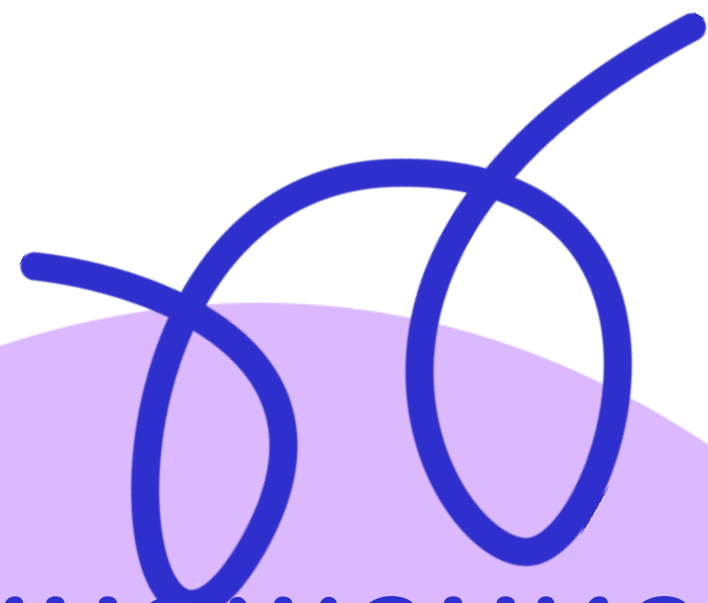
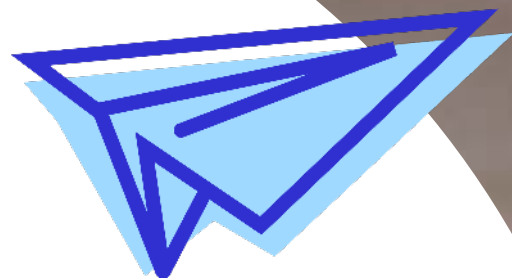




Умножение вектора на число: правило изменения длины и направления

Как число меняет вектор: длину,
направление и смысл результата.



Зачем школьникам понимать умножение вектора на число?

Векторы помогают описывать перемещение, скорость и силу. Умножение на число позволяет быстро изменять длину и направление вектора, а затем использовать его в координатах и других темах 9 класса.



Определение произведения вектора на число

1 Что означает запись

Произведением числа k на вектор a называют вектор ka . Эта операция создаёт новый вектор, который связан с исходным не только длиной, но и направлением.

2 Как меняется длина

Длина результата равна $|k| \cdot |a|$. Поэтому модуль числа показывает, во сколько раз вектор станет длиннее или короче, а при $k=0$ длина станет равной нулю.



3 Что происходит с направлением

Если $k>0$, направление сохраняется. Если $k<0$, вектор поворачивается в противоположную сторону. Так знак числа отвечает за направление, а модуль — за масштаб.

Геометрический смысл на чертеже



Одна линия

Векторы a и ka лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Это сразу видно на рисунке: новая стрелка не уходит в сторону, а остаётся на той же линии направления.



Увеличение и уменьшение

При $k=2$ вектор становится вдвое длиннее, а при $k=\frac{1}{2}$ — вдвое короче. Значит, модуль числа управляет масштабом, не меняя саму линию расположения вектора.



Отрицательный коэффициент

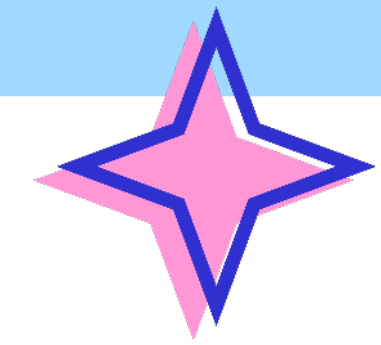
Если $k=-3$, длина увеличивается в 3 раза, но направление меняется на противоположное. На чертеже это выглядит как такой же вектор, повернутый на 180 градусов.



Главный вывод

По рисунку легко заметить: знак числа отвечает за направление, а абсолютное значение числа — за длину. Именно поэтому умножение вектора на число удобно проверять визуально.





Как меняются длина и направление при разных коэффициентах

Сравнение показывает, как коэффициент влияет на вектор.

Модуль числа задаёт масштаб, а знак — направление. При $k=0$ получается нулевой вектор.

