

