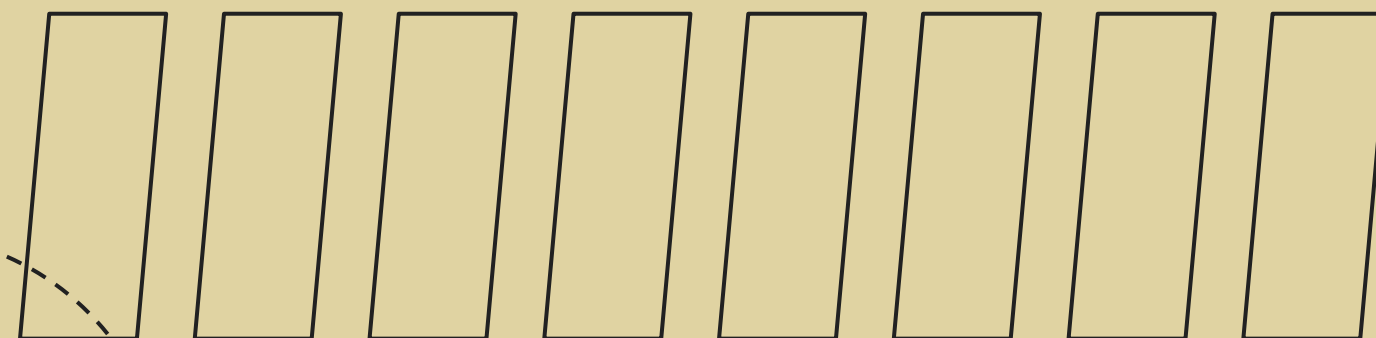


Площади, которые вычисляет определённый интеграл

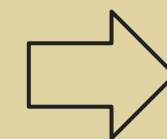
Интеграл превращает криволинейную фигуру
в точный расчёт площади.



От геометрии к точной формуле



Задача о площадях с кривыми границами долго решалась приближённо. Интеграл дал школьной геометрии строгий аналитический инструмент: через график функции, предельный переход и формулу вычисления площади.



Площадь под графиком неотрицательной функции

01

Условие неотрицательности

Если на отрезке $[a; b]$ функция неотрицательна, её график вместе с осью Ox образует фигуру, площадь которой выражается определённым интегралом от $f(x)$ по этому отрезку.

02

Смысл суммы

Интеграл можно понимать как предел суммы площадей очень узких прямоугольников. Каждый такой прямоугольник приближённо описывает малую часть фигуры под графиком.

03

Точность приближения

Чем меньше ширина прямоугольников, тем меньше погрешность приближения. Поэтому увеличение числа разбиений делает оценку площади всё более надёжной и точной.



04

Геометрический результат

Когда функция не меняет знак, значение определённого интеграла совпадает с геометрической площадью рассматриваемой области и не требует дополнительного пересчёта по частям.

Суммы Римана как основа определения интеграла

Построение суммы

В каждой части выбирают точку x_i и строят прямоугольник высотой $f(x_i)$. Сумма $f(x_i)\Delta x$ даёт приближённую площадь под графиком.

Разбиение отрезка

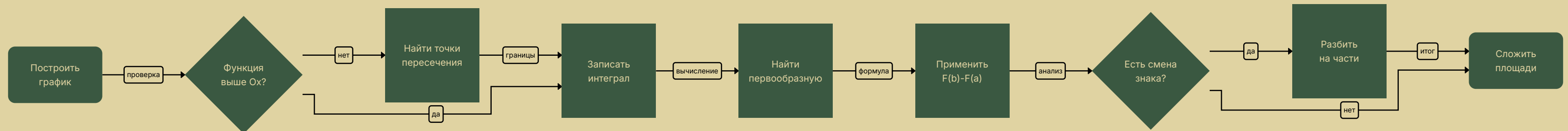
Отрезок $[a; b]$ делят на n малых частей одинаковой ширины Δx , чтобы описать фигуру набором простых прямоугольных элементов.

