



Усечённый конус: площадь поверхности и объём

Разберём формулы, которые связывают чертёж, площадь поверхности и объём усечённого конуса.

Где встречается усечённый конус и зачем нужны вычисления

Эта фигура встречается в предметах вокруг нас: от стаканов и ведёрок до абажуров и воронок. Чтобы правильно рассчитать материал и вместимость, нужно уверенно работать с радиусами, высотой, образующей и единицами измерения.



Элементы усечённого конуса и обозначения

Большое и малое основания

У усечённого конуса два круговых основания. Радиус большего основания обозначают R , а меньшего — r ; именно эти величины чаще всего входят в формулы площади и объёма.

Высота фигуры

Высота h показывает кратчайшее расстояние между плоскостями оснований и всегда проводится перпендикулярно. Она нужна прежде всего при вычислении объёма и при нахождении образующей.

Образующая боковой поверхности

Образующая l соединяет точки окружностей на боковой поверхности. Она помогает считать боковую площадь и связана с высотой через прямоугольный треугольник в осевом сечении.

Единицы измерения

Если в задаче даны диаметры, их сначала делят на два, чтобы получить радиусы. Перед вычислениями все размеры переводят в одинаковые единицы, иначе ответ получится неверным.



Как получается усечённый конус из полного конуса

Срез параллельно основанию

Усечённый конус можно представить как часть полного конуса, у которого верх отсеки плоскостью, параллельной основанию. После такого среза остаются два круга разного размера и боковая поверхность между ними.



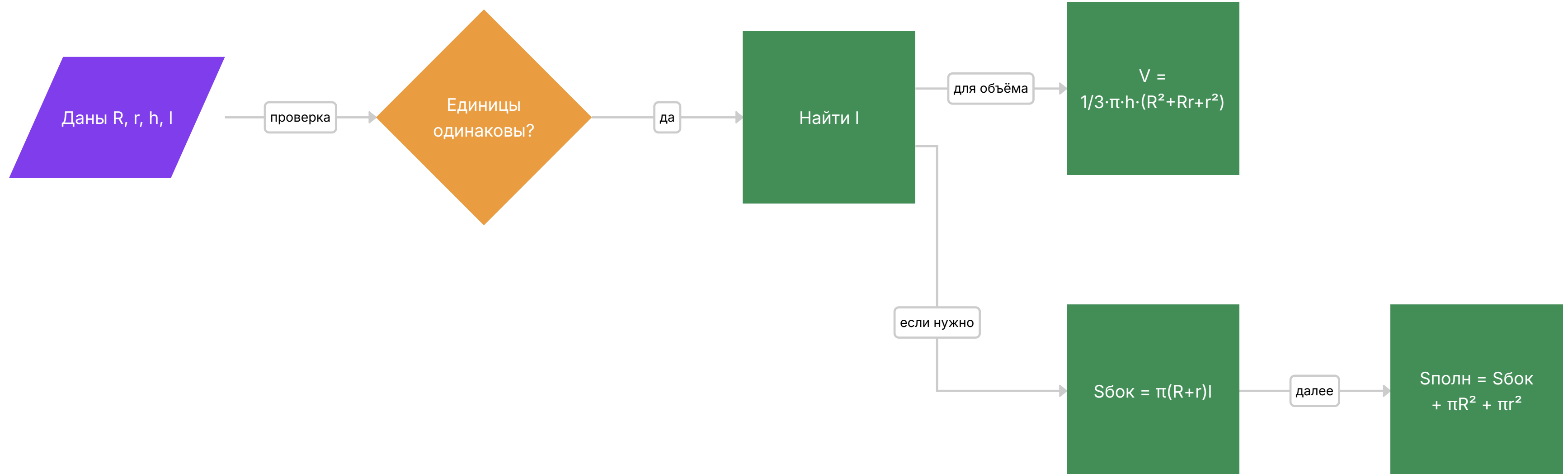
Подобные фигуры и осевое сечение

Если мысленно продолжить боковые стороны, видно два подобных конуса: большой и маленький. В осевом сечении получается удобная фигура, где легко заметить прямоугольный треугольник и понять, откуда берётся формула для образующей.



Порядок вычисления площади и объёма

Последовательность действий при решении задач на усечённый конус



Формула боковой поверхности

1 Главная запись

Боковая поверхность усечённого конуса находится по формуле $S_{бок} = \pi(R+r)l$. В ней складываются радиусы обоих оснований и умножаются на образующую.

