



Разность квадратов, сумма и разность кубов

Три формулы, которые упрощают алгебру и экономят время на уроке.



Почему эти формулы важны

Они помогают раскладывать многочлены на множители, сокращать дроби и упрощать выражения. Это тождества: они верны при любых значениях букв и выводятся из правил умножения.



Геометрический смысл разности квадратов



Большой и маленький квадраты

Если из площади квадрата со стороной a вычесть площадь квадрата со стороной b , остаётся фигура, которую можно перестроить без потерь и наложений.



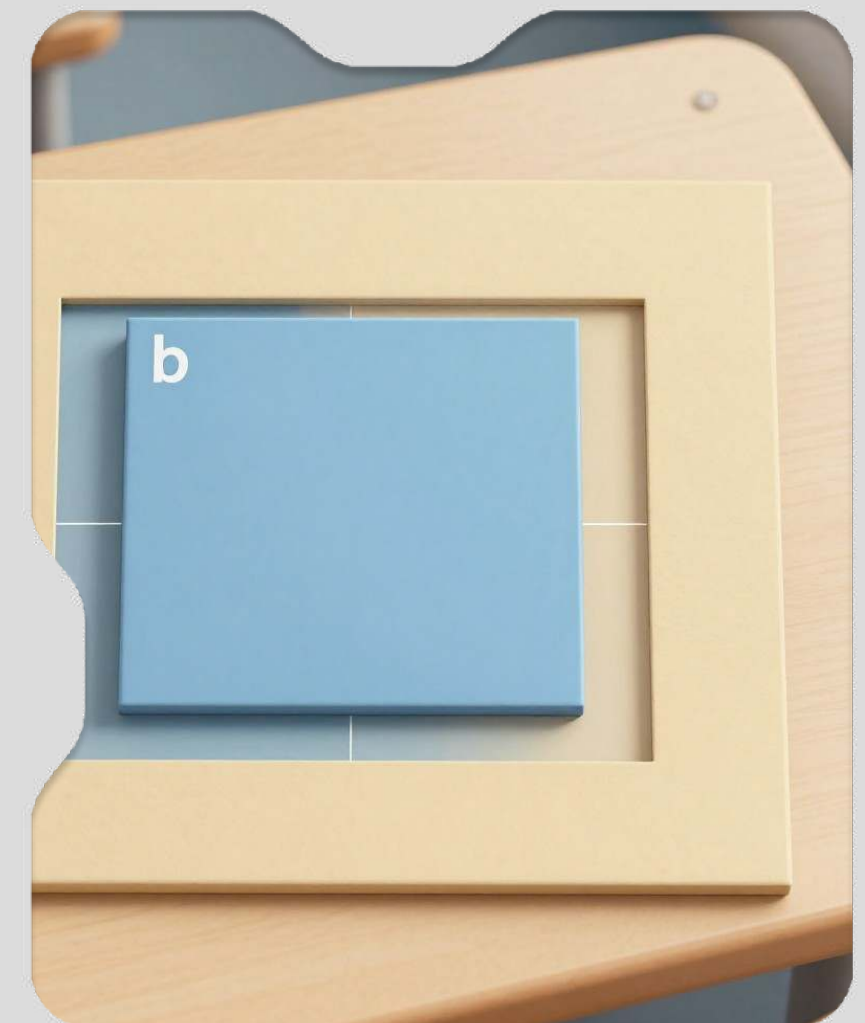
Фигура превращается в прямоугольник

Оставшуюся часть удобно представить как прямоугольник со сторонами $a-b$ и $a+b$. Его площадь равна произведению этих сторон, что и даёт формулу.



