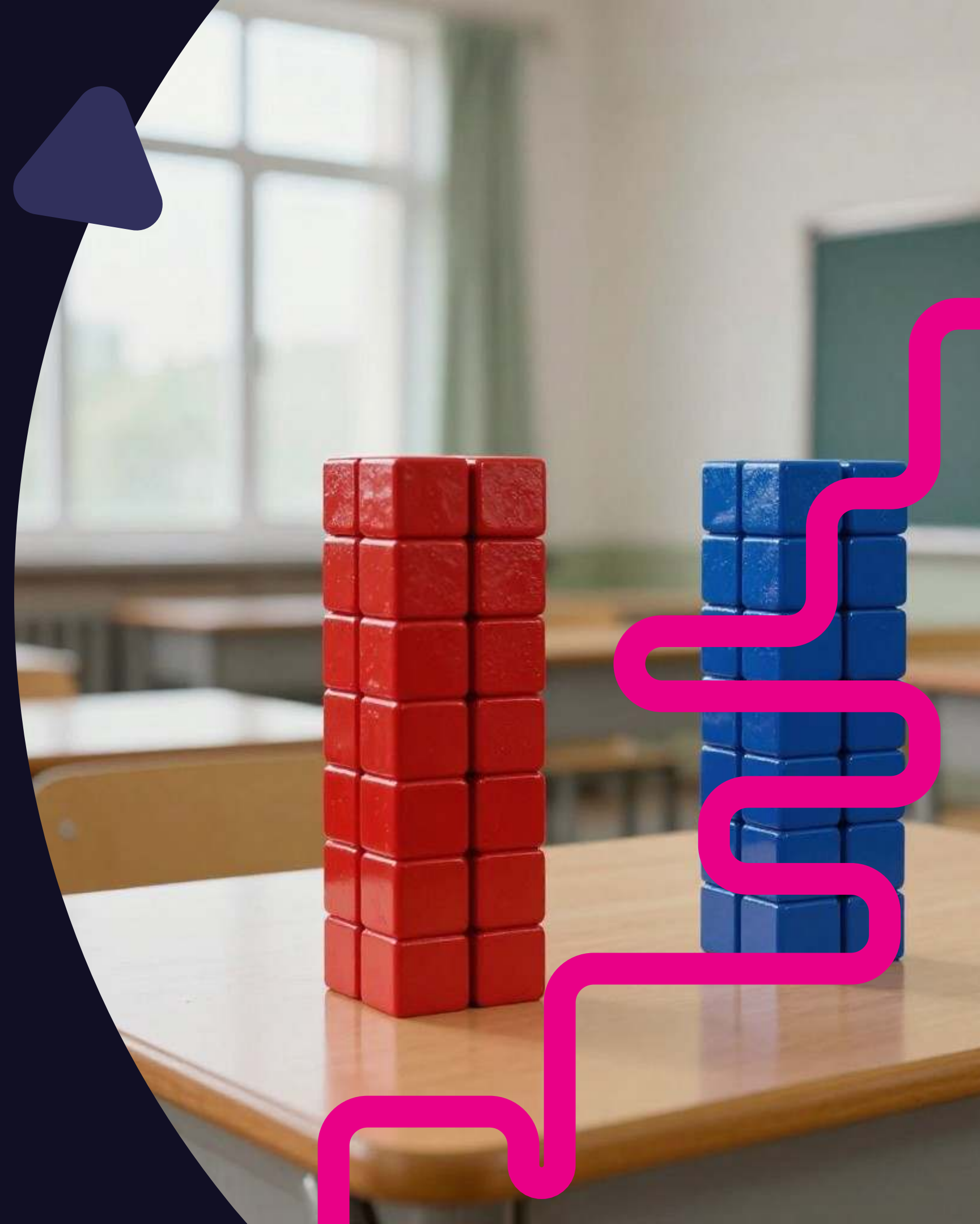


Разложение на множители разности n -х степеней

Изучаем, как разность степеней превращается в произведение множителей.





Зачем нужна разность степеней в 7 классе

Эта тема помогает сокращать дроби, упрощать выражения и решать уравнения. Она продолжает формулы сокращённого умножения и учит видеть общий множитель в буквенных выражениях.

0

получается, если подставить
в выражение одно и то же число,
значит множитель $a-b$ обязателен.

Если заменить a и b одинаковым
числом, разность $a^n - b^n$
обращается в нуль. Это
показывает, что выражение
делится на $a-b$.

Свойство делимости разности n -х
степеней

Наглядный смысл через квадрат и куб

▼ Разность площадей

Выражение $a^2 - b^2$ удобно понимать как разность площадей двух квадратов. Большой квадрат можно представить как меньший квадрат и дополнительную полоску, поэтому возникает разложение на множители.