2 Что влияет на результат

Если увеличивается хотя бы один радиус или образующая, боковая площадь тоже возрастает. Это удобно видеть уже по самой формуле, без дополнительных построений.

3 Когда формула особенно нужна

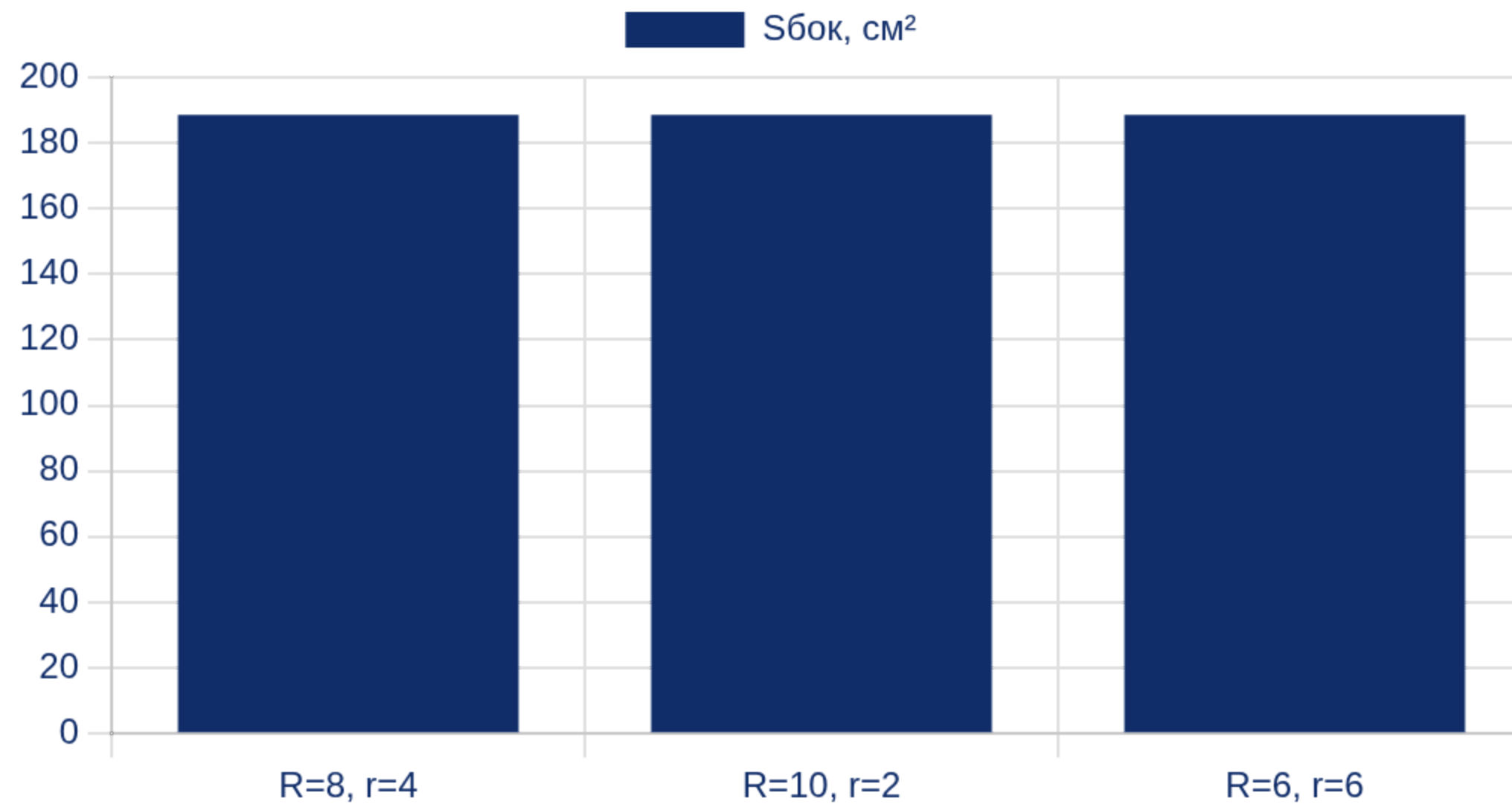
Её используют, когда надо узнать расход материала на внешнюю оболочку предмета. Основания при этом не учитываются, потому что речь идёт только о боковой части.