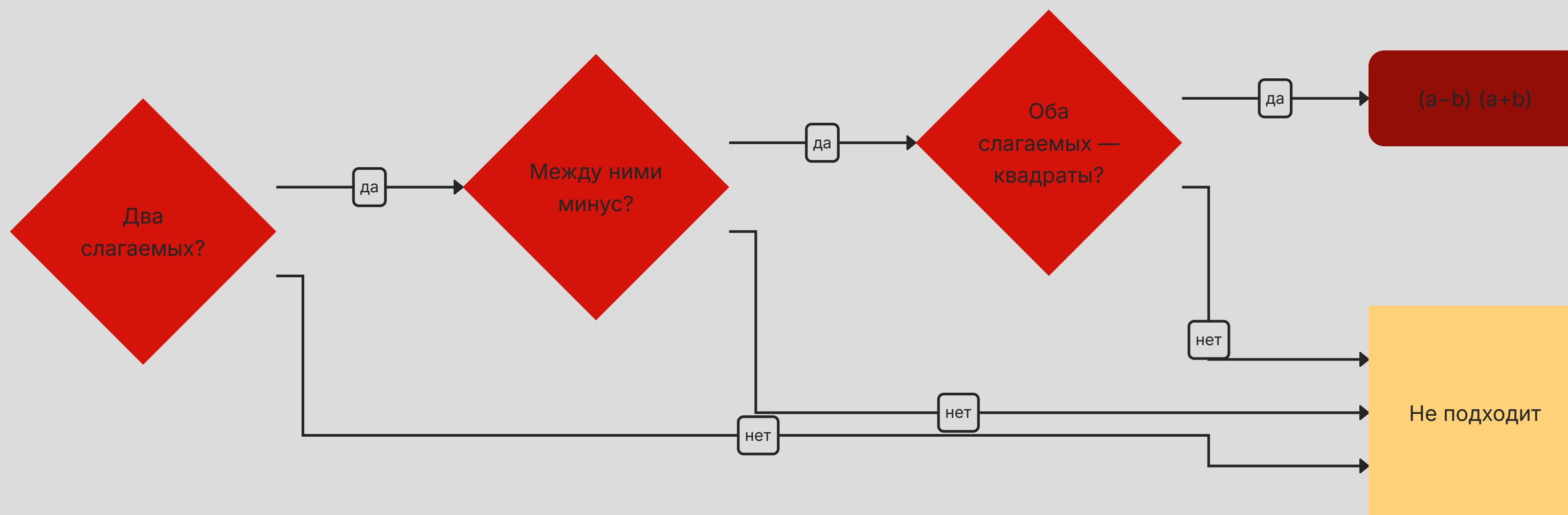
Как запомнить идею

Разность квадратов показывает не просто вычисление, а переход от двух квадратов к одному прямоугольнику. Такой образ помогает быстрее понимать, почему появляются две разные скобки.



Как распознать разность квадратов

Алгоритм выбора формулы по виду выражения



Примеры разложения разности квадратов

В примерах сначала находят корни из квадратов, а затем записывают две скобки: с минусом и с плюсом.

Во всех случаях работает один и тот же шаблон: разность квадратов всегда раскладывается на произведение суммы и разности.

Выражение	Корни	Ответ
x^2-1	$x, 1$	$(x-1)(x+1)$
$4a^2-9$	$2a, 3$	$(2a-3)(2a+3)$
$25m^2-n^2$	$5m, n$	$(5m-n)(5m+n)$

Школьный курс алгебры 7 класса

Типичные ошибки при разности квадратов

.01

Неверный корень

Часто путают число и его квадрат: например, 16 — это не квадрат 8, а 4^2 . Сначала нужно найти правильный корень, иначе разложение получится неверным.

.02

Неправильные скобки

Ошибка — записать $(a-b)^2$ вместо $(a-b)(a+b)$. В формуле одна скобка содержит минус, а другая — плюс, и именно это нужно запомнить.

.03

Сумма квадратов не подходит

Выражение a^2+b^2 нельзя разложить по этой схеме. Здесь нет разности, поэтому формула разности квадратов не применяется, даже если оба слагаемых являются квадратами.

Какие выражения подходят для формул разложения



Сравнение показывает, что знак и степень сразу подсказывают, можно ли применить изученные формулы.

Разность квадратов, сумма кубов и разность кубов разлагаются по шаблону; сумма квадратов — нет.

Учебные примеры по алгебре 7 класса

Как устроена сумма кубов

.01

Первая скобка

В формуле $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ первая скобка повторяет знак между кубами. Поэтому при сумме кубов в ней обязательно стоит плюс.