к	Длина	Направление	Пример
3	в 3 раза больше	то же	$3a$
$\frac{1}{2}$	в 2 раза меньше	то же	$(\frac{1}{2})a$
-2	в 2 раза больше	противоположное	$-2a$
0	0	не определено	$0a$



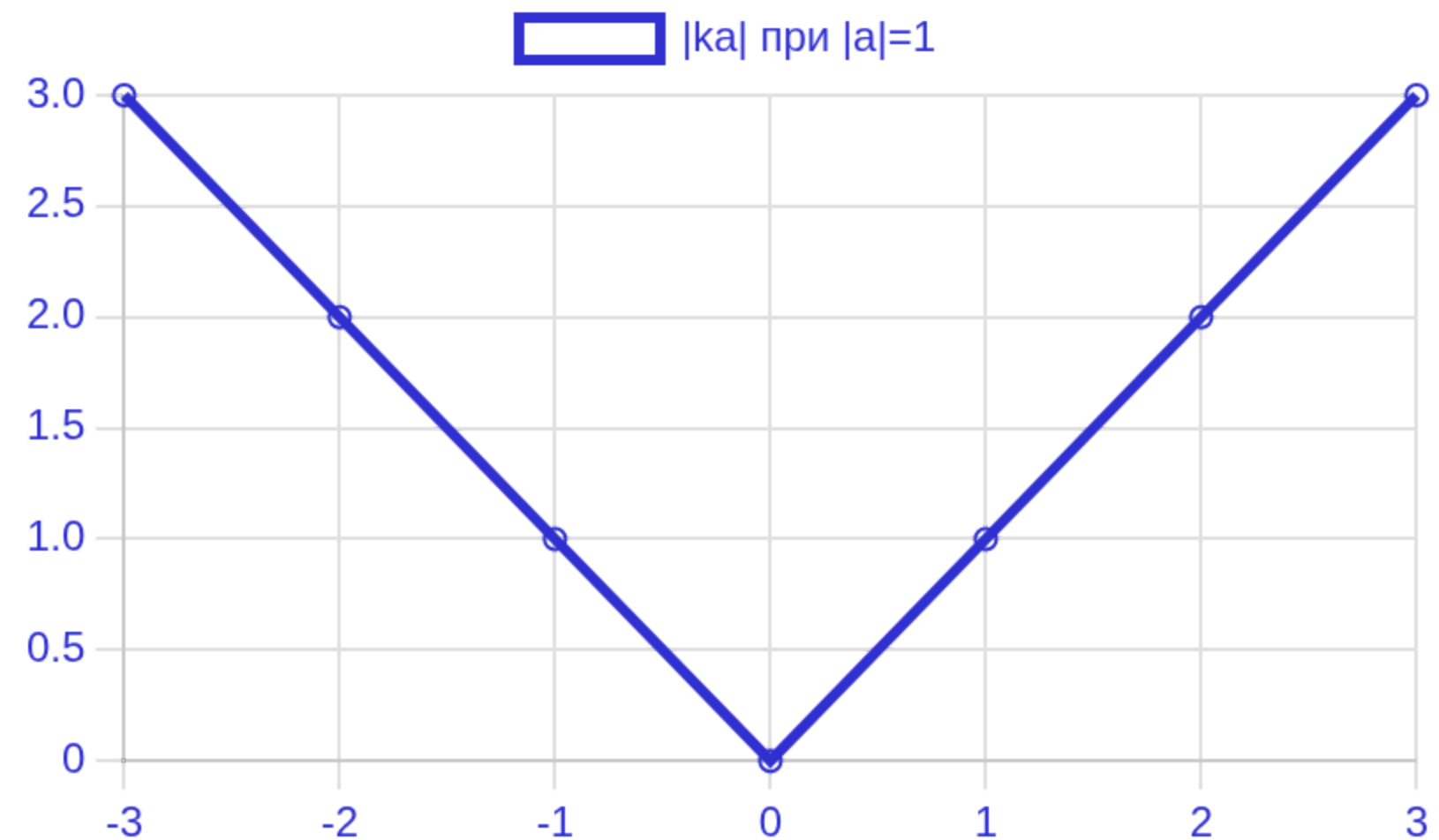
Правило умножения вектора на число из школьной геометрии

Зависимость длины результата от модуля коэффициента



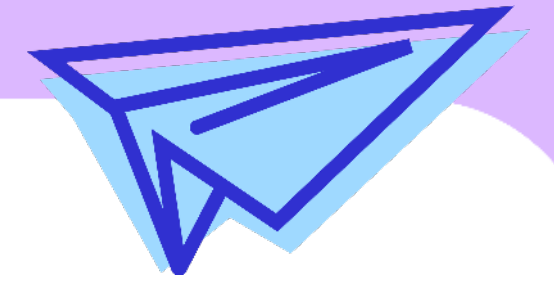
График помогает увидеть, что длина меняется одинаково для положительных и отрицательных значений k .

Зависимость симметрична относительно нуля: длина определяется модулем коэффициента, а знак влияет только на направление.



