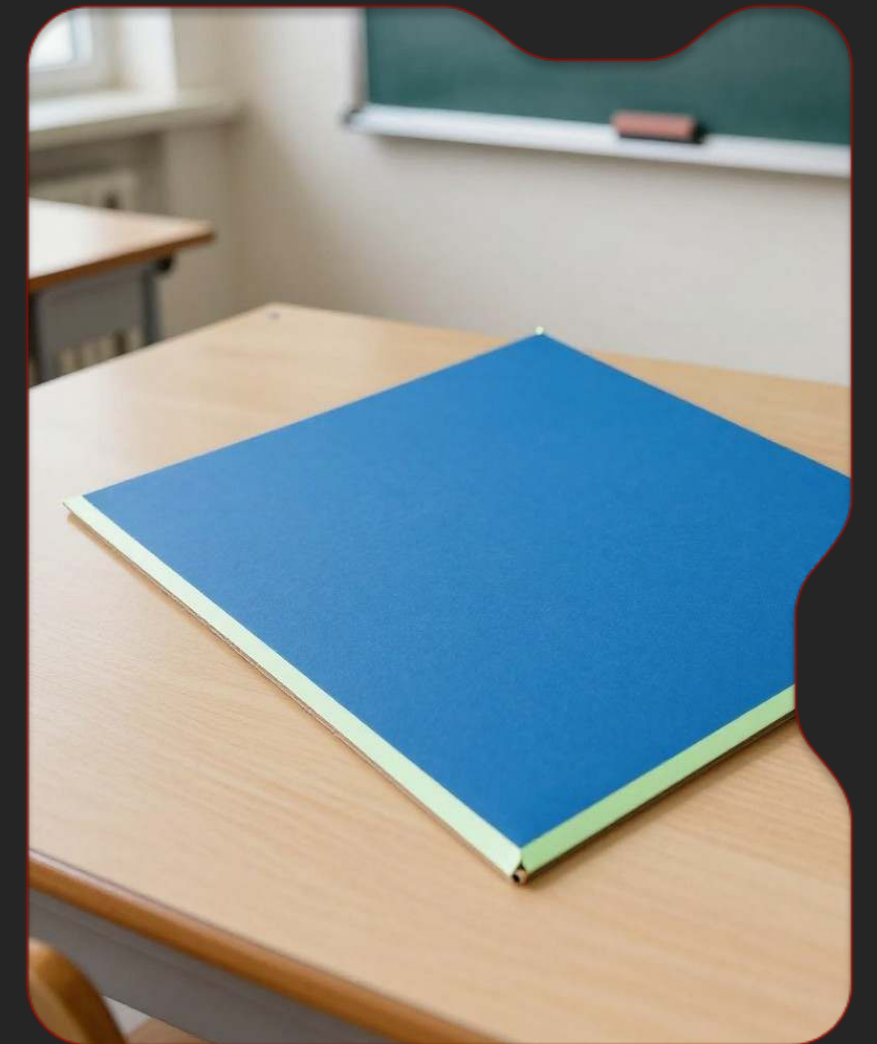
Верное обратное

Если у четырёхугольника все стороны равны, то он является ромбом. Здесь обратное утверждение совпадает по смыслу с прямым, поэтому оба направления работают одинаково.



Полное совпадение

Этот пример показывает, что свойства фигур могут не только следовать из определения, но и сами его полностью описывать. Такие пары утверждений называют равносильными.



Равнобедренный треугольник

.01

Свойство фигуры

У равнобедренного треугольника две боковые стороны равны, поэтому углы при основании тоже равны. Это свойство помогает узнавать фигуру по её углам, а не только по сторонам.

.02

Обратное утверждение

Если в треугольнике два угла одинаковые, то напротив них лежат равные стороны. Значит, такой треугольник можно сразу отнести к равнобедренным, даже если стороны не подписаны.