4 Связь с моделью

Чем точнее измерены R , r и l , тем надёжнее ответ. Даже небольшая ошибка в одной величине заметно меняет итоговую площадь, особенно у больших моделей.



Как меняется боковая площадь при одинаковой образующей



Во всех трёх случаях длина образующей одинакова, поэтому сравнение зависит только от суммы радиусов. Это удобно для быстрой оценки без подробных вычислений.

При равной l боковая площадь определяется величиной $R+r$: здесь все варианты дают одинаковый результат.

Полная площадь поверхности

Из чего складывается

Полная площадь включает боковую поверхность и две круговые основы. Поэтому к $S_{бок}$ добавляют площади оснований πR^2 и πr^2 , получая полную внешнюю поверхность фигуры.

Почему основания считаются отдельно

Основания — это круги, а не части боковой поверхности. Их площадь вычисляют отдельно, чтобы не пропустить поверхность, которая тоже входит во внешний контур тела.

Когда вклад оснований заметен

Если радиусы сильно различаются, большая основа может существенно увеличить полный результат. Тогда разница между боковой и полной площадью становится особенно заметной.

Практический смысл

Эта формула нужна, когда надо покрыть фигуру материалом целиком: краской, бумагой, пленкой или тканью. В таком случае нельзя забывать ни одну из поверхностей.



Основные формулы для площади и объёма

Величина	Формула	Нужно знать
Боковая площадь	$S_{бок} = \pi(R+r)l$	R, r, l
Полная площадь	$S_{полн} = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2$	R, r, l
Объём	$V = 1/3 \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$	R, r, h

Сравнение помогает быстро выбрать нужную формулу и понять, какие величины известны заранее.

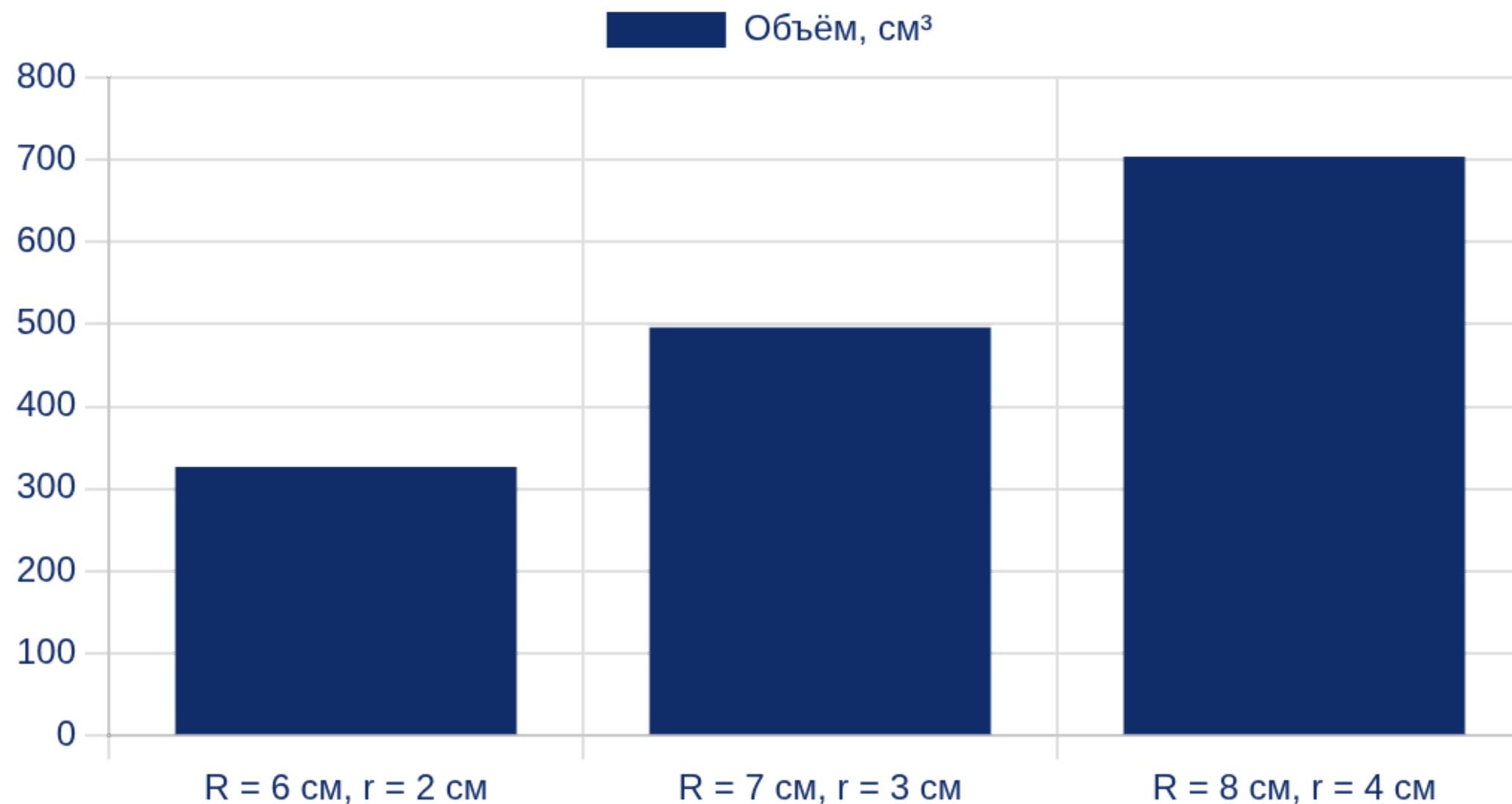
Для площадей чаще требуется образующая, а для объёма — высота и оба радиуса.