✦ Теоретическая зависимость для фиксированного вектора, нормированного до $|a|=1$

Коллинеарность исходного и полученного векторов



✦ Всегда одна направляющая

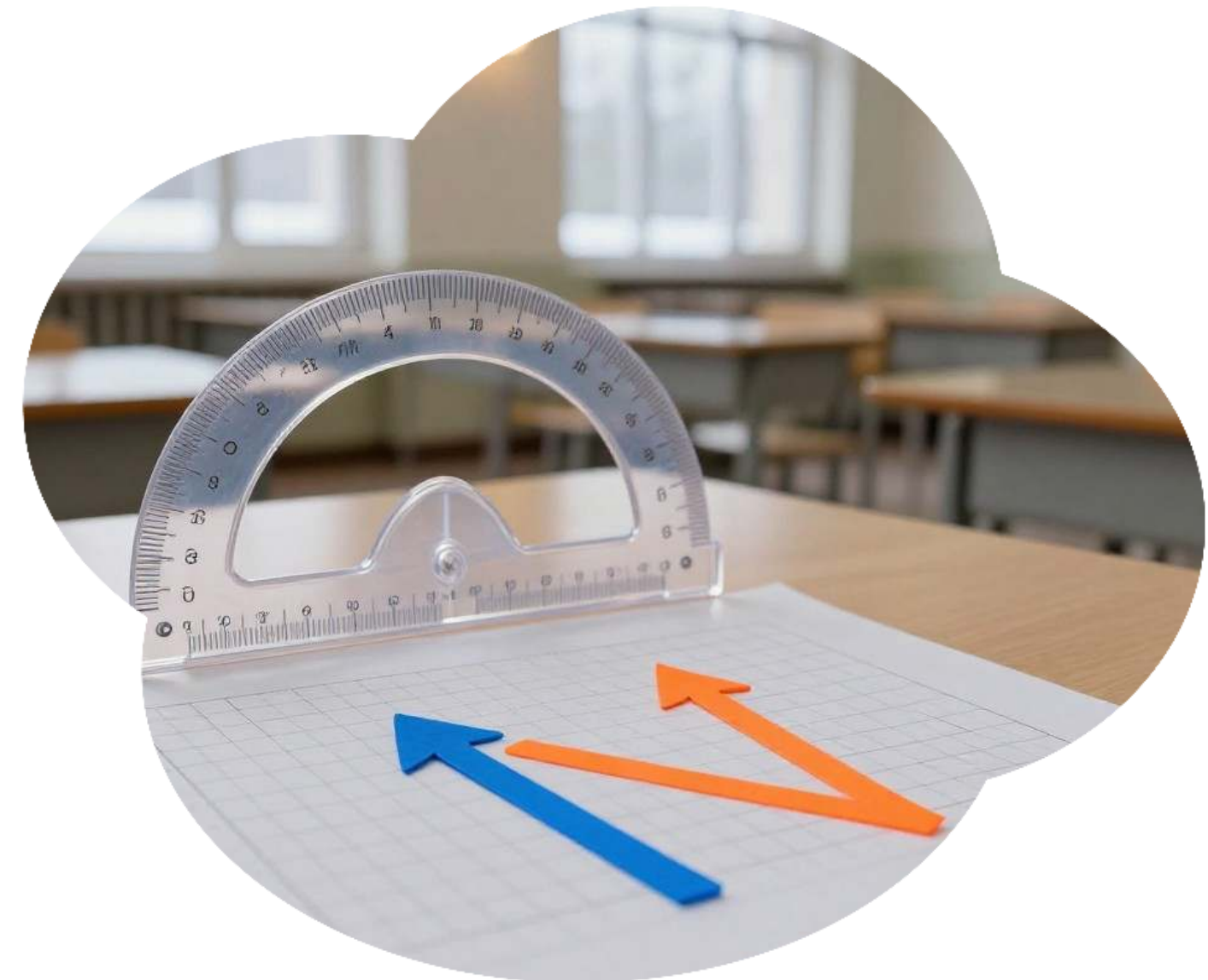
Векторы a и ka всегда коллинеарны. Это значит, что они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и имеют общую линию направления.

✦ Только изменение масштаба

Умножение на число не создаёт новый поворот вектора. Оно лишь растягивает, сжимает или разворачивает его, сохраняя геометрическую связь с исходным вектором.

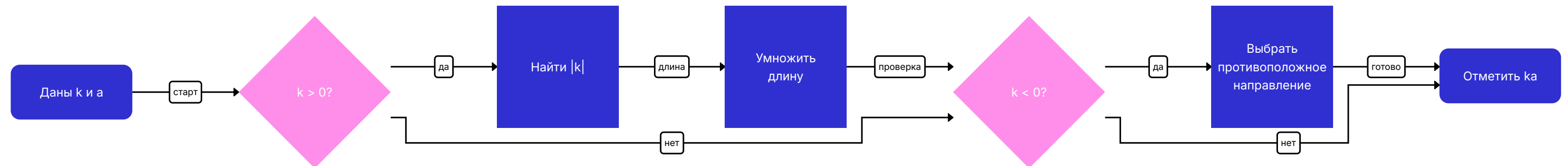
✦ Полезно в задачах

Свойство коллинеарности удобно использовать в построениях и доказательствах. Оно помогает быстро понять, какие векторы могут быть параллельны, а какие являются кратными друг другу.



Как построить вектор $\vec{ka}$

Последовательность действий при геометрическом построении



Координатная запись операции

1

Правило для координат

Если $a=(x; y)$, то $ka=(kx; ky)$. Это значит, что каждая координата умножается на одно и то же число, а не обрабатывается отдельно по разным правилам.