Предел и интеграл

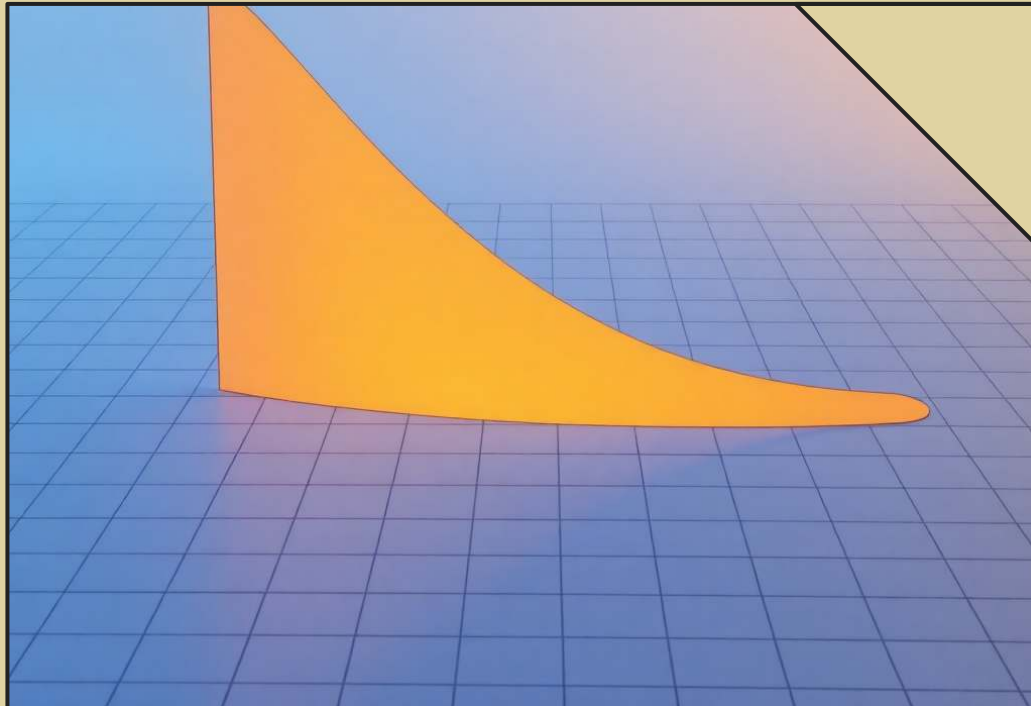
При росте числа разбиений сумма уточняется и в пределе приводит к определённому интегралу, который уже даёт точное значение площади.