.02

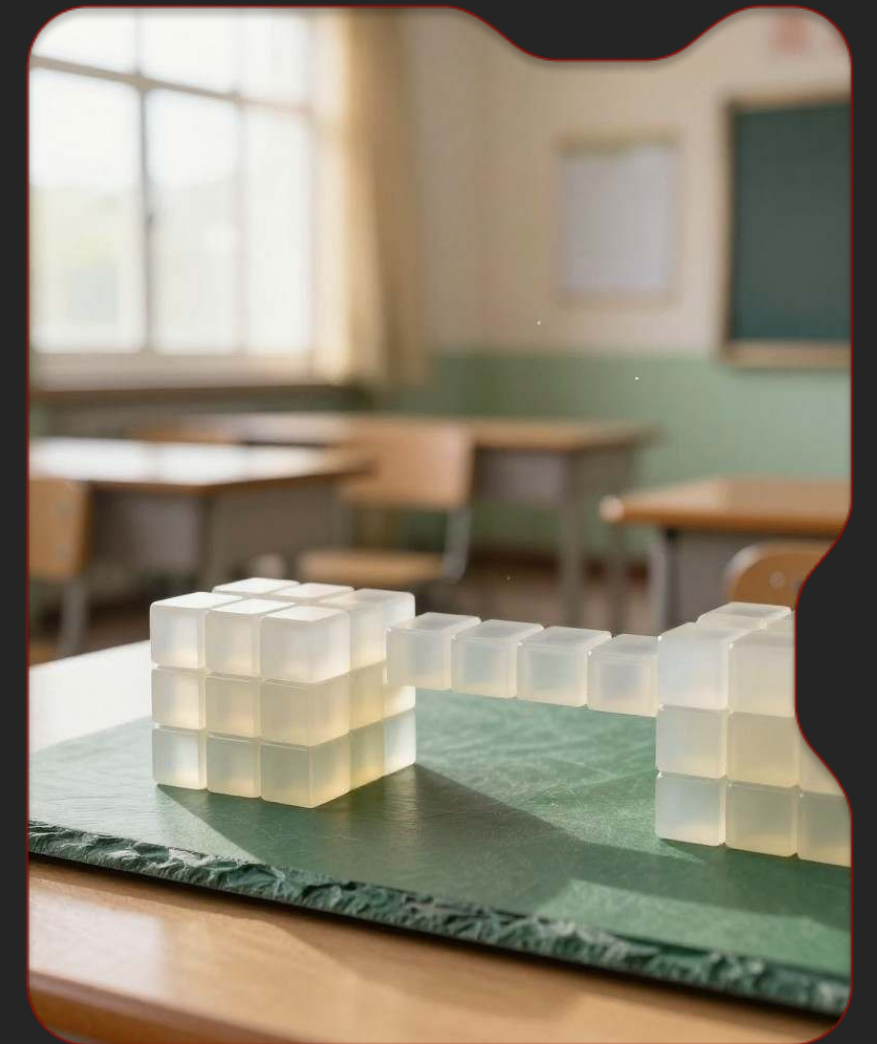
Второй множитель

Во второй скобке сначала пишут квадрат первого числа, затем минус произведения двух чисел, затем квадрат второго числа. Средний член нужен для правильного раскрытия скобок.