2

Положительный коэффициент

При $k>0$ знаки координат сохраняются. Вектор остаётся в той же направленности, а его длина изменяется пропорционально коэффициенту, как видно на координатной плоскости.

3

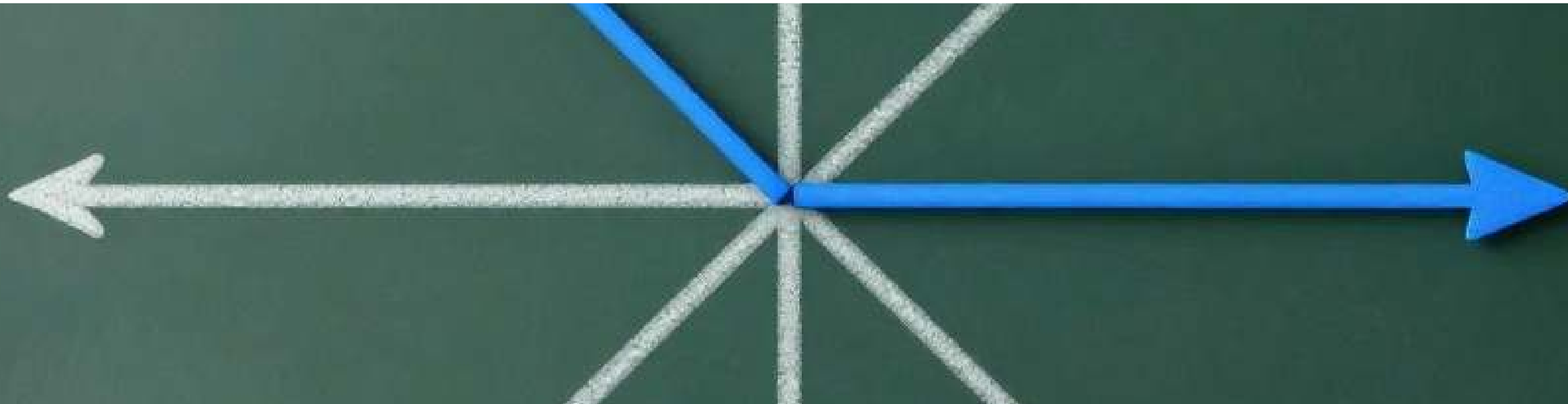
Отрицательный коэффициент

При $k<0$ обе координаты меняют знак. Вектор переходит в противоположную сторону, но его расположение остаётся коллинеарным исходному, поэтому линия направления не меняется.

4

Примеры вычислений

$4 \cdot (2; -3) = (8; -12)$, $-1 \cdot (2; -3) = (-2; 3)$, $0,5 \cdot (6; 4) = (3; 2)$. Эти примеры показывают, как работает правило в разных ситуациях.