Объём зависит не только от высоты, но и от размеров обоих оснований. Поэтому важно учитывать все части формулы, а ответ записывать в кубических единицах.

3

**величины с основаниями
входят в формулу объёма
и определяют его вместе
с высотой.**

Рост объёма при увеличении радиусов



Во всех трёх случаях высота одинакова, поэтому различие объёма определяется только размерами оснований.

При росте радиусов объём увеличивается заметно быстрее, потому что в формуле участвуют квадраты и их произведение.

Расчёт по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$, $h = 6$ см; учебный пример.

Связь высоты и образующей



1

Прямоугольный треугольник

В осевом сечении усечённого конуса можно выделить прямоугольный треугольник, где катеты — высота h и разность радиусов $R-r$, а гипотенуза — образующая l .

2

Формула Пифагора

По теореме Пифагора получаем $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$. Эта запись помогает быстро найти образующую, если известны высота и размеры обоих оснований.

3

Почему важна разность

Чем больше разница между радиусами при той же высоте, тем длиннее образующая. Если радиусы близки, боковая поверхность получается более «пологой» и короткой.

4

Проверка вычислений

Нужно не перепутать разность и сумму радиусов. Ошибка в одном знаке сразу меняет результат, поэтому полезно сначала сделать схему и только потом считать.

Осевое сечение усечённого конуса

Фигура сечения

Если рассечь усечённый конус плоскостью через ось, получится равнобедренная трапеция. Она наглядно показывает, как связаны боковая поверхность и размеры оснований.

Видимые элементы

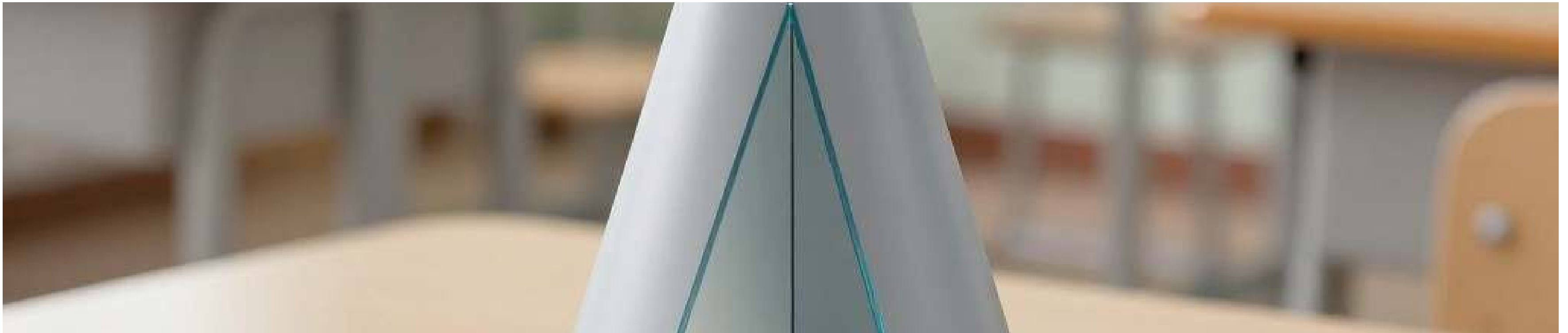
В таком сечении легко увидеть большой и малый радиусы, высоту между основаниями и образующую. Эти обозначения помогают связать чертёж с формулами без лишних вычислений.