Алгоритм вычисления площади с помощью интеграла

✕ Пошаговая схема для задач на площадь под графиком и между графиками

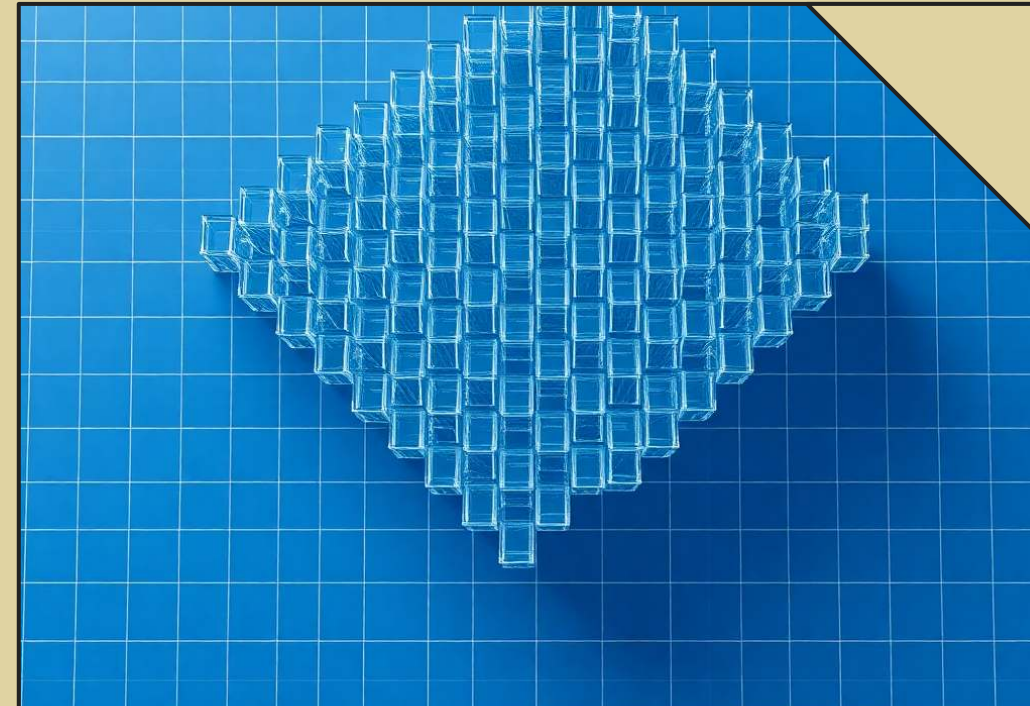


Геометрический смысл интеграла на координатной плоскости



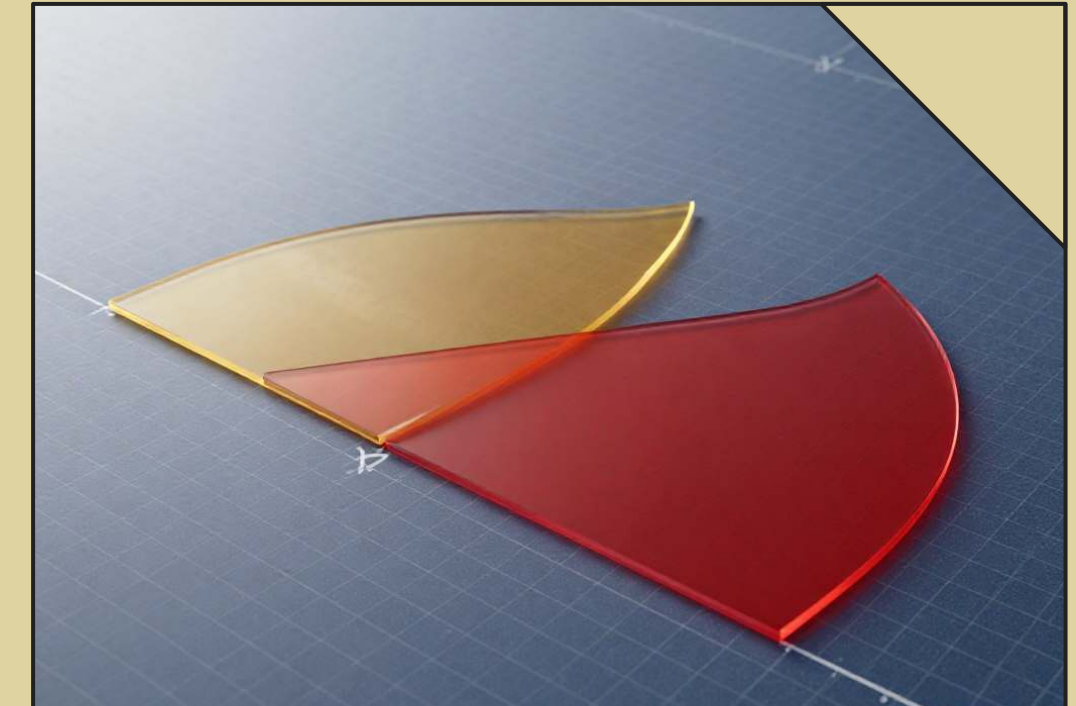
Область под кривой

На координатной плоскости выделена фигура под графиком $y=f(x)$ между $x=a$ и $x=b$. Заштрихованная область наглядно показывает, что интеграл связывает функцию с площадью, а не только



