

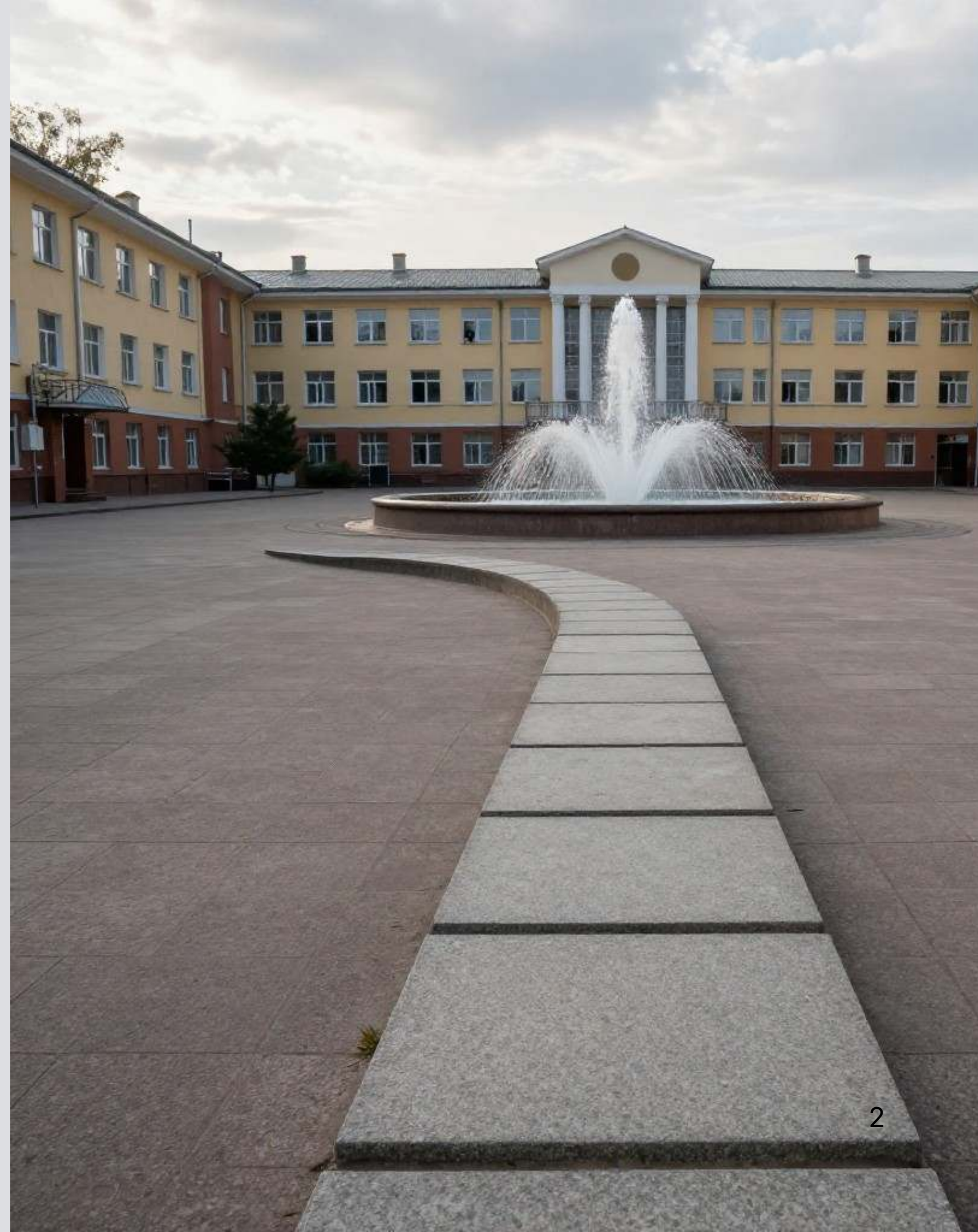
Квадратичная функция, её график и свойства

Парабола, её вершина, ось симметрии и корни функции.



Зачем изучать квадратичную функцию

Эта тема помогает строить графики, решать квадратные уравнения и находить максимум или минимум величины в задачах из математики и жизни.



Общий вид квадратичной функции

1

Формула функции

Квадратичная функция записывается как $y=ax^2+bx+c$. Здесь a , b и c — коэффициенты, которые определяют вид графика и его положение на координатной плоскости.

2

Почему a не равно нулю

Если $a=0$, член x^2 исчезает, и функция перестаёт быть квадратичной. Именно квадрат переменной создаёт характерную форму параболы и её свойства.

3

Что показывает c

Коэффициент c равен значению функции при $x=0$. Поэтому он сразу указывает точку пересечения графика с осью Oy без дополнительных вычислений.