Удобный треугольник

Проведя высоту и разность радиусов, можно получить прямоугольный треугольник. Именно он нужен, чтобы применить теорему Пифагора и найти образующую.

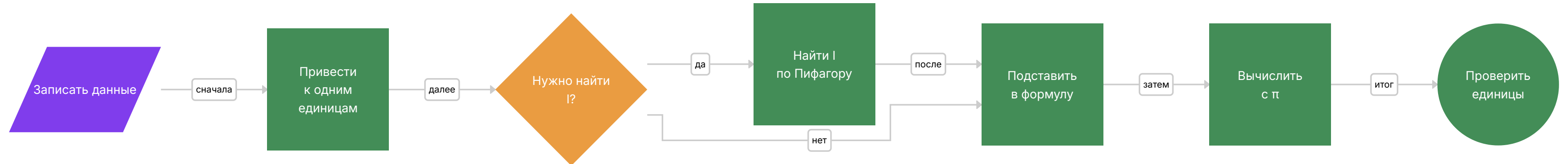
Связь с формулами

Осевое сечение делает понятным происхождение формул площади и объёма. По рисунку проще проверить, какие величины участвуют в расчётах и как они расположены.



Пошаговое решение задачи

Алгоритм вычисления площади поверхности и объёма по данным R , r , h или l



Примеры бытовых предметов и что в них считают

Сравнение показывает, какие величины нужны для разных задач: вместимость предмета или расход материала на его поверхность.

Для ёмкостей важен объём, а для оболочек и деталей — площадь поверхности. Одна и та же форма решает разные практические задачи.

Предмет	Что считают	Ответ
Стакан	Объём	см ³
Абажур	Площадь	см ²
Ведро	Объём	л
Воронка	Площадь	см ²

Типичные ошибки при вычислениях



Чаще всего ошибки появляются не в самой формуле, а в невнимательной подстановке чисел и единиц измерения.

Если проверять радиус, образующую и единицы до ответа, большинство ошибок можно избежать ещё до вычислений.

Проверка ответа и единицы измерения

Правильные единицы



Площадь всегда записывают в квадратных единицах: см^2 , м^2 или мм^2 . Если ответ получился без степени 2, значит запись неполная и её нужно исправить.

Объём отдельно



Для объёма используют кубические единицы: см^3 , м^3 , мм^3 . Это помогает сразу отличить вместимость фигуры от площади её поверхности и не перепутать результаты.

Оценка разумности



Полезно сравнить ответ с размерами фигуры. Слишком большое или слишком маленькое число часто означает ошибку в формуле, в знаках или в подстановке.

Точность до конца



Во время вычислений лучше не округлять промежуточные значения. Округление делают только в итоговом ответе, чтобы не накапливалась лишняя погрешность.

Связь с подобием фигур

Срез конуса

Если плоскость проходит параллельно основанию, верхняя часть большого конуса отсекается. В результате образуется усечённый конус, а оставшиеся фигуры сохраняют одинаковые пропорции.

Подобные размеры

У полного и меньшего конуса соответствующие радиусы и высоты относятся одинаково. Это свойство помогает понимать, почему формулы можно выводить через отношение частей одной фигуры.

Проверка формул

Подобие удобно использовать как проверку: если размеры изменяются в одном масштабе, то и радиусы, и высоты должны меняться согласованно. Это делает вычисления надёжнее.



Мини-задача с полным решением

1 1. Записываем данные

Дано: $R = 6$ см, $r = 3$ см, $h = 4$ см. Сначала отмечаем, что все величины уже заданы в одинаковых единицах, значит переводить их не нужно.

2 2. Находим образующую

Используем формулу $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$. Подставляем значения:
 $l = \sqrt{4^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ см.