.03

Почему это удобно

Здесь прямое и обратное утверждения оба верны, поэтому их можно использовать как взаимную проверку. Это хороший пример равносильности, который часто встречается в школьной геометрии.

Необходимое и достаточное

.01

Что необходимо

Необходимое условие отвечает на вопрос: без чего утверждение не может быть верным. Если его нет, нужный вывод не получится, даже если другие признаки присутствуют.

.02

Что достаточно

Достаточное условие отвечает на вопрос: чего уже хватает для вывода. Когда оно выполнено, можно уверенно сделать заключение, не проверяя остальные возможные признаки.

.03

Пример с делимостью

Для числа, делящегося на 6, делимость на 3 необходима: без неё деление на 6 невозможно. Но этого недостаточно, потому что число может делиться на 3 и не делиться на 6.

Равносильные утверждения



Одинаковый смысл

Когда прямое утверждение и его обратное оба истинны, они описывают одну и ту же ситуацию с разных сторон. Тогда их можно свободно заменять друг другом.



Геометрические примеры

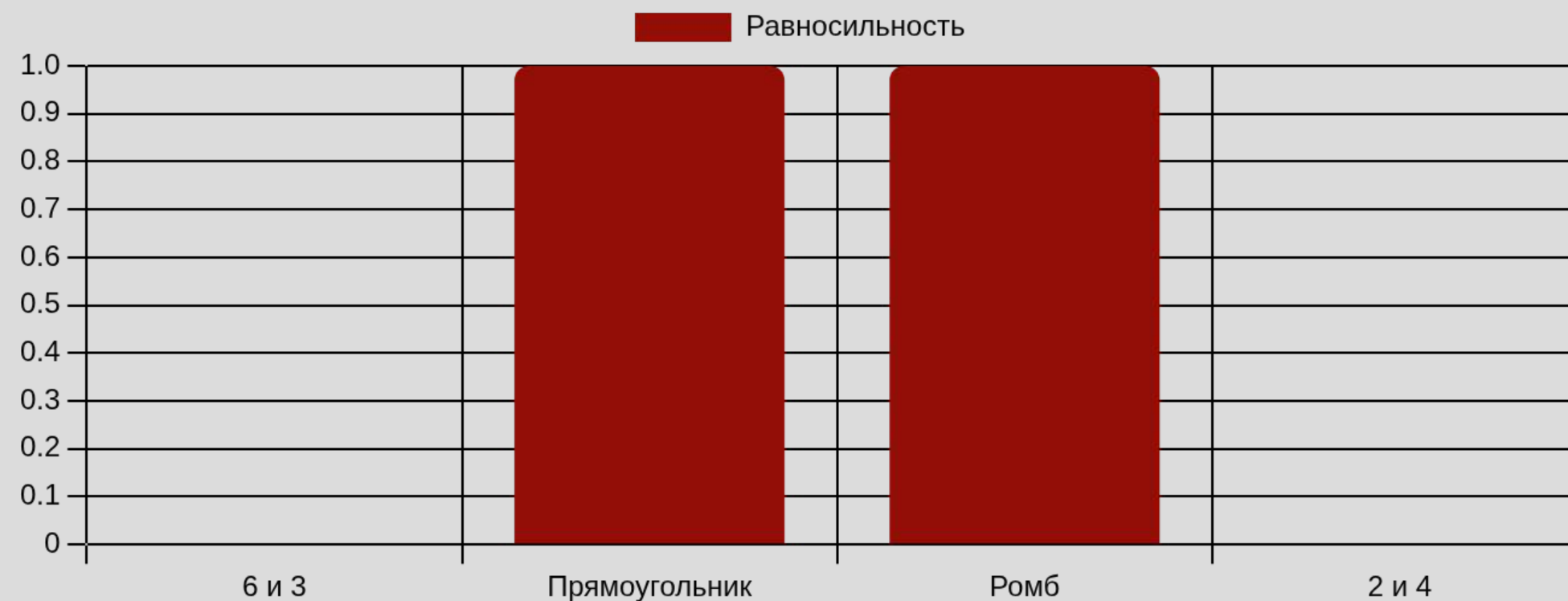
В школьной геометрии так часто работают определения фигур: одно свойство помогает узнать фигуру, а другое — проверить, действительно ли перед нами именно она.