Парабола как график квадратичной функции



Основная форма

График квадратичной функции всегда имеет форму параболы. Это плавная линия с одной вершиной и двумя ветвями, расположенными симметрично относительно оси.

Направление ветвей

Если $a > 0$, парабола открывается вверх. Если $a < 0$, её ветви направлены вниз, и график как бы отражается относительно оси Ox .

Ось симметрии

Парабола делится осью симметрии на две одинаковые части. Каждая точка слева имеет пару справа на таком же расстоянии от этой оси.

Что стоит подписать на рисунке

На изображении удобно отметить вершину, ось симметрии, точку пересечения с осью Oy и несколько точек, чтобы форма графика читалась сразу.

Как коэффициент a меняет форму параболы

Сравнение трёх графиков показывает, как знак и модуль коэффициента a изменяют направление и крутизну параболы.

Чем больше $|a|$, тем уже график; отрицательный a меняет направление ветвей на противоположное.

Расчётные значения для функций $y=x^2$, $y=2x^2$ и $y=-x^2$ при $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

Роль коэффициента b в положении графика



Сдвиг по горизонтали

Коэффициент b влияет на то, где расположена парабола по горизонтали. Он определяет, насколько вершина смещена влево или вправо относительно оси Oy .



Ось симметрии

Для функции $y=ax^2+bx+c$ ось симметрии находится по формуле $x=-b/(2a)$. Эта запись позволяет быстро найти положение центра параболы без полного построения.



Положение вершины

Когда $b=0$, ось симметрии совпадает с осью Oy , а вершина лежит на этой прямой. Тогда график не смещён влево или вправо.

Что обозначают коэффициенты a , b и c

Коэффициент	Что задаёт	Связь с графиком
a	ветви	ширина
b	ось симметрии	смещение вершины
c	точка Oy	пересечение

Каждый коэффициент отвечает за своё свойство графика квадратичной функции.

По коэффициентам можно заранее понять форму и положение параболы, не строя график целиком.

Формула $y=ax^2+bx+c$

Вершина параболы и её координаты

1

Как найти абсциссу

Абсцисса вершины вычисляется по формуле $x = -b/(2a)$. Это самый быстрый способ узнать, где находится наивысшая или наинизшая точка параболы.

2

Как найти ординату

После нахождения x подставляют его в функцию: $y = f(-b/(2a))$. Так получают вторую координату вершины и точное значение экстремума функции.