3 3. Считаем боковую площадь

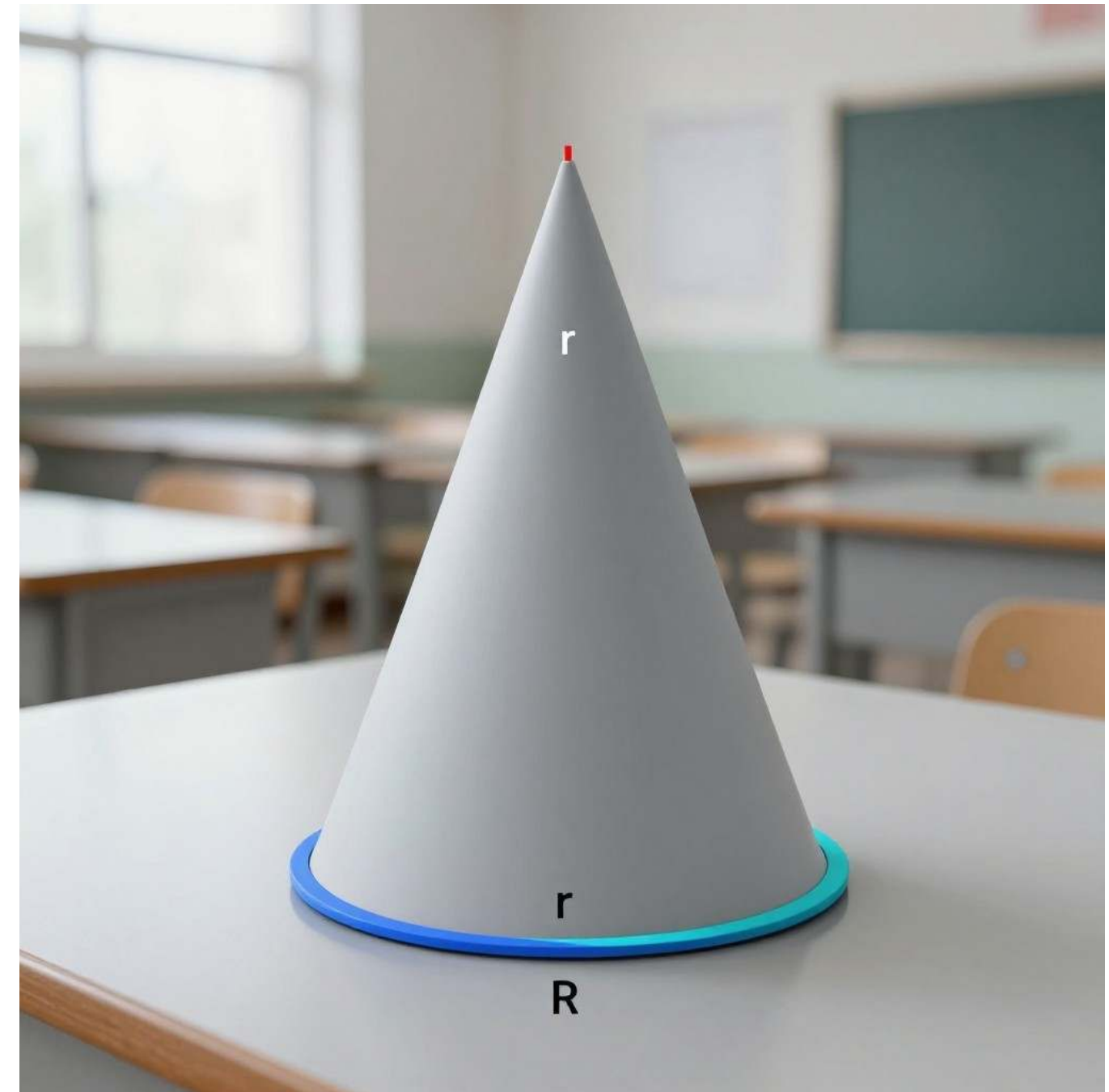
Применяем $S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$. Получаем $S_{\text{бок}} = \pi(6+3) \cdot 5 = 45\pi$ см².
Это площадь только боковой поверхности без оснований.

4 4. Находим полную площадь

Добавляем площади двух оснований: $S_{\text{полн}} = 45\pi + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2$
 $= 45\pi + 36\pi + 9\pi = 90\pi$ см².

5 5. Вычисляем объём

Для объёма используем $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. Подстановка даёт $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (36 + 18 + 9) = 84\pi$ см³.



Главные формулы и практический смысл

Теперь вы умеете находить площадь поверхности и объём усечённого конуса, а также проверять себя через Пифагора и подобие фигур. Эти знания полезны в задачах и в жизни.