Зачем это нужно

Равносильность особенно полезна при решении задач: если найдено удобное формулирование, можно перейти к нему без потери смысла и продолжать рассуждение уже в более простой форме.

Верно или нет: сравнение утверждений



Составлено по школьным примерам из темы «Обратная теорема»

На схеме видно, что не каждое прямое утверждение имеет равносильное обратное. Это помогает сразу отделять определения и свойства от односторонних признаков.

Единица означает равносильность, ноль — только одностороннюю связь. Самые надёжные пары здесь связаны с определениями фигур.

Школьные примеры истинных и ложных обратных

Утверждение	Обратное	Итог
$6 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 6$	ложно
углы прямые $\rightarrow$ прямоугольник	прямоугольник $\rightarrow$ углы прямые	верно
2 угла равны $\rightarrow$ равнобедренный	равнобедренный $\rightarrow$ 2 угла равны	верно

Таблица помогает быстро увидеть, где обратное утверждение сохраняет истину, а где появляется контрпример. Это удобный способ самопроверки перед доказательством.

В делимости обратное может быть ложным, а в геометрии свойства фигуры часто образуют равносильные пары.

Составлено по школьным примерам из темы «Обратная теорема»

Контрапозиция как ещё один способ

.01

Записать исходное

Сначала запишите исходную фразу в форме «если А, то В». Так проще увидеть, что именно считается условием, а что — выводом, и не перепутать части.

.02

Составить обратное

Затем поменяйте части местами и получите обратное утверждение. После этого проверьте его на простых примерах, чтобы понять, действительно ли оно всегда верно.

.03

Найти контрпример

Если найден пример, где В есть, а А нет, это контрпример. Он сразу показывает, что обратное утверждение неверно и дальнейшее доказательство не требуется.

.04

Перейти к доказательству

Когда контрпримера нет, нужно уже строго доказывать утверждение. В математике отсутствие примера противоречия ещё не означает истину, поэтому проверка должна быть полной.

Контрапозиция и смысл отрицания

Отрицание не должно подменять вывод: контрапозиция сохраняет смысл, а случайное отрицание — нет.



Мини-практика: первые два задания



Задание 1

В первом задании обратное утверждение неверно: число 2 чётное, но на 10 не делится. Такой пример сразу показывает, что свойство «чётное» слишком широкое.



Задание 2

Во втором задании обратное утверждение верно: если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный. Здесь условие и вывод действительно совпадают по смыслу.



Как проверять

При проверке полезно каждый раз задавать два вопроса: можно ли найти контрпример и не является ли обратное уже известным определением или признаком фигуры.

Мини-практика: геометрия и контрапозиция

.01

Задание 3

У прямоугольника противоположные стороны равны, значит обратное утверждение тоже верно: если у четырёхугольника равны противоположные стороны, это прямоугольник не всегда, поэтому нужно быть внимательным к формулировке.

.02

Почему нужна осторожность

Здесь важно не перепутать свойства разных фигур. Равные противоположные стороны могут встречаться и у других четырёхугольников, поэтому перед выводом всегда проверяют полное определение.

.03

Задание 4

Контрапозиция к фразе «если число делится на 6, то делится на 3» звучит так: «если число не делится на 3, то оно не делится на 6».

Итоги: как работать с обратной теоремой

Работая с обратной теоремой, сначала отделяйте условие от вывода, затем проверяйте обратное на примерах. Если нужно, ищите контрпример или доказывайте равносильность через контрапозицию.