.03

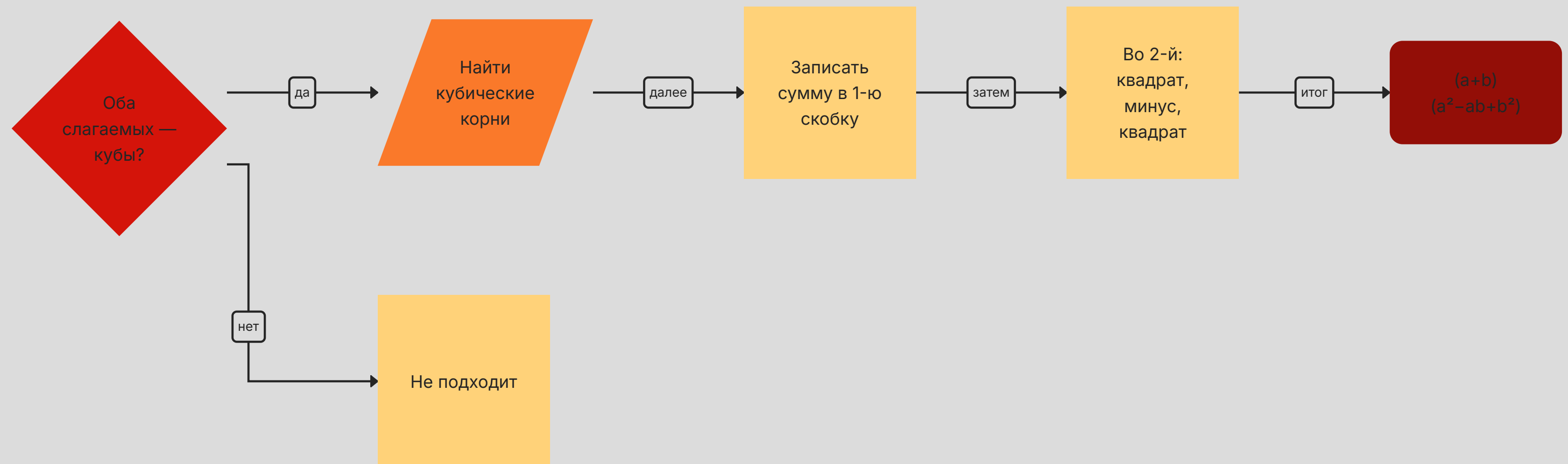
Пример с числами

Если $8+27=2^3+3^3$, то можно сразу записать: $(2+3)(4-6+9)$. Такой пример помогает увидеть формулу не только в буквах, но и в обычных числах.



Алгоритм разложения суммы кубов

Шаги для выражений вида a^3+b^3



Примеры разложения суммы кубов

Выражение	Разложение	Корни
x^3+8	$(x+2)(x^2-2x+4)$	$x, 2$
$27a^3+1$	$(3a+1)(9a^2-3a+1)$	$3a, 1$
$125y^3+8$	$(5y+2)(25y^2-10y+4)$	$5y, 2$

Во всех примерах второй множитель содержит три слагаемых и не раскладывается дальше по этой теме.

Если оба слагаемых — кубы, сумма сразу раскладывается по одной и той же схеме.

Почему в формуле суммы кубов появляется именно такой второй множитель

.01

Раскрытие скобок

Если умножить $(a+b)$ на (a^2-ab+b^2) , то при раскрытии скобок появляются три группы слагаемых. Крайние члены дают a^3 и b^3 , а средние взаимно сокращаются.

.02

Почему именно такие знаки

Минус перед ab нужен, чтобы убрать лишние члены после умножения. Если бы во второй скобке стояли другие знаки, сокращения не произошло бы и формула не сработала.

.03

Проверка результата

После приведения подобных слагаемых остаётся только a^3+b^3 . Поэтому второй множитель всегда записывают как квадрат первого числа, минус произведение, затем квадрат второго числа.

Как устроена разность кубов



Первая скобка

В формуле $a^3 - b^3$ первый множитель повторяет знак между кубами: $a - b$. Это помогает быстро узнать нужную схему, если выражение записано в виде разности двух кубов.