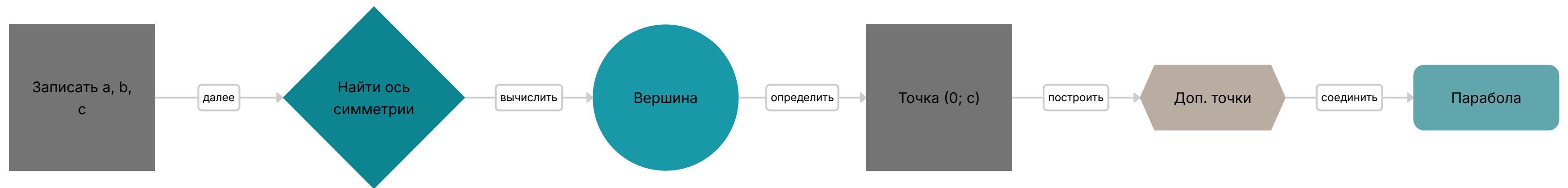
3

Почему вершина важна

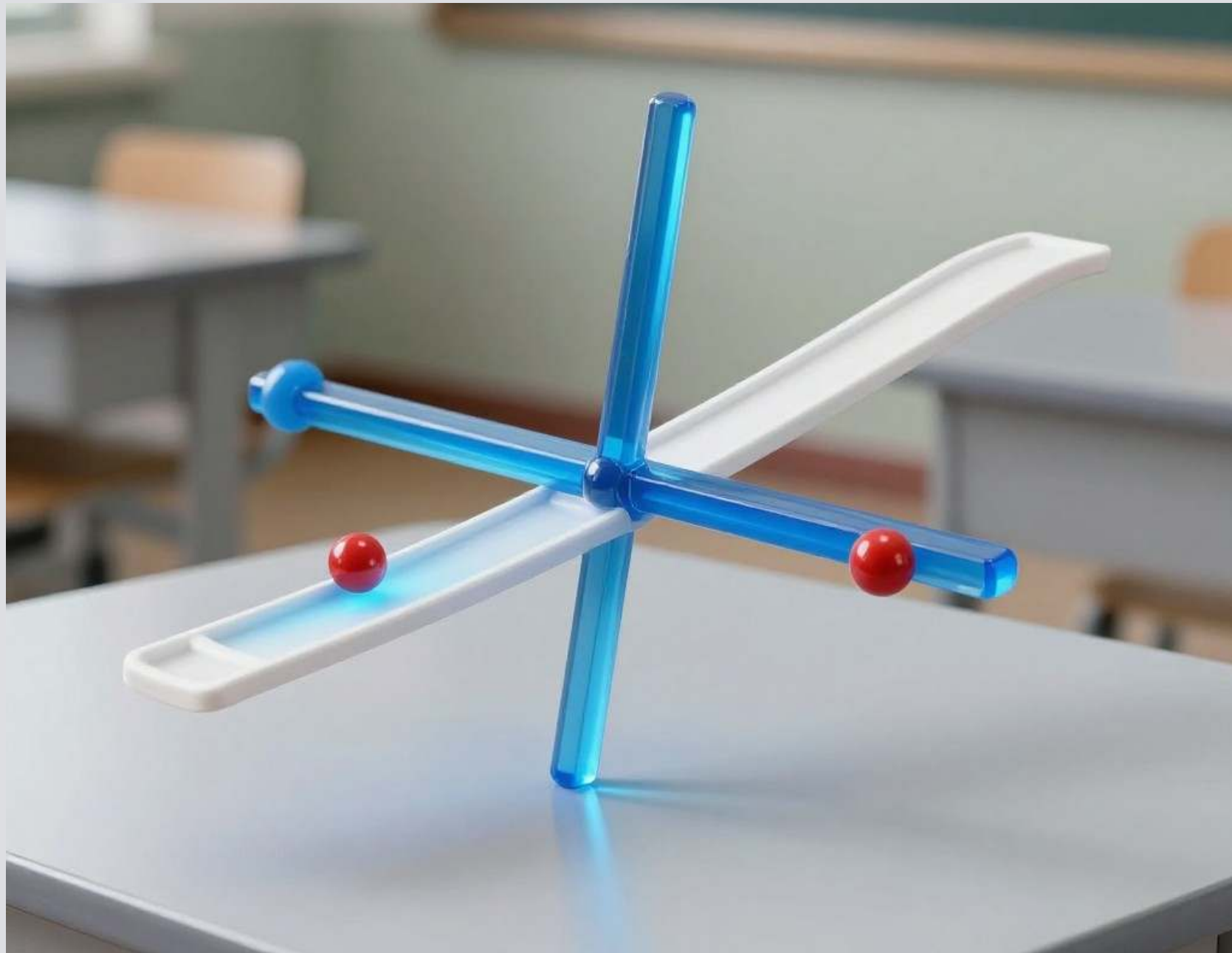
Если $a > 0$, в вершине находится наименьшее значение функции. Если $a < 0$, там находится наибольшее значение. Это особенно полезно в задачах на выбор лучшего результата.

Алгоритм построения параболы

Последовательность действий при исследовании функции $y=ax^2+bx+c$



Пересечения с осями координат



Пересечение с осью Oy

График всегда проходит через точку $(0; c)$, потому что при $x=0$ остаётся только свободный член. Эта точка помогает быстро начать построение параболы.

Точки на оси Ox

Пересечения с осью Ox находят из уравнения $ax^2+bx+c=0$. Корни этого уравнения показывают, где значения функции равны нулю.

Сколько может быть пересечений

Если корней два, парабола пересекает ось Ox в двух точках. Если корень один, она касается оси. Если корней нет, пересечений нет.

Нули функции и дискриминант

Дискриминант позволяет заранее понять, сколько раз парабола может пересечь ось Ox , не решая уравнение полностью.

Чем больше дискриминант, тем больше действительных корней; при отрицательном значении пересечения с осью Ox нет.

Формула $D=b^2-4ac$ и связь дискриминанта с корнями квадратного уравнения.

Как работает симметрия параболы



Свойства и их смысл

Свойство	Что означает	Краткий вывод
Область определения	Все x	Нет ограничений
Направление ветвей	Зависит от a	Вверх или вниз
Пересечение с Oy	Точка $(0; c)$	Задаёт коэффициент c

Таблица помогает быстро связать каждый коэффициент и ключевое свойство графика квадратичной функции.

Квадратичная функция описывается простыми правилами: каждый коэффициент отвечает за отдельную часть графика и помогает быстро его исследовать.

Свойства параболы и формула $y=ax^2+bx+c$.

Три удобных преобразования параболы



Сдвиг вверх

Если к $y=x^2$ прибавить число, парабола поднимется выше, но её форма и ширина останутся такими же. Например, $y=x^2+3$ смещает график на 3 единицы вверх.



Сдвиг вправо

Запись $y=(x-2)^2$ означает, что весь график смещён вправо на 2 единицы. Вершина меняет положение, но парабола остаётся той же по виду.