▼ Разность объёмов

Для $a^3 - b^3$ похожая идея работает с кубами. Разность объёмов можно мысленно увидеть как большой куб, составленный из меньшего и добавочного слоя, что подсказывает наличие множителя $a - b$.

▼ Зачем нужен рисунок

Схема помогает связать алгебру с геометрией и легче запомнить формулы. Когда выражение кажется абстрактным, образ фигур делает преобразование более понятным и наглядным.



Частные формулы для $n = 2, 3, 4, 5$

Эти формулы показывают общий рисунок разложения и помогают быстро узнавать нужный случай.

Во всех случаях есть множитель $a-b$, а в скобках число слагаемых совпадает со степенью n .

Формулы разности степеней для $n=2,3,4,5$

n	Формула
2	$(a-b)(a+b)$
3	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
4	$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
5	$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

Общая формула разности n -х степеней

01

Первый множитель

В любом натуральном показателе разность $a^n - b^n$ начинается с множителя $a - b$. Именно он отвечает за то, что выражение обращается в нуль при $a = b$.

02

Сумма в скобках

После вынесения множителя получается сумма с убывающими степенями a и возрастающими степенями b . Каждый следующий член отличается от предыдущего только показателями степеней.

03

Главное правило

В скобках всегда ровно n слагаемых. Это удобно для проверки: если число членов не совпадает со степенью, формула записана неверно.

Как меняется число слагаемых в скобках

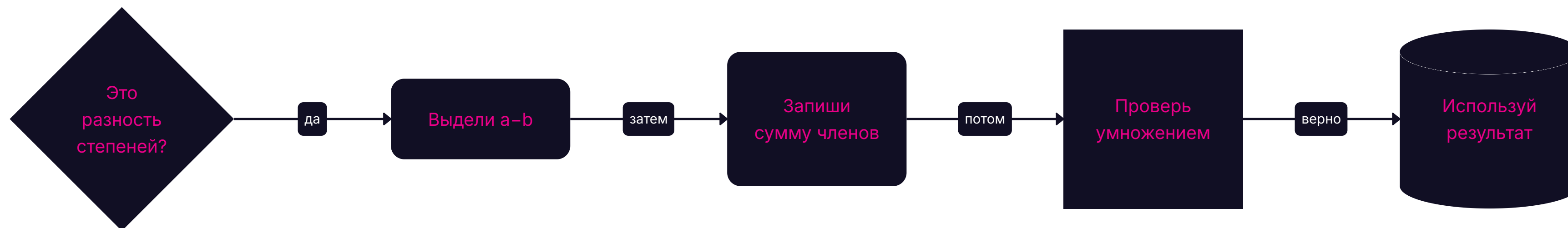
Рост видно сразу: к каждому следующему значению степени добавляется ещё один член в разложении.

Диаграмма подтверждает правило: число слагаемых в скобках равно степени n и растёт линейно.

Общая формула разности n -х степеней

Алгоритм разложения $a^n - b^n$

Последовательность шагов для распознавания и применения формулы



Разность степеней при нечётной степени

01

Формула не меняется

Если показатель нечётный, правило разложения работает так же, как и в общем случае. Например, $x^3 - 8$ удобно записать как $x^3 - 2^3$ и сразу применить формулу.

02

Пример разложения

Получаем $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Здесь видно, что исходное выражение превращается в произведение, а это облегчает дальнейшие преобразования.

03

Связь с уравнениями

После разложения можно приравнять каждый множитель к нулю и найти корни. Поэтому такие выражения часто встречаются при решении уравнений в школьной алгебре.

Разность степеней при чётной степени

01

Сначала — квадрат

При чётной степени часто удобно переписать выражение как разность квадратов. Например, $a^4 - b^4$ можно представить как $(a^2)^2 - (b^2)^2$.

02

Дополнительное разложение

Затем применяется формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Поэтому $a^4 - b^4$ раскладывается на $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$, и выражение становится проще.

03

Почему это удобно

Такой приём уменьшает сложность примера и помогает быстрее заметить структуру. Чем раньше выделен подходящий вид, тем легче выполнить преобразование без ошибок.

Проверка на буквенном примере

01

Запишем кубы

Сначала распознаём разность кубов: $27x^3 = (3x)^3$, а $8y^3 = (2y)^3$. Это позволяет сразу применить формулу для $a^3 - b^3$ и не переписывать выражение вручную.

02

Подставим формулу

По общей схеме получаем $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$. Во второй скобке степени распределяются последовательно: от квадрата первого выражения к квадрату второго.

03

Проверим раскрытием

Если раскрыть скобки, промежуточные члены взаимно компенсируются, а остаётся $27x^3 - 8y^3$. Такая проверка показывает, что разложение верно и сохраняет исходное значение выражения.



Типичные ошибки при разложении

Ошибка	Как выглядит	Как должно быть
Нет $a-b$	пропущен множитель	он обязателен
Неверный порядок	слагаемые перепутаны	степени идут по порядку
Мало членов	нехватка слагаемых	их ровно n

Таблица показывает самые частые неточности и помогает быстро сверять запись с правильной формулой.

Если помнить про множитель $a-b$ и число слагаемых, большинство ошибок можно заметить ещё до проверки ответом.

Анализ типичных ошибок при применении формулы разности n -х степеней

Разность и сумма степеней

Диаграмма показывает, где знак между степенями даёт простое разложение на линейный множитель, а где такого правила нет.

Разность степеней всегда имеет общий множитель $a-b$, а сумма степеней даёт аналогичное правило только при нечётной степени.

Сравнение свойств выражений $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ по школьной алгебре

Что напоминает сумма в скобках



Одинаковый переход

Каждый следующий член получается из предыдущего по одному и тому же правилу: степень a уменьшается, а степень b увеличивается. Это похоже на закономерное движение по цепочке.



Последовательность членов

В скобках члены выстроены в порядке изменения степеней, как в последовательности. Такая структура помогает быстро проверять, не пропущено ли слагаемое и верно ли записаны степени.



Связь с прогрессией

Если рассмотреть отношение соседних членов, видно повторяющееся умножение на одинаковое выражение. Поэтому формула разности степеней связана с идеей геометрической прогрессии.

Как разложение помогает решать уравнения

01

Сделать выражение удобным

Сначала преобразуют уравнение к виду разности степеней, чтобы можно было вынести общий множитель. После этого исходная запись становится произведением нескольких простых факторов.

02

Найти корни

Если произведение равно нулю, то хотя бы один множитель должен быть равен нулю. Так уравнение $x^4 - 16 = 0$ превращается в набор более простых уравнений.

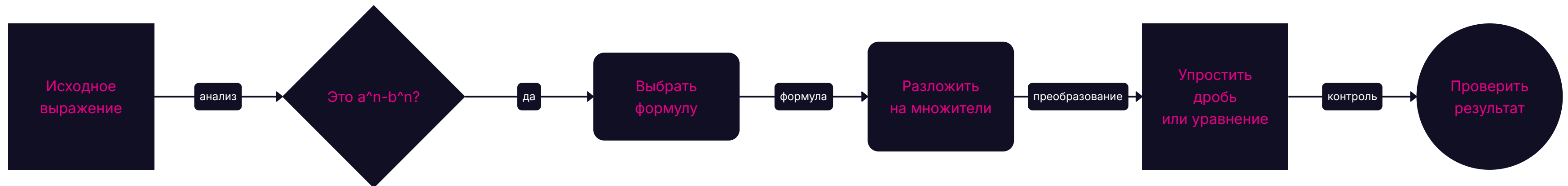
03

Проверить ответ

После нахождения корней их подставляют в исходное уравнение. Проверка помогает убедиться, что разложение выполнено правильно и все решения найдены без пропусков.

Последовательность действий в задачах

Схема показывает общий алгоритм применения формулы разности n -х степеней



Наглядный числовой пример



Исходное число

Число 64 удобно представить как 4^3 , а 1 — как 1^3 . Тогда выражение становится разностью кубов, для которой сразу подходит готовая формула разложения.

Промежуточная запись

После подстановки получаем $(4-1)(4^2+4\cdot 1+1^2)$. Здесь хорошо видно, что значение выражения не изменилось, а запись стала более удобной для вычисления.

Итог вычисления

Считаем: $3\cdot 21=63$. Пример показывает, что разложение помогает не только искать множители, но и быстро выполнять устный или письменный счёт.

Где используется разложение на множители

На уроках алгебры этот приём чаще всего нужен там, где нужно преобразовать запись в более простой вид и увидеть скрытые множители.

Самые частые применения связаны с упрощением и решением уравнений, а остальные случаи дополняют и закрепляют этот навык.

Схема по содержанию темы «Разложение на множители разности n -х степеней»

Краткая памятка по формулам

Эта памятка помогает быстро выбрать нужную запись и не перепутать порядок слагаемых в скобках.

Во всех формулах сохраняется множитель $a-b$, а число слагаемых в скобках совпадает со степенью n .

Формулы разложения разности степеней из школьного курса алгебры

Случай	Формула	Ключ
Квадраты	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	2 скобки
Кубы	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	3 члена
Общий вид	$a^n-b^n=(a-b)(\dots)$	n членов

Главный вывод темы

Разность n -х степеней всегда можно распознать по множителю $a-b$. Зная частные формулы и общий вид, легче упрощать выражения, решать уравнения и уверенно работать с буквенными записями.