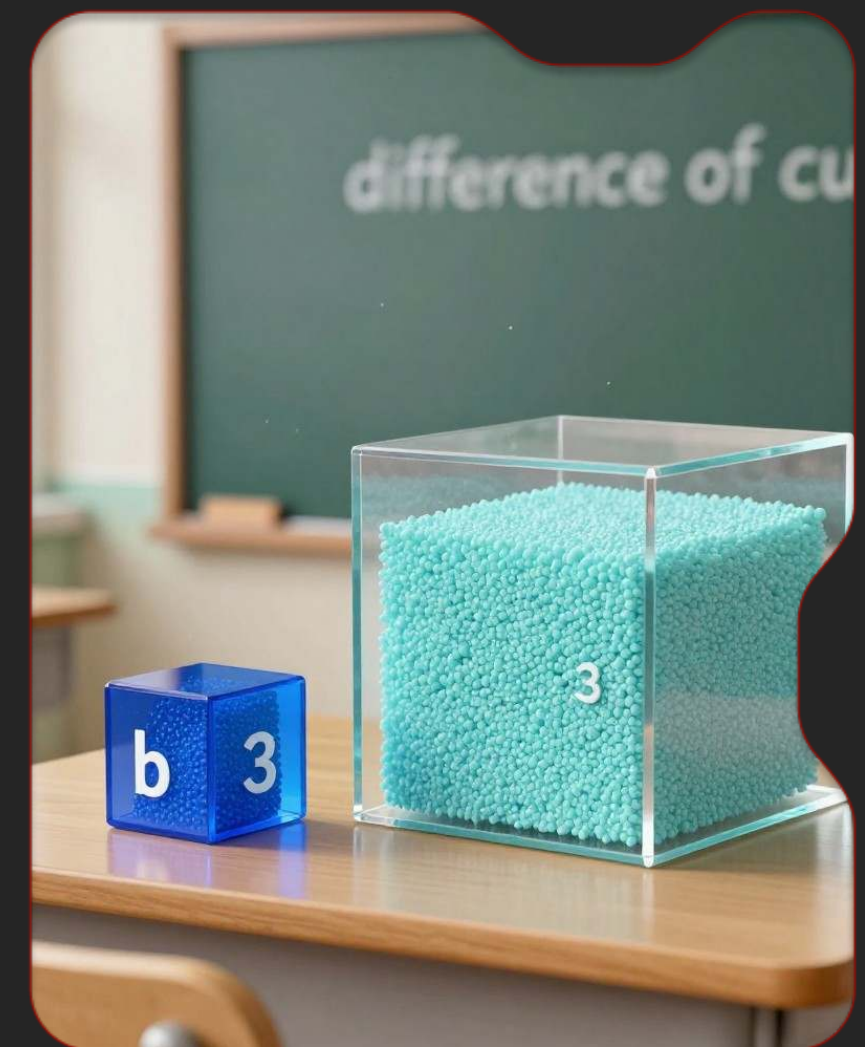
Вторая скобка

Во втором множителе все знаки положительные: $a^2 + ab + b^2$. Такая запись появляется потому, что при раскрытии скобок лишние отрицательные члены взаимно уничтожаются.



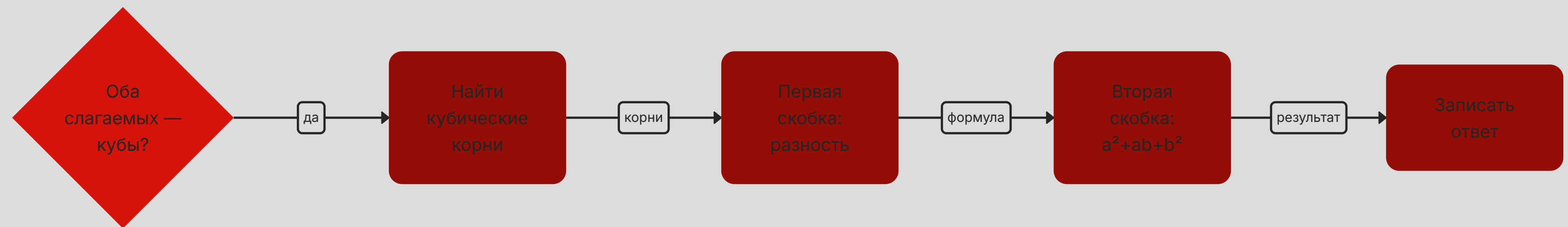
Пример разложения

Например, $x^3 - 27$ можно представить как $x^3 - 3^3$. Тогда $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$. Этот шаблон удобно использовать при разложении многочленов и сокращении выражений.