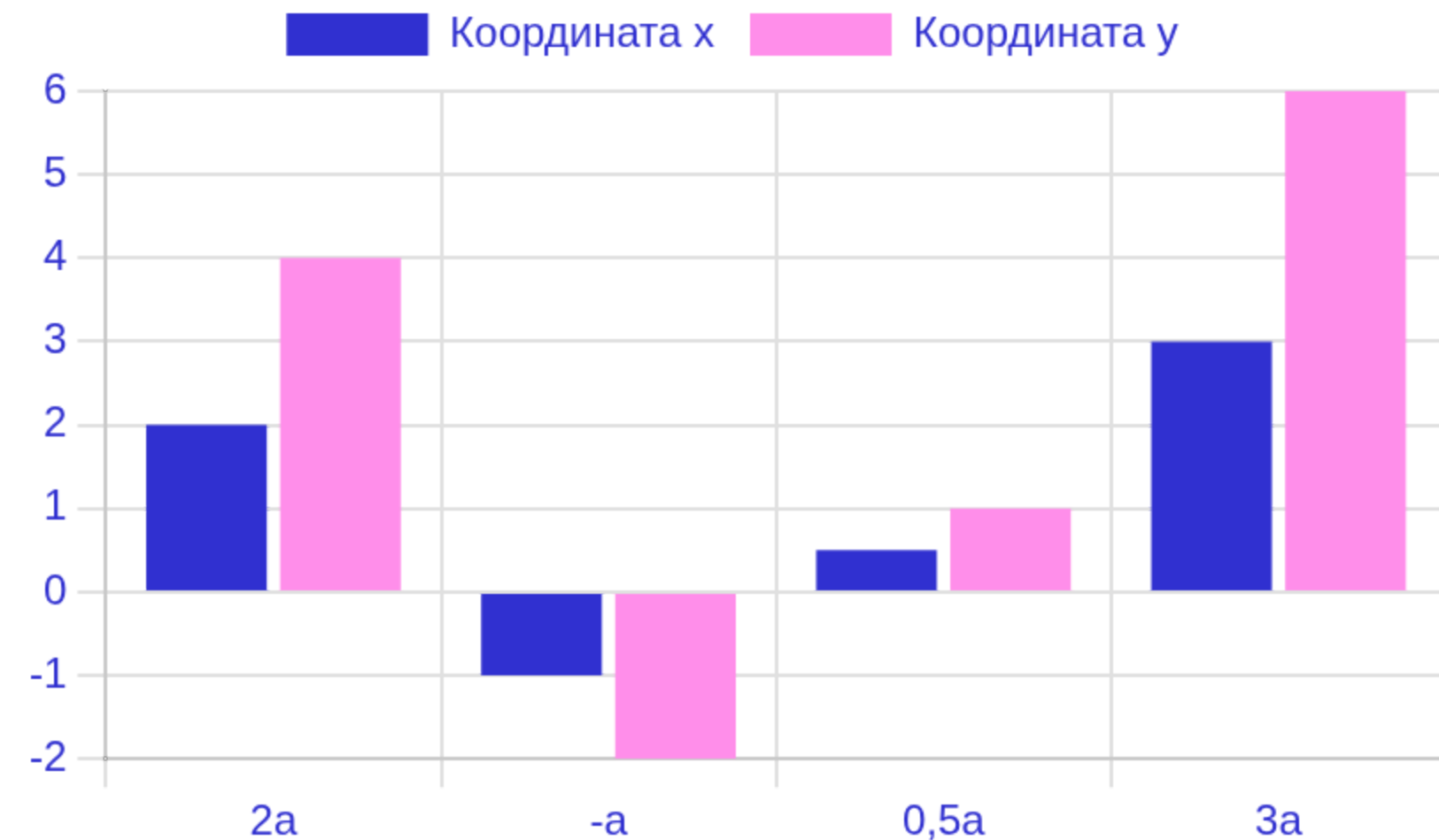


Изменение координат одного вектора при разных k



На диаграмме удобно сравнивать, как обе координаты меняются одновременно и в одном масштабе.

Координаты растут или уменьшаются пропорционально коэффициенту, а отрицательное значение меняет знак обеих координат.



✦ Для вектора $a=(1; 2)$: $2a=(2; 4)$, $-a=(-1; -2)$, $0,5a=(0,5; 1)$, $3a=(3; 6)$

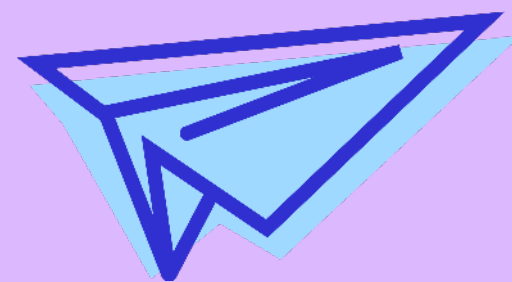
Свойство ассоциативности

1 Порядок не важен

Если сначала умножить два числа, а затем вектор, получится тот же результат, что и при последовательном умножении вектора на каждый коэффициент. Это удобно для сокращения длинных вычислений.

2 Запись свойства

Для любого вектора a и чисел m и n выполняется равенство $(mn)a = m(na)$. Оно показывает, что группировать множители можно по-разному, не меняя итоговый вектор.



3 Практическая польза

Свойство помогает быстро считать выражения вида $2(3a)$ или $5(0,4a)$. Сначала находят произведение чисел, затем умножают вектор один раз, что уменьшает риск ошибки.

Свойство распределительности по сложению чисел

1

Сумма коэффициентов

Если к одному и тому же вектору применяются два числа, их можно сложить заранее. Это значит, что одно направление масштабируется сразу одним общим коэффициентом.

2

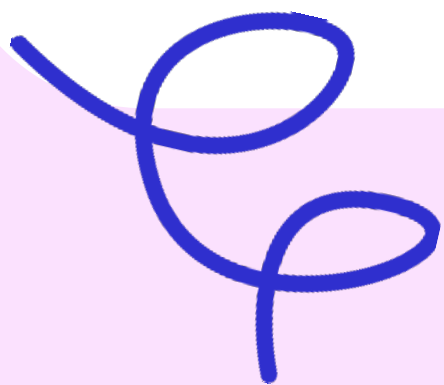
Запись свойства

Для любого вектора a и чисел m и n верно равенство $(m + n)a = ma + na$. Левая и правая части дают одинаковый результат, хотя считаются по-разному.

3

Удобство в вычислениях

Например, $(2 + 5)a$ можно заменить выражением $2a + 5a$. Так проще раскрывать скобки и приводить подобные векторные выражения к более короткому виду.



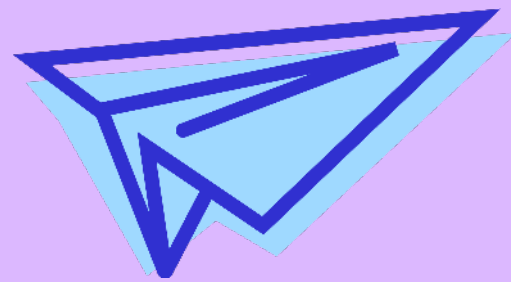
Свойство распределительности по сложению векторов

1 Действие на сумму

Число k умножает не только один вектор, но и сумму векторов. Каждый слагаемый изменяется отдельно, а затем получается общий результат.