Прямоугольники приближения

Вертикальные разбиения иллюстрируют, как кривая заменяется набором узких прямоугольников. Такой рисунок помогает увидеть, откуда берётся сумма Римана и почему её точность растёт при увеличении числа



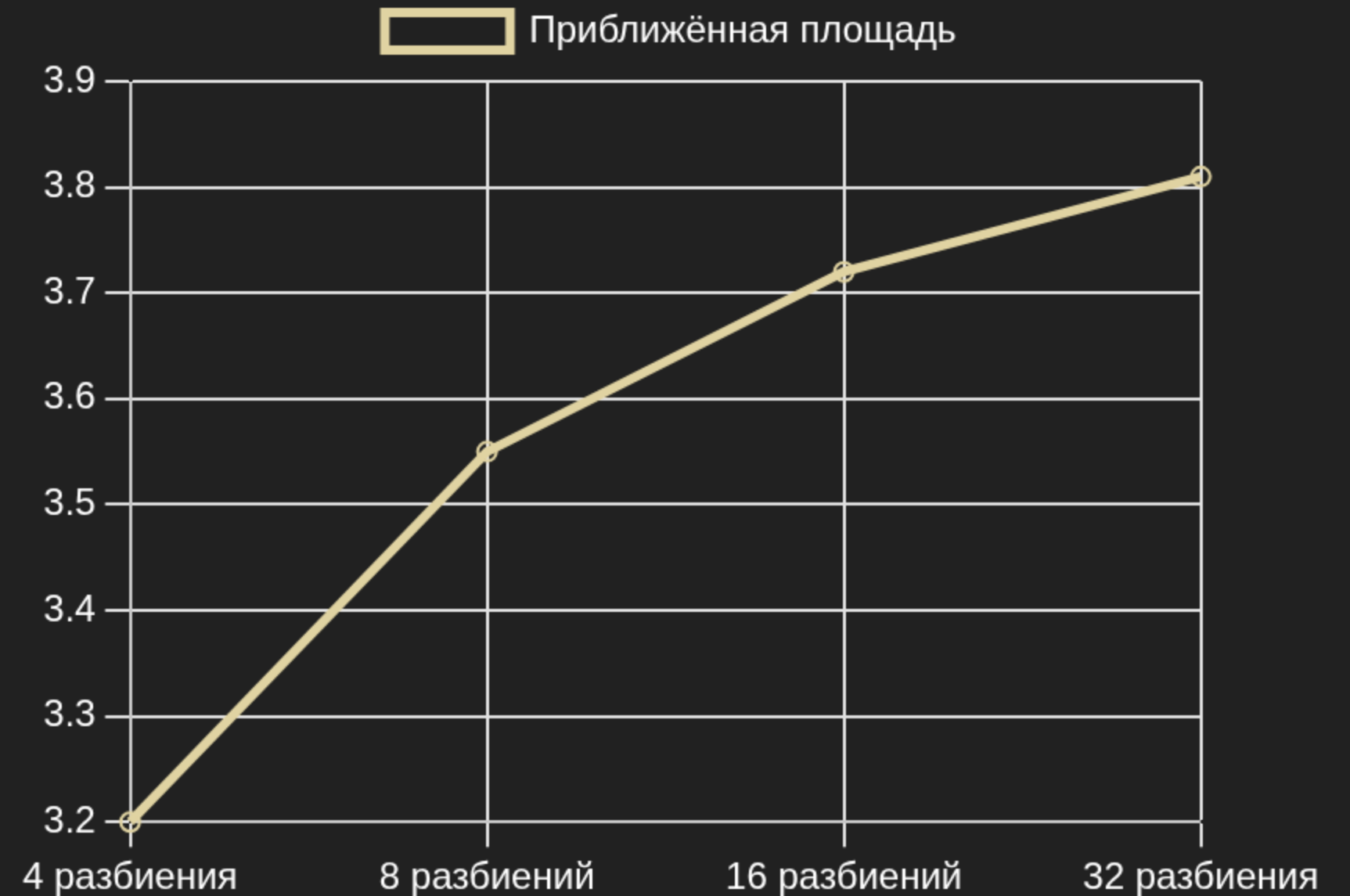
Часть ниже оси

Отдельно выделенный фрагмент ниже оси Ox подчёркивает важную разницу: алгебраическое значение интеграла учитывает знак, а геометрическая площадь всегда берётся без знака и потому может требовать разбиения области