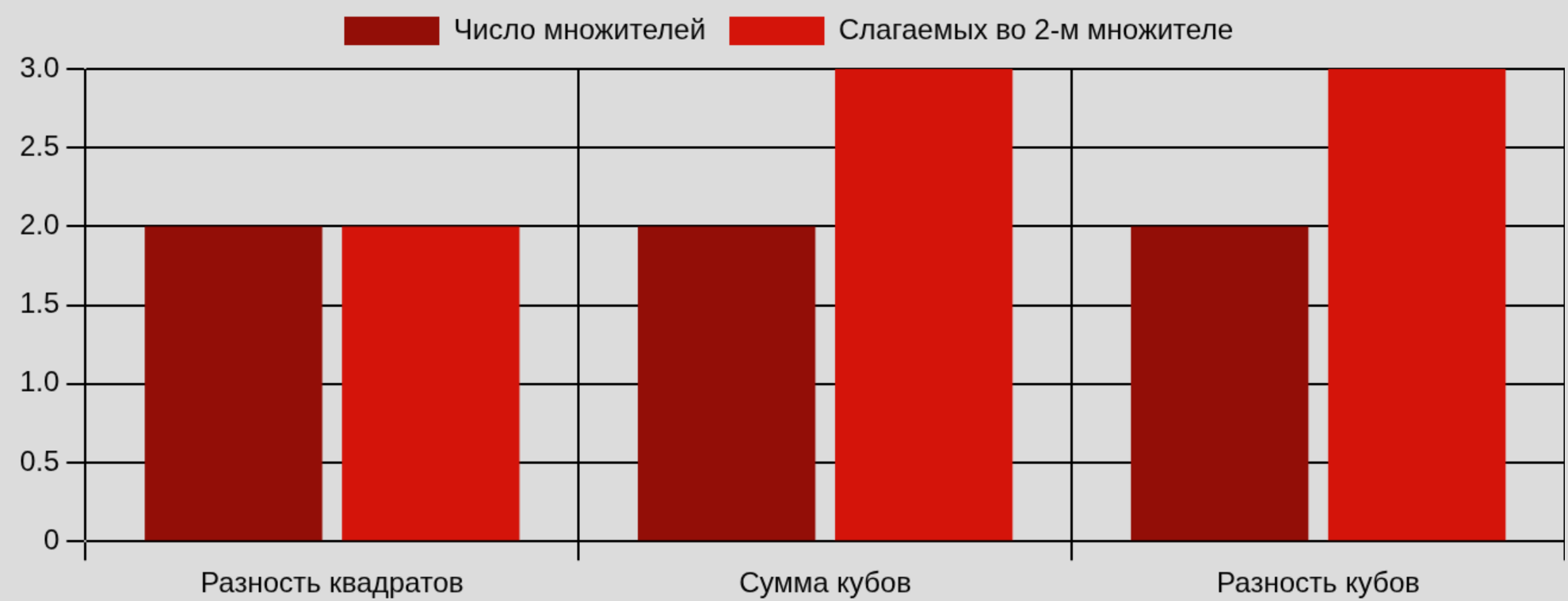


Алгоритм разложения разности кубов

Шаги помогают распознавать выражение и сразу подбирать правильные скобки для формулы $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.



Сравнение трёх формул по строению

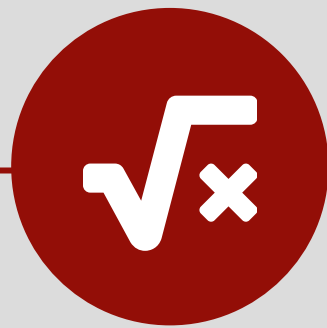


На схеме видно, что все формулы приводят выражение к произведению, но у кубических случаев второй множитель всегда длиннее и содержит три слагаемых.

У разности квадратов структура проще, а обе кубические формулы отличаются только знаком во второй скобке.

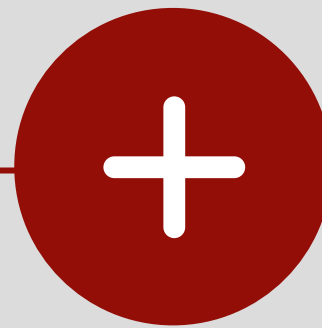
Школьная алгебра, тема «Разность квадратов. Сумма и разность кубов»

Связь формул с раскрытием скобок



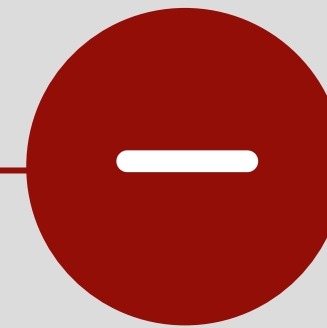
Разность квадратов

При умножении $(a-b)(a+b)$ одинаковые средние части сокращаются, поэтому остаётся разность квадратов. Это объясняет, почему формула выглядит именно как пара противоположных скобок.