2 Запись свойства

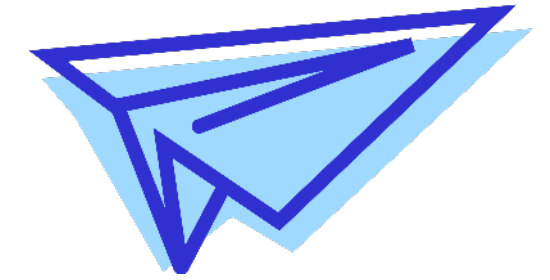
Для любого числа k и любых векторов a и b выполняется равенство $k(a + b) = ka + kb$. Это основное правило при работе со скобками в векторных выражениях.



3 Геометрический смысл

На чертеже оба слагаемых вектора растягиваются или сжимаются одинаково. Поэтому и их сумма изменяется согласованно, сохраняя направление построения и связь между частями фигуры.

Три основных свойства операции в таблице



- Сводная таблица показывает три ключевых свойства умножения вектора на число, их формулы и смысл. Она помогает быстрее сравнивать правила и применять их при преобразовании выражений.
- Все три свойства позволяют по-разному записывать одно и то же преобразование, не меняя результата. Это делает вычисления короче и удобнее при решении задач.

Свойство	Формула	Смысл	Пример
Ассоциативность	$(mn)a = m(na)$	Порядок не важен	$2(3a)=6a$
По числам	$(m+n)a = ma+na$	Складывают коэффициенты	$(2+5)a=7a$
По вект. сумме	$k(a+b)=ka+kb$	Действует на оба	$3(a+b)=3a+3b$

Свойства умножения вектора на число из школьного курса геометрии 9 класса



0

коэффициент даёт нулевой
вектор, у которого нет
направления.

Свойство умножения вектора на число в школьной геометрии

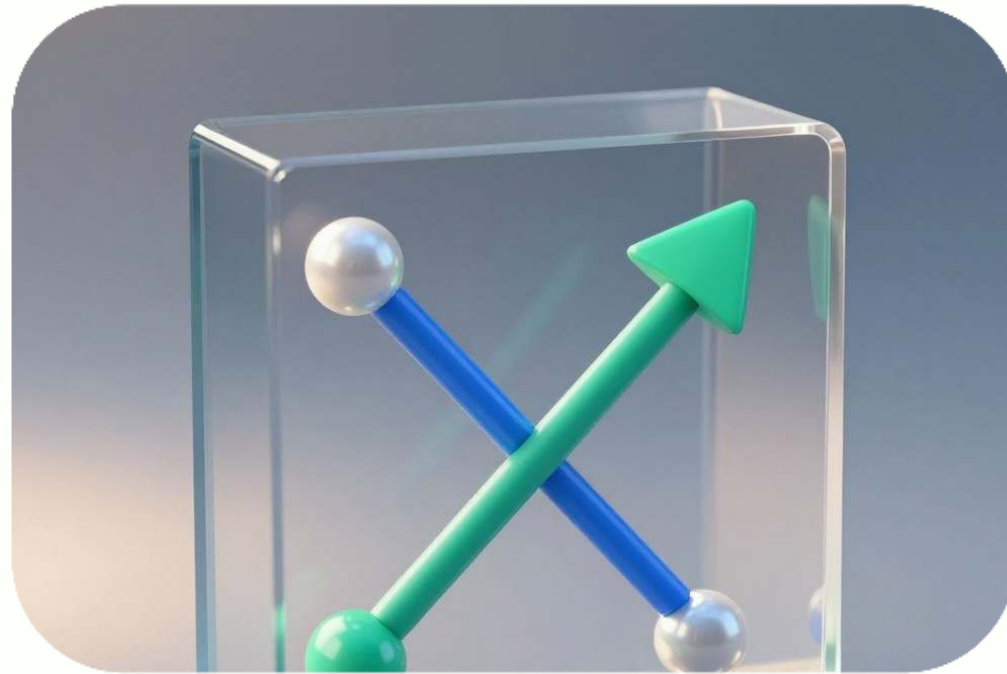
Этот случай важно помнить отдельно: длина результата становится нулевой, а направление не определяется. Такая проверка помогает не перепутать умножение на число с обычным переносом вектора.

На что чаще всего ошибаются ученики



Забывают про знак

На рисунке вектор выглядит почти правильно, но при отрицательном коэффициенте он должен смотреть в другую сторону. Именно знак определяет разворот, а не длина стрелки.



Меняют только одну координату

Иногда ученик умножает на число лишь первую координату и оставляет вторую без изменений. В правильном решении обе координаты изменяются одинаково, потому что коэффициент действует на весь вектор.