Форма не меняется

При таких преобразованиях сохраняются симметрия и плавность линии. Меняется только расположение графика на координатной плоскости, а не его основная форма.

Сравнение графиков при сдвигах

Во всех трёх случаях графики остаются параболами, но их вершины занимают разные положения на координатной плоскости.

Сдвиги изменяют только расположение графика, а не его вид; это удобно для быстрого сравнения функций.



Пример преобразований графика $y=x^2$:
сдвиг вправо и вниз.

Квадратичные функции в практических задачах

1

Движение тела

При броске вверх высота объекта сначала увеличивается, затем уменьшается. Такое изменение часто описывается параболой, поэтому по ней удобно находить момент максимальной высоты.

2

Максимальная площадь

В геометрических задачах квадратичная зависимость помогает выбирать размеры фигуры так, чтобы площадь была наибольшей или наименьшей. Для этого особенно важна вершина графика.

3

Школьные опыты

В задачах про мяч или шарик высота над землёй меняется по закону, близкому к параболе. Это делает график наглядной моделью реального движения.

4

Экономика и выбор решения

В простых экономических моделях парабола помогает сравнивать варианты и находить лучший результат. График показывает, где значение величины становится самым выгодным.

Типичные ошибки при построении параболы



Неверный знак a

Если перепутать знак коэффициента a , ветви параболы будут направлены не туда. Из-за этого весь график получится противоположным по виду, хотя формула почти не меняется.

Ошибка в оси симметрии

Формулу $x = -b/(2a)$ часто записывают неверно или считают с ошибкой. Тогда вершина ставится не на своё место, и график теряет симметрию.

Путаница c с x и корнями

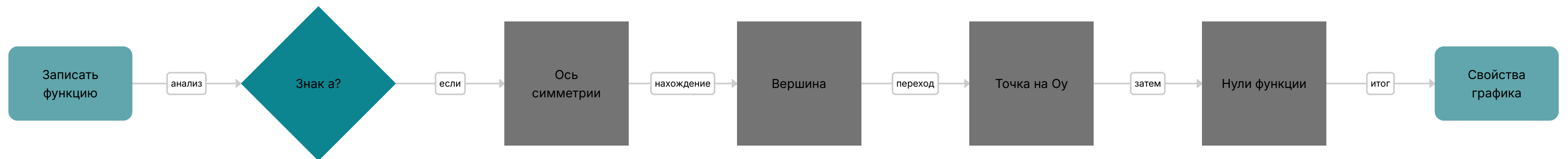
Коэффициент c задаёт точку пересечения с осью Oy , а корни квадратного уравнения показывают пересечения с осью Ox . Это разные элементы графика.

Нет проверки симметрии

Если не сравнить точки слева и справа от оси, легко заметить неточность уже после построения. Проверка симметрии помогает исправить график вовремя.

Пошаговое исследование квадратичной функции

Последовательность действий при работе с формулой $y=ax^2+bx+c$

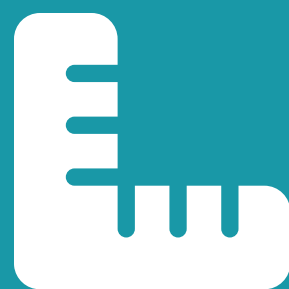


Главные признаки параболы



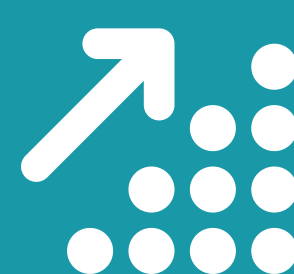
Одна вершина

У параболы есть единственная вершина — самая высокая или самая низкая точка графика. По ней удобно сразу понять, где функция принимает экстремальное значение.



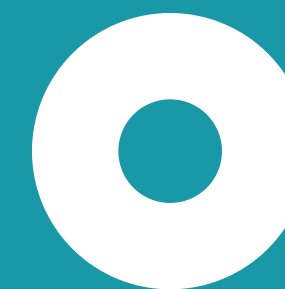
Ось симметрии

Парабола делится на две зеркальные части одной вертикальной прямой. Если график построен верно, обе половины совпадают по форме и положению точек.



Направление ветвей

При $a > 0$ ветви направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Этот признак помогает быстро определить общий вид графика ещё до точных вычислений.



Пересечения с осями

Коэффициент c показывает точку на оси Oy , а корни уравнения — точки на оси Ox . По ним легко проверить правильность построения графика.

Квадратичная функция: главное в одной теме

Квадратичная функция объединяет формулу, график и уравнения. Если понимать роль коэффициентов a , b и c , параболу можно быстро исследовать, строить и применять в задачах.