Сумма кубов

Формула суммы кубов получается из раскрытия скобок, где средние члены взаимно уничтожаются. Вторая скобка специально построена так, чтобы после умножения остались только a^3 и b^3 .



Разность кубов

Для разности кубов действует тот же принцип: произведение скобок раскрывается и сводится к исходной разности. Поэтому запомнить формулу легче, если проверять её умножением.

Проверка формул на простых числах

Подстановка небольших чисел помогает убедиться, что формулы дают тот же результат, что и прямое вычисление.

Во всех трёх случаях значения совпадают, значит формулы верны и могут использоваться как тождества.

Пример	Слева	Справа
$4^2 - 1^2$	15	15
$2^3 + 3^3$	35	35
$5^3 - 2^3$	117	117

Школьный курс алгебры; проверочные примеры по теме

Где эти формулы особенно полезны

.01

Сокращение дробей

Если в числителе или знаменателе стоит разность квадратов, её можно разложить на множители и сократить дробь. Это часто делает выражение намного проще.

.02

Разложение многочленов

Формулы помогают быстро выделить множители в выражениях вида разности квадратов, суммы кубов и разности кубов. Так легче увидеть структуру многочлена и продолжить преобразование.

.03

Удобные вычисления

Иногда выражение можно посчитать быстрее через формулу, чем через возведение в степень. Это особенно полезно, когда числа большие и прямой способ получается длинным.

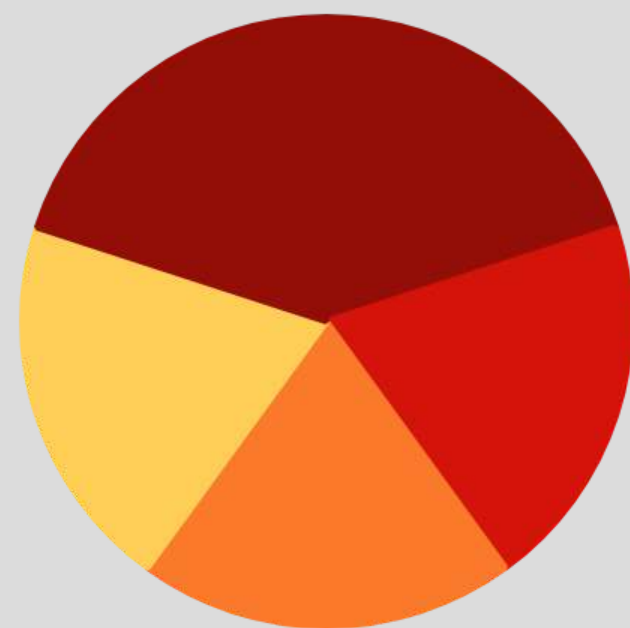
.04

Решение уравнений

При решении уравнений разложение на множители позволяет вынести общий множитель или получить произведение, равное нулю. Тогда ответ находится по более короткому пути.

Частые ошибки при разложении на множители

■ Путаница знаков ■ Неверный корень ■ Сумма квадратов ■ Ошибка во 2-й скобке
■ Нет проверки



Схематическая подборка типичных ошибок по теме

Большинство ошибок возникает не из-за самой формулы, а из-за спешки: ученик пропускает проверку, неверно находит корни или выбирает неправильный знак.

Надёжнее всего сначала распознать тип выражения, затем аккуратно подобрать знаки и обязательно проверить ответ раскрытием скобок.



3

шаблона
достаточно,
чтобы быстро
распознавать
нужный вид
разложения.

Если помнить три шаблона, можно почти сразу выбрать правильную формулу: две скобки для квадратов и три слагаемых во второй скобке для кубов.

Школьная алгебра, тема «Разность квадратов. Сумма и разность кубов»

Формулы, которые экономят время

Разность квадратов, сумма кубов и разность кубов —
удобные тождества, которые помогают быстро
раскладывать выражения на множители, упрощать
записи и решать алгебраические задачи без лишних
вычислений.