Путают ноль и исходный вектор

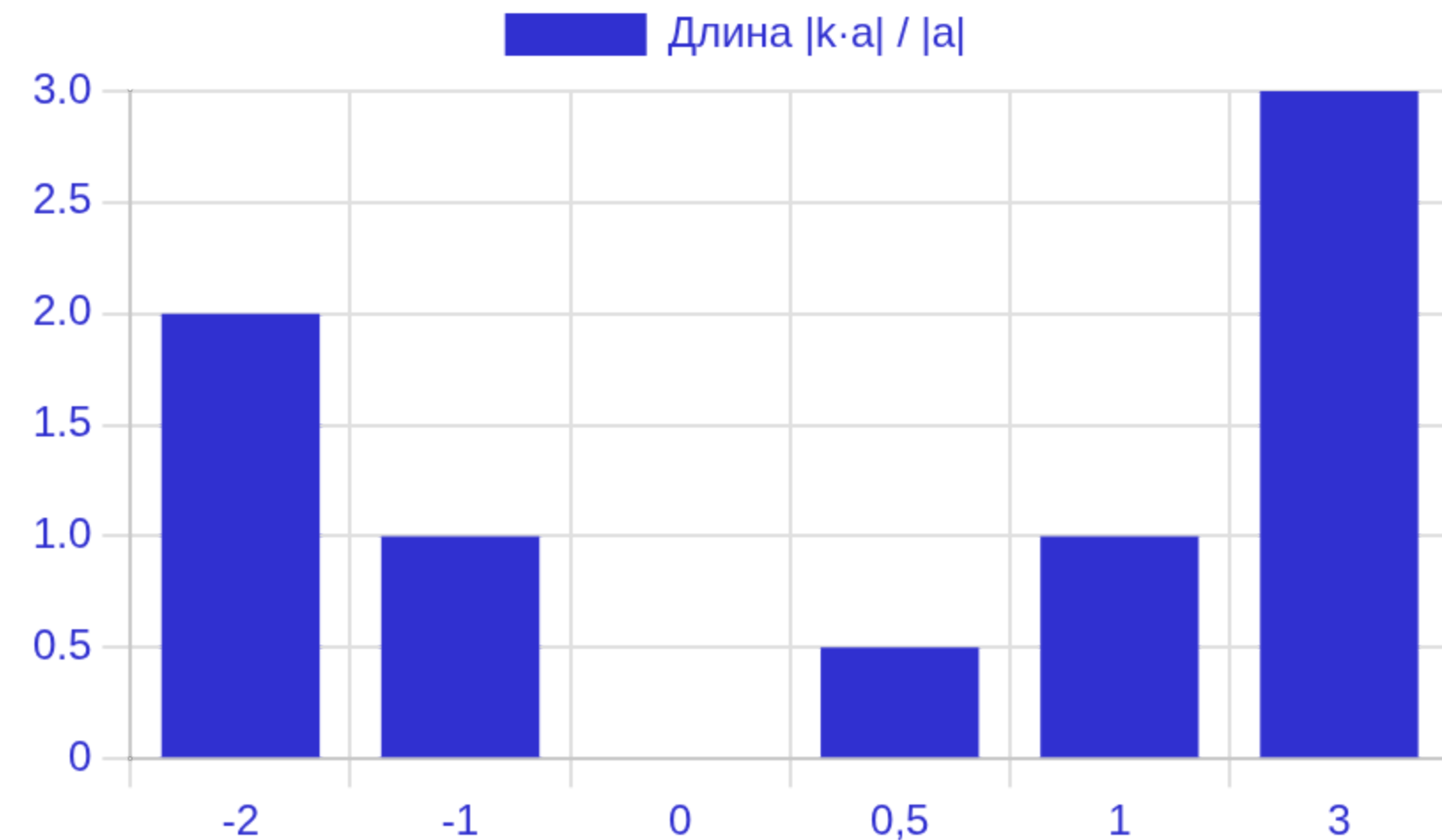
При $k = 0$ нельзя получить тот же самый вектор. Результат превращается в нулевой вектор, который не имеет направления и не совпадает с исходным по длине.

Сравнение результатов для одного вектора при разных коэффициентах



Диаграмма показывает только изменение длины относительно исходного вектора. Направление при отрицательных коэффициентах нужно учитывать отдельно по знаку.