Как меняется точность при увеличении числа разбиений

График показывает последовательное уточнение результата при переходе к более мелким разбиениям отрезка.

Рост точности особенно заметен на первых шагах; затем приближение стабилизируется и становится всё ближе к пределу.



Иллюстративные значения для демонстрации принципа сходимости суммы Римана.

**формула превращает
нахождение площади
в вычисление разности
значений первообразной.**

Одна формула связывает интеграл
с первообразной и делает вычисление
площади доступным без суммирования
прямоугольников.

1

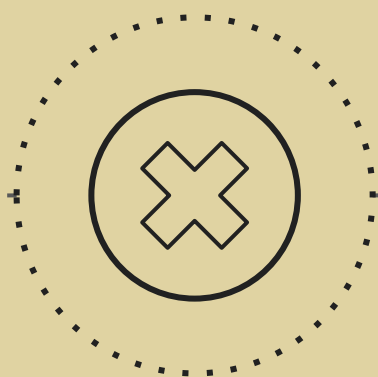
Основные функции и их первообразные

Таблица показывает наиболее употребимые пары «функция – первообразная» и ключевые замечания для вычисления интегралов.

Большинство базовых интегралов сводится к знакомым формулам; константа исчезает в формуле Ньютона–Лейбница.

Функция	Первообразная	Замечание
x^n	$x^{(n+1)/(n+1)}$	$n \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x$	$+C$
e^x	e^x	$+C$
$1/x$	$\ln x $	$+C$

Площадь под осью Ox и значение знака функции



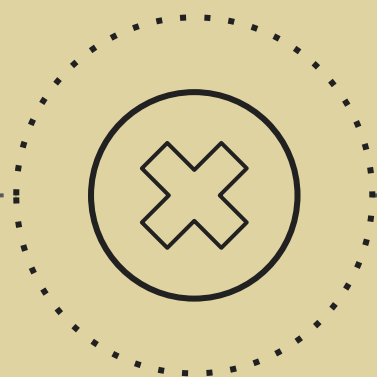
Если график выше оси

Когда функция на всём отрезке неотрицательна, определённый интеграл совпадает с геометрической площадью. В этом случае дополнительное исправление знака не требуется.



Алгебраическая сумма

Интеграл складывает положительные и отрицательные вклады, а не просто измеряет площадь. Это делает его удобным для анализа,



Если часть ниже оси

Участки графика под осью Ox входят в интеграл со знаком минус. Поэтому значение интеграла может оказаться меньше ожидаемой площади или даже сменить знак.



Геометрическая площадь

Если нужна именно площадь фигуры, участки по разные стороны оси рассматривают отдельно и затем складывают по модулю. Так сохраняется реальный



Площадь между двумя графиками

01

Сначала — точки пересечения

Чтобы найти площадь между кривыми, сначала определяют точки их пересечения. Именно они задают границы области, а затем отрезок разбивают на участки, где одна функция остаётся выше другой.

02

Формула для разности

Если на всём промежутке верхней является функция $f(x)$, а нижней — $g(x)$, площадь вычисляют по формуле $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. Так получают именно геометрическую площадь, а не алгебраическую сумму.

03

При смене порядка функций

Когда графики несколько раз меняются местами, один общий интеграл уже не подходит. Каждый участок считают отдельно, выбирая верхнюю и нижнюю функцию заново, чтобы не исказить результат.

04

Почему это удобно

Такой подход позволяет свести сложную фигуру к нескольким простым частям и сохранить наглядность решения. Проверка по рисунку помогает убедиться, что все участки учтены правильно.

Сравнение площадей на одном и том же отрезке

Диаграмма показывает, что три интеграла описывают разные величины, даже если пределы одинаковы. Для площади между графиками важен не только отрезок, но и взаимное расположение функций.

Равные границы интегрирования не означают равные площади: результат определяется формой графиков и их порядком на промежутке.



Схематическая иллюстрация для сравнения величин на одном отрезке

Когда значение интеграла не равно площади

Алгебраический смысл

Определённый интеграл складывает вклад всех участков с учётом знака. Поэтому область ниже оси Ox уменьшает результат, хотя с геометрической точки зрения она всё равно имеет положительную площадь.

Пересечения с осью

Если график несколько раз проходит через ось Ox , положительные и отрицательные части частично взаимно компенсируются. Без разбиения на промежутки можно получить число, далёкое от искомой площади.

Нужен анализ знака

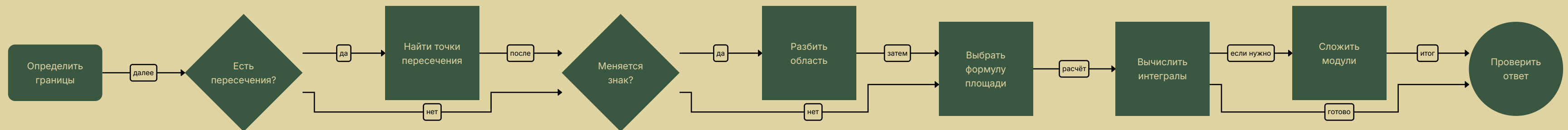
Перед вычислением важно найти нули функции и определить, где она положительна, а где отрицательна. Это позволяет правильно выбрать формулу и не перепутать площадь с интегралом.

Модуль для геометрии

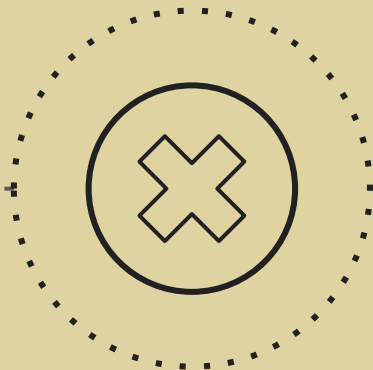
Когда требуется именно площадь фигуры, участки под осью рассматривают отдельно и суммируют по модулю. Тогда результат соответствует реальному размеру области на плоскости.

Как решать задачи на площадь по графику

✗ Последовательность действий при вычислении площади по графику функции или между графиками

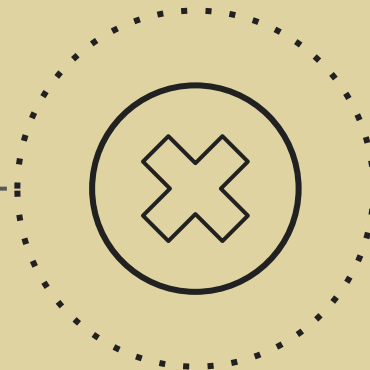


Реальная интерпретация площади: профиль местности или сечения



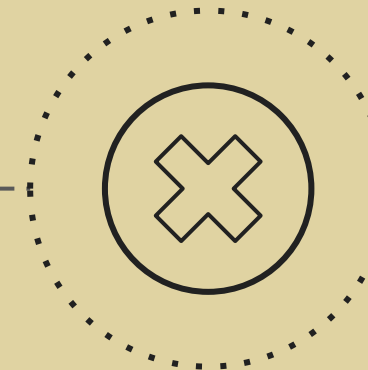
Профиль как график

Если линия на рисунке описывает профиль холма или насыпи, то площадь под графиком отражает поперечное сечение. Именно так абстрактная формула начинает описывать реальную форму объекта.



Переход к объёму

При умножении площади сечения на длину получают объём слоя или тела вращения в простейших моделях. Поэтому интеграл часто используется там, где нужно измерить не только площадь, но и количество материала.



Практическая ценность

Подобные расчёты встречаются в строительстве, инженерии и физике. Они помогают оценивать объём резервуаров, массу распределённых слоёв и другие величины, зависящие от накопления по одной координате.

Типичные ошибки при вычислении площадей

- ✗ В таблице показаны наиболее частые неточности при работе с определёнными интегралами и площадями фигур.
- ✗ Большинство ошибок связано не со сложностью вычислений, а с невнимательной работой с графиком, границами и знаком функции.

Обобщение типичных ошибок из школьных задач на определённый интеграл

Ошибка	Причина	Последствие
Знак не учтён	График ниже Ox	Неверная площадь
Границы выбраны неверно	Не найдены пересечения	Ошибка в отрезке
Не разбит промежуток	Смена знака функции	Потеря смысла
Ошибка в первообразной	Неверная формула	Неверный ответ

Единицы измерения и смысл результата



Согласованные единицы

Если по оси x отложены метры, а по оси y тоже метры, результат интегрирования выражается в квадратных метрах. Единицы по обеим осям определяют единицы площади.



Условные величины

В прикладных задачах оси могут быть подписаны условно: секунды, стоимость, плотность или скорость. Тогда интеграл всё равно показывает накопленный вклад величины на заданном промежутке.



Смысл результата

Число, полученное после вычисления, имеет геометрический или прикладной смысл только вместе с единицами. Без них нельзя понять, что именно измеряет найденная площадь.

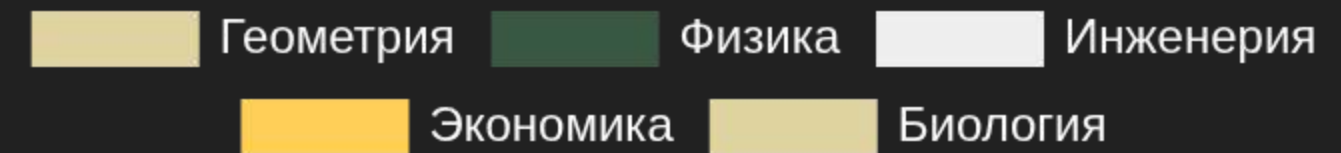
Где площади с помощью интегралов встречаются на практике



На практике одна и та же идея помогает решать задачи разного типа: от измерения сечений до анализа накопленных изменений во времени. Это делает интеграл универсальным инструментом.



Интеграл объединяет разные науки общей идеей накопления, а площадь выступает удобной моделью для описания этого процесса.



Схематическое распределение областей применения в учебных примерах

Условия корректного решения задач на площадь

01

Проверьте область

Сначала нужно точно определить, какая фигура рассматривается на чертеже, и какие линии её ограничивают. Ошибка на этом этапе делает неверным весь дальнейший расчёт.

02

Найдите все пересечения

Точки пересечения с осью Ox или с другой кривой задают границы интегрирования. Если пропустить хотя бы одну из них, часть площади окажется неучтённой.

03

Определите знак функции

На каждом промежутке важно понять, находится ли график выше или ниже оси Ox . Это определяет, нужно ли брать интеграл напрямую или переходить к модулям.

04

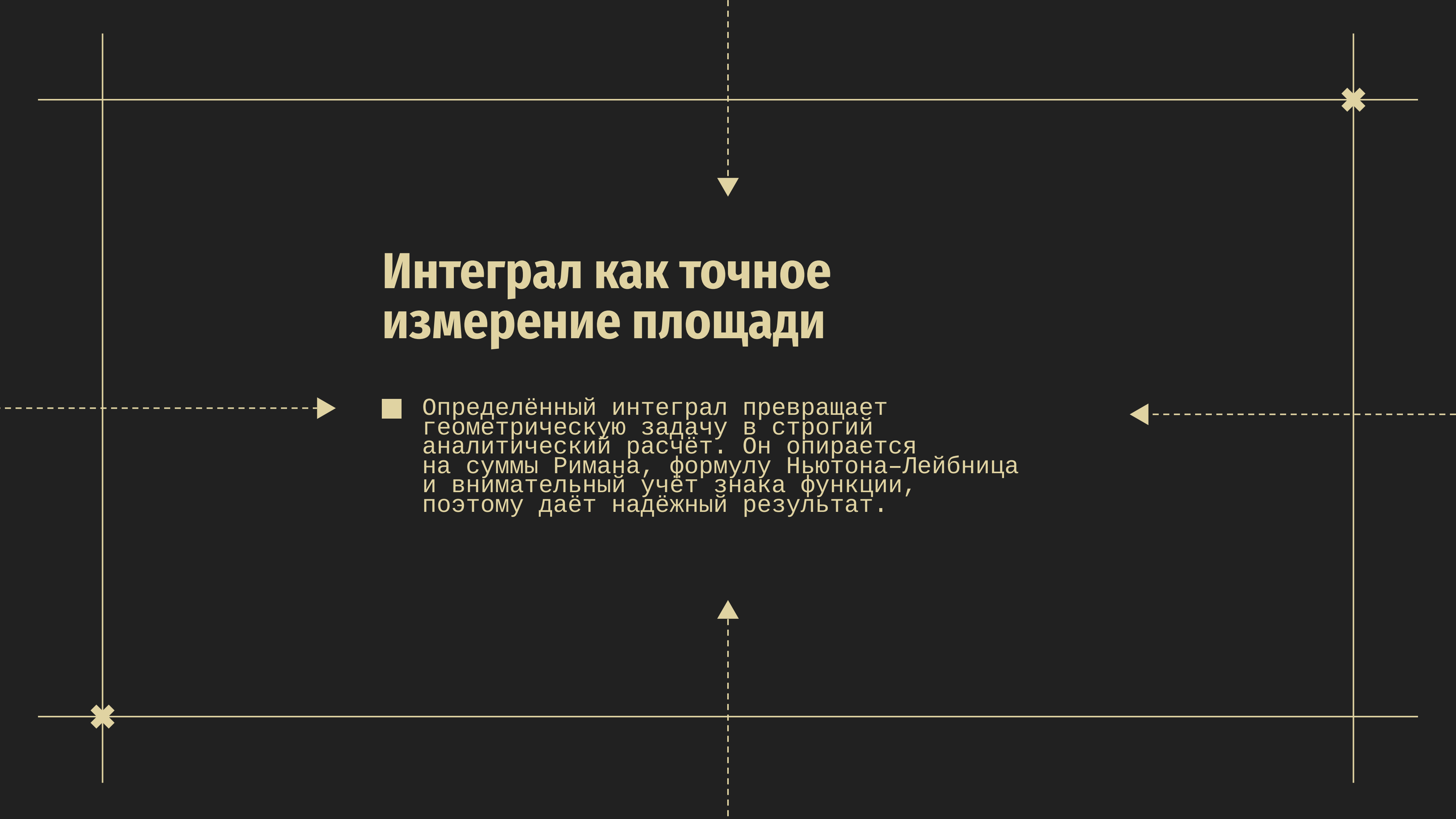
Разбейте сложную область

Если верхняя и нижняя границы меняются местами, фигуру следует разделить на несколько частей. Тогда каждый интеграл будет соответствовать своей геометрической области.

05

Сверьте ответ

После вычислений полезно сопоставить результат с рисунком и с единицами измерения. Такая проверка помогает заметить вычислительные и логические ошибки ещё до сдачи решения.



Интеграл как точное измерение площади

- Определённый интеграл превращает геометрическую задачу в строгий аналитический расчёт. Он опирается на суммы Римана, формулу Ньютона–Лейбница и внимательный учёт знака функции, поэтому даёт надёжный результат.