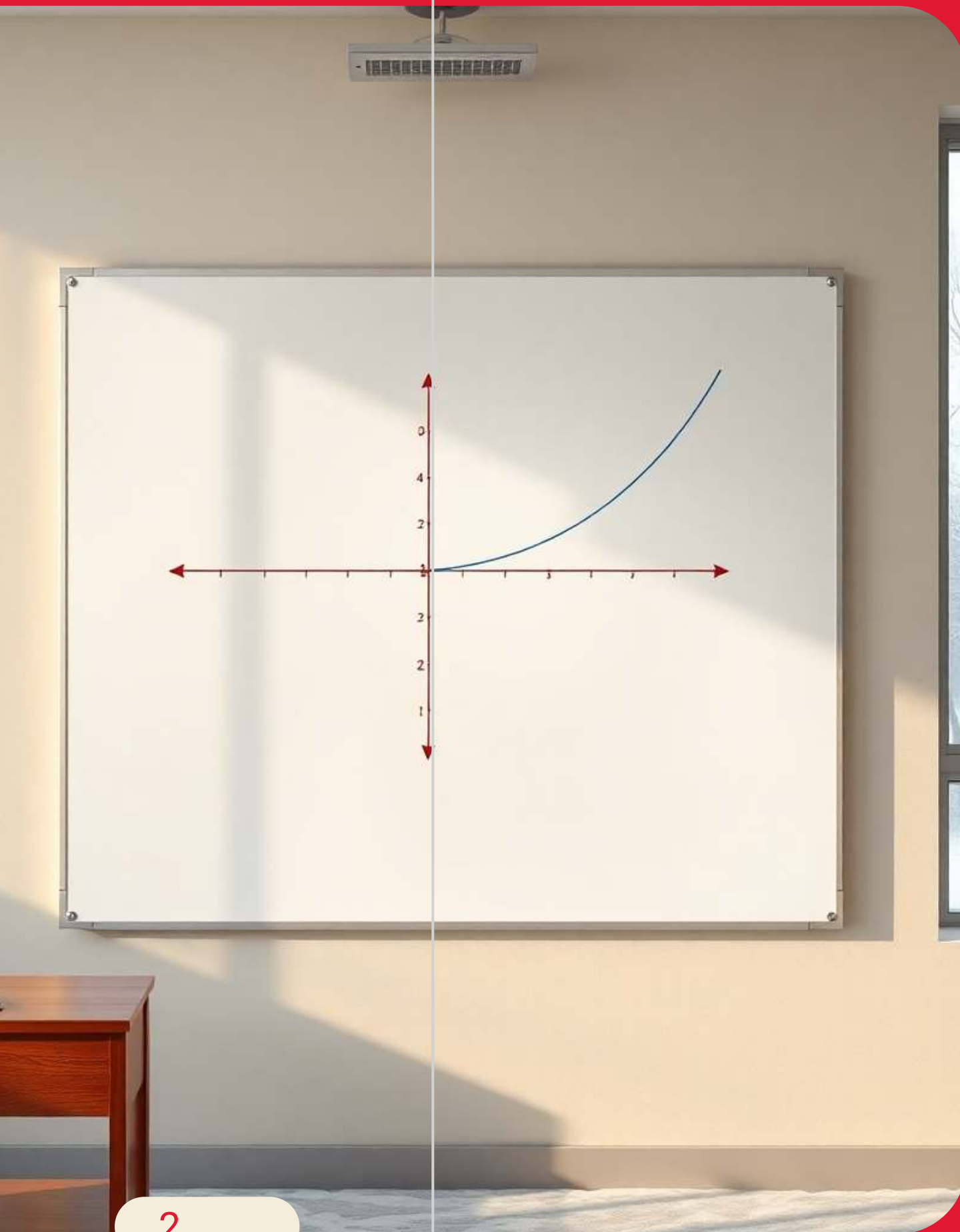




Графическое решение квадратных уравнений

Парабола показывает корни уравнения наглядно и понятно.



Почему графический способ полезен

Квадратные уравнения часто встречаются в задачах о движении, площади и высоте. График помогает не только получить ответ, но и увидеть, сколько решений есть и где они расположены.

Что называют квадратным уравнением

01

Общий вид

Квадратное уравнение записывают так: $ax^2+bx+c=0$, где a не равно нулю. Именно наличие члена x^2 делает его квадратным.

02

Коэффициенты

Числа a , b и c называют коэффициентами. Они определяют форму графика и влияют на то, сколько корней получится у уравнения.

03

Частные случаи

Если $b=0$ или $c=0$, уравнение может выглядеть проще, но остаётся квадратным, пока в нём есть член x^2 .

04

Примеры

К квадратным относятся уравнения $x^2-4=0$, $2x^2-3x+1=0$ и $-x^2+5x=0$. Все они имеют степень два.

График квадратной функции — парабола

Форма графика

График функции $y=ax^2+bx+c$ всегда имеет вид параболы. Это одна из самых важных фигур в теме квадратных уравнений.

Направление ветвей

При $a>0$ парабола открывается вверх, а при $a<0$ — вниз. Знак коэффициента сразу подсказывает, куда будут направлены её ветви.

Вершина графика

Вершина показывает наибольшее или наименьшее значение функции. Именно в этой точке парабола меняет направление движения.

Ось симметрии

Ось симметрии делит параболу на две зеркальные части. Благодаря ей можно находить точки графика парами и строить его аккуратнее.



Сколько корней показывает график

Чем больше точек пересечения с осью Ox , тем больше действительных корней у уравнения.

График сразу показывает три случая: два корня, один корень или отсутствие действительных решений.

Схематическое сравнение случаев для параболы $y=ax^2+bx+c$ и оси Ox .



Пошаговый алгоритм графического решения

1. Записать уравнение

Приводим выражение к виду $ax^2+bx+c=0$, чтобы сразу видеть коэффициенты и удобно перейти к функции.

2. Построить функцию

Рассматриваем $y=ax^2+bx+c$ и понимаем, что её график будет параболой.

4. Прочитать корни

Смотрим, где график пересекает ось Ox : абсциссы этих точек и есть корни уравнения.

3. Нанести точки

Подбираем несколько значений x , считаем y и отмечаем точки на координатной плоскости.

Точки для построения параболы

$y=x^2-4$

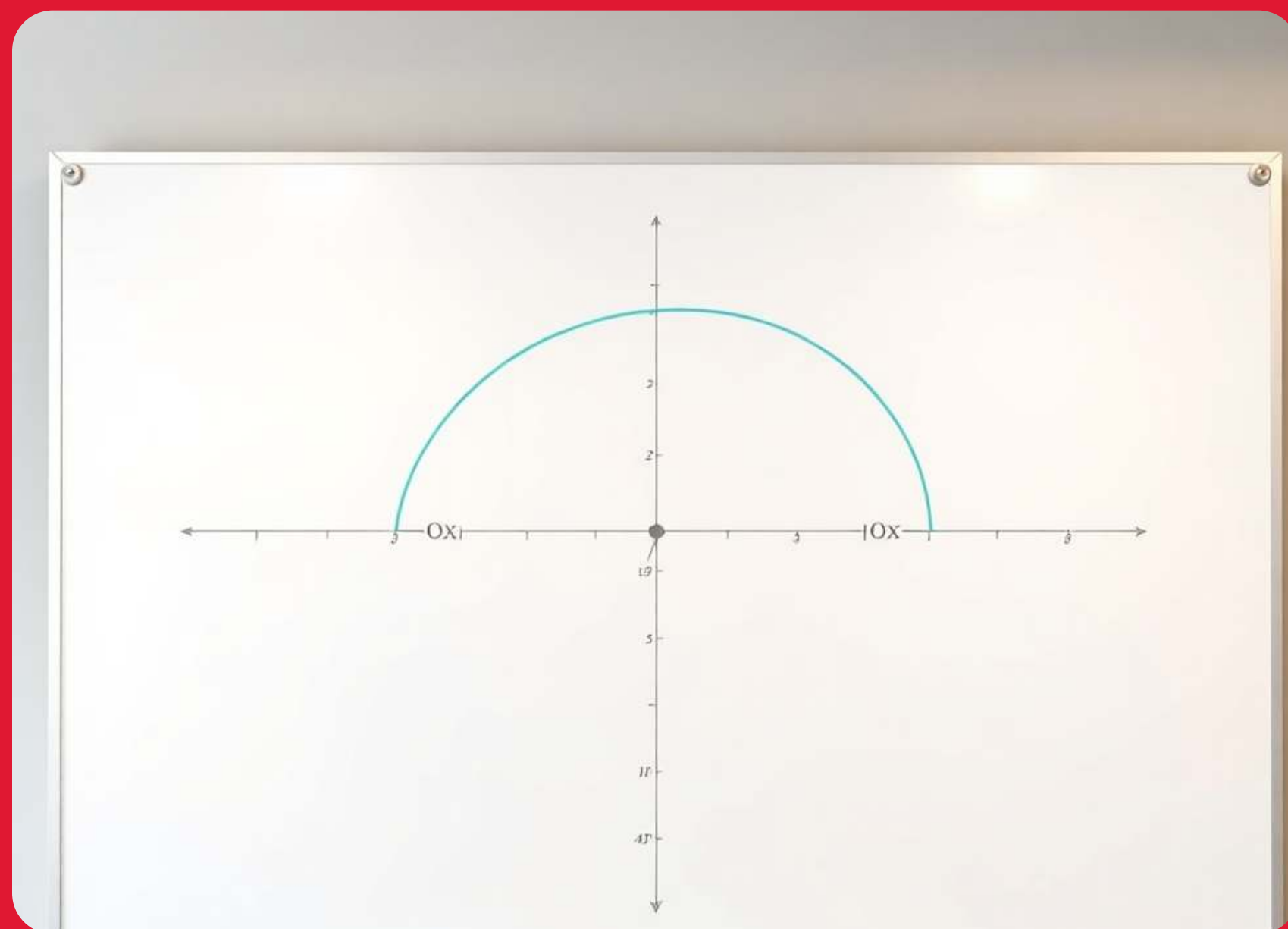
Значения получены подстановкой каждого x в формулу $y=x^2-4$.
Таблица показывает симметрию относительно оси y .

Нули функции видны при $x=-2$ и $x=2$, а симметрия значений подтверждает правильность таблицы.

Подстановка значений x в функцию $y=x^2-4$.

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

Пример: уравнение $x^2 - 4 = 0$



Связь с функцией

Уравнение $x^2 - 4 = 0$ связано с функцией $y = x^2 - 4$. Поэтому для решения можно построить её график и посмотреть, где он пересекает ось Ox .



Найденные корни

Точки пересечения находятся при $x = -2$ и $x = 2$. Эти значения и являются корнями уравнения, потому что в них функция равна нулю.

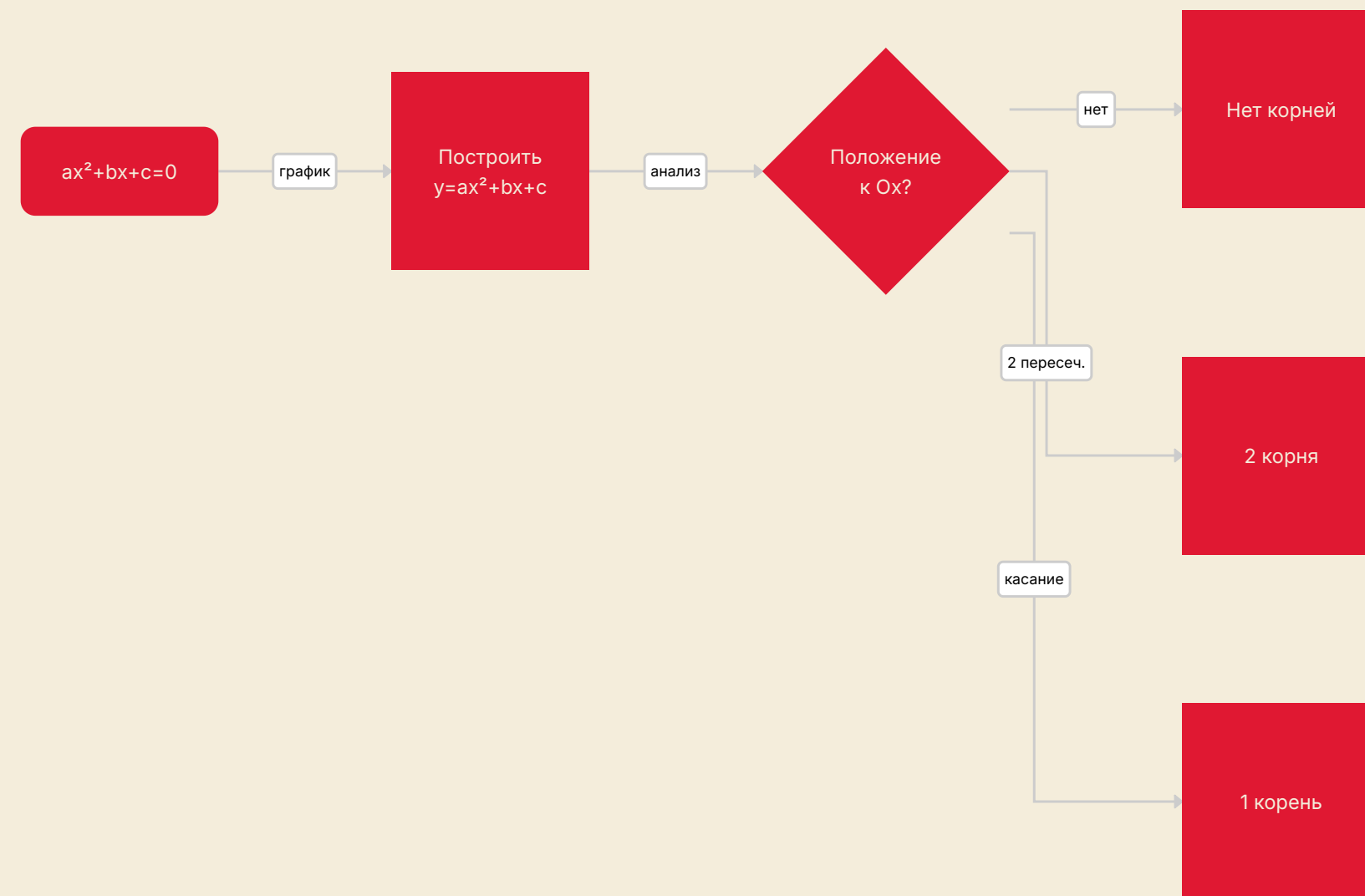


Что показать на рисунке

На изображении удобно выделить параболу, ось Ox и две отмеченные точки пересечения. Тогда связь между графиком и решением станет сразу очевидной.

Как найти корни по графику

Схема показывает переход от уравнения к графику и затем к ответу.



3

значения дискриминанта задают три случая числа действительных корней.

Дискриминант помогает быстро определить, сколько решений имеет квадратное уравнение, так же как и график параболы.

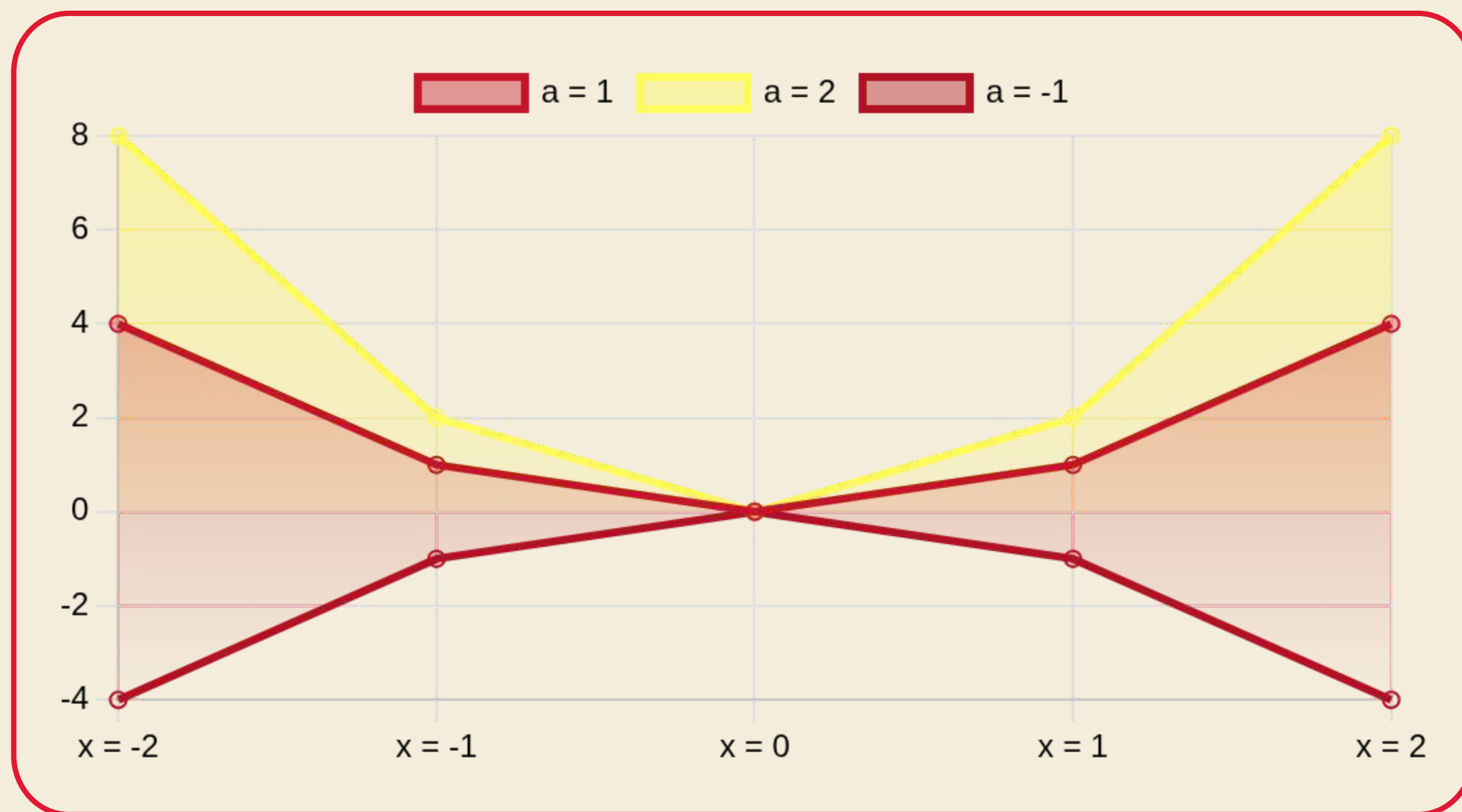
Правило о связи знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ с числом действительных корней.

Как коэффициент a меняет форму параболы

При одинаковом наборе x видно, как меняется крутизна и направление ветвей. Это помогает заранее представить вид графика ещё до построения.

Чем больше $|a|$, тем уже параболола; при $a < 0$ она переворачивается вниз.

Построено по значениям функции $y = ax^2$ для $a = 1, 2$ и -1 .



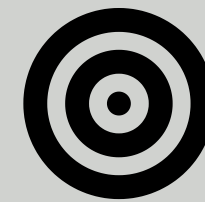
Ключевые свойства параболы

Ось симметрии



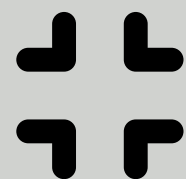
Ось симметрии проходит через вершину и делит параболу на две зеркальные части. По одной стороне можно восстановить другую, если известна хотя бы одна точка графика.

Вершина графика



Вершина показывает наибольшее или наименьшее значение функции. Для квадратичной функции её координаты особенно важны, потому что рядом с вершиной удобно искать точки для построения.

Ширина параболы



Коэффициент a влияет на «крутизну» графика: при большем модуле парабола становится уже. Это помогает сравнивать несколько функций и быстро понимать, как изменится рисунок.

Парные точки



Симметрия позволяет выбирать точки попарно: если слева от оси есть точка с заданной высотой, справа найдётся такая же по высоте. Так построение становится быстрее и точнее.

Когда уравнение имеет один корень

01

Касание оси Ox

Если парабола не проходит через ось Ox , а лишь касается её в одной точке, уравнение имеет один действительный корень. Это значит, что график даёт только одно решение.

02

Связь с дискриминантом

Такой случай соответствует условию $D = 0$. Формула и график описывают одну и ту же ситуацию: корни совпадают, поэтому на оси видна только одна точка.

03

Как не перепутать случай

На рисунке важно показать именно касание, а не пересечение. Тогда легко отличить один корень от двух и правильно связать форму параболы с числом решений.



Три случая по графику и по дискриминанту

Сравнение показывает, как одно и то же уравнение можно описать формулой и рисунком.

Знак дискриминанта полностью совпадает с числом действительных корней, поэтому оба способа взаимно проверяют друг друга.

Обобщение связи между дискриминантом и положением параболы относительно оси Ox .

D	График	Корни
$D < 0$	нет пересечений	0
$D = 0$	касание Ox	1
$D > 0$	2 пересечения	2

Проверка найденных корней

01

Подстановка в уравнение

Найденные по графику значения нужно подставить в исходное уравнение. Если после вычислений получается верное равенство, значит корень определён правильно и точка пересечения прочитана верно.

02

Пример с $x = -2$ и $x = 2$

Для уравнения $x^2 - 4 = 0$ подстановка даёт $4 - 4 = 0$ в обоих случаях. Это подтверждает, что оба значения действительно являются корнями, а график прочитан без ошибки.

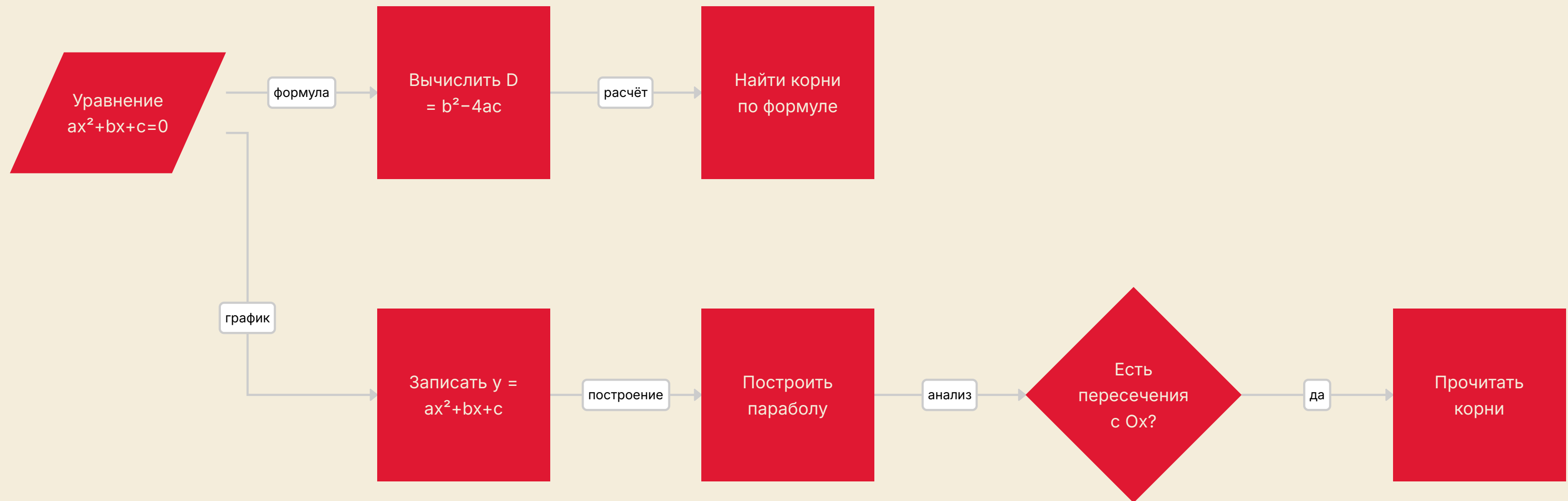
03

Зачем нужна проверка

Проверка помогает заметить неточности в масштабе, в координатах и в чтении осей. Особенно это важно, когда точки пересечения расположены близко к целым числам или график построен схематично.

Два пути к ответу: графический и аналитический

Схема показывает два равноправных способа решения квадратного уравнения и их общий результат.



Квадратные уравнения вокруг нас



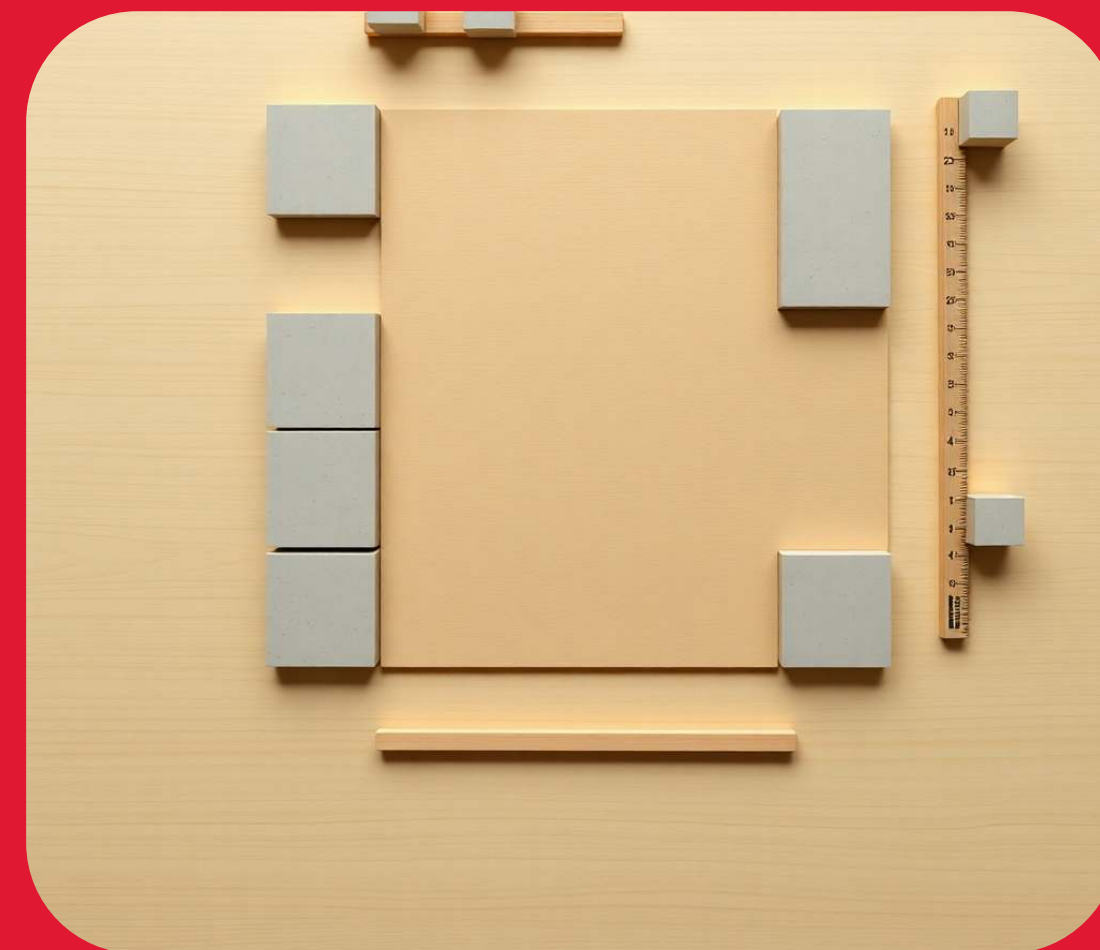
Мяч после броска

Высота мяча меняется неравномерно: сначала он поднимается, затем опускается. На графике это удобно показать параболой, а точка пересечения с осью времени помогает понять, когда мяч касается земли.



Арка и струя воды

Форма арки в архитектуре и траектория струи воды часто напоминают параболу. Если рассматривать такую ситуацию на рисунке, сразу видно, где объект достигает вершины и где возвращается к уровню основания.



Площадь и размеры

В задачах на площадь квадратные уравнения возникают, когда неизвестная величина входит в формулу дважды. График помогает увидеть, при каких значениях длины или высоты задача имеет реальный ответ.

Типичные ошибки при графическом решении

Ошибки чаще всего связаны не с формулой, а с построением и чтением координат. Поэтому важны аккуратность, масштаб и проверка каждого шага.

Наибольший риск дают неверные точки и неточное чтение пересечений: именно они чаще всего искажают число или значения корней.

Содержательный анализ типичных ошибок при графическом решении квадратных уравнений.



Итоговый пример решения

— Строим функцию

Для уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ рассматриваем функцию $y = x^2 - 3x + 2$. Её график — парабола, а корни уравнения ищем по точкам пересечения с осью Ox .

— Находим корни

Парабола пересекает ось Ox в точках $x = 1$ и $x = 2$. Это означает, что уравнение имеет два действительных корня, и оба легко читаются с графика.

— Проверяем ответ

Подстановка показывает, что $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ и $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Значит, графический результат верен, а аналитическая проверка его подтверждает.

Парабола подсказывает ответ

Графическое решение делает квадратное уравнение наглядным: по параболе сразу видно число корней, их положение и связь с коэффициентами. Это удобный способ проверить ответ и лучше понять тему.