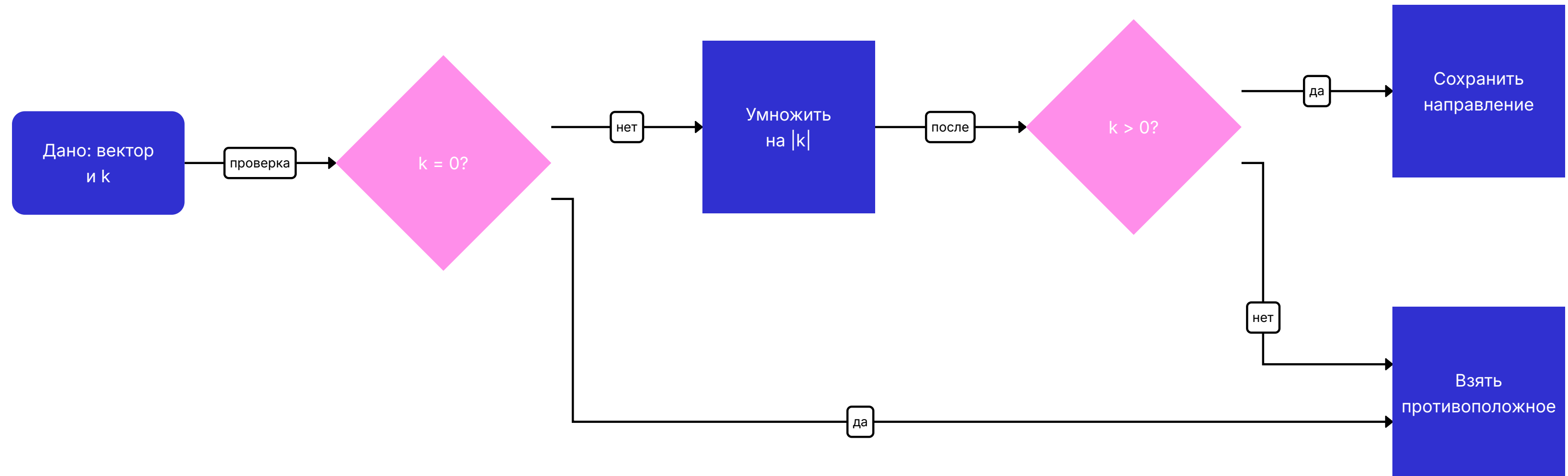
Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее растягивается или сжимается вектор. Знак не влияет на длину, но меняет направление на противоположное.



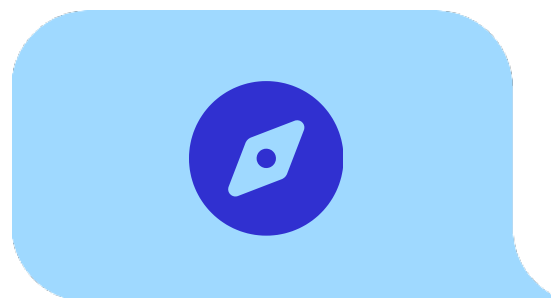
✦ Расчёт относительной длины по формуле $|k \cdot a| = |k| \cdot |a|$

Проверка ответа в задаче на умножение вектора на число

Последовательность проверки по правилу умножения вектора на число

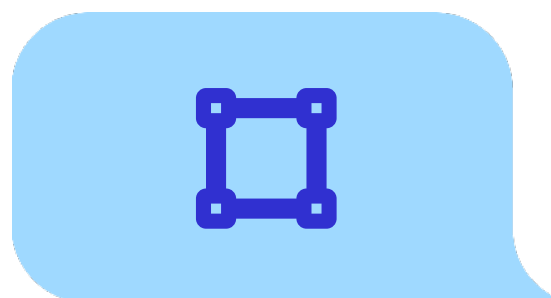


Где используется это правило в математике и других предметах



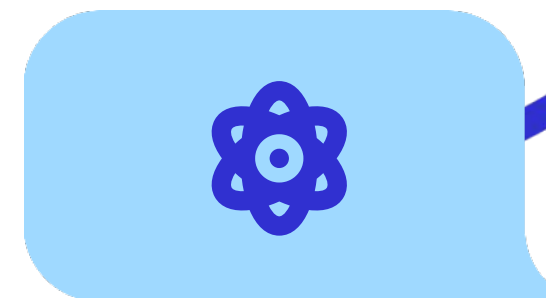
Геометрические построения

Умножение вектора на число помогает строить отрезки нужной длины и быстро получать векторы, сонаправленные или противоположно направленные заданному. Это удобно в задачах на чертёж.



Координатная плоскость

На плоскости с координатами можно легко получать новые фигуры с тем же видом, но другим масштабом. При этом все координаты изменяются согласованно и предсказуемо.



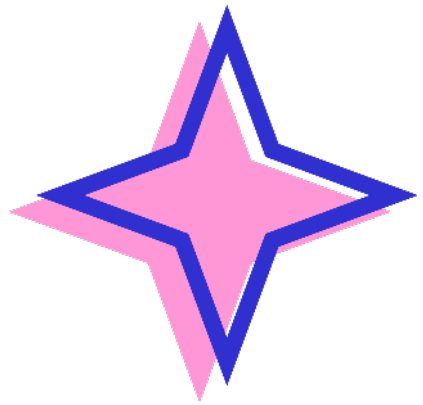
Физика движения

В физике правило связывают с перемещением, скоростью и силой. Если меняется коэффициент, меняется и величина вектора, а знак показывает противоположное направление действия.



Доказательства в задачах

При решении теорем и построений это свойство помогает находить коллинеарные и параллельные векторы. Оно также упрощает запись векторных выражений и проверку равенств.



Главное о правиле умножения вектора на число

Запомните три опоры темы: длина меняется по модулю коэффициента, знак задаёт направление, а свойства операции помогают упрощать вычисления и решать векторные задачи без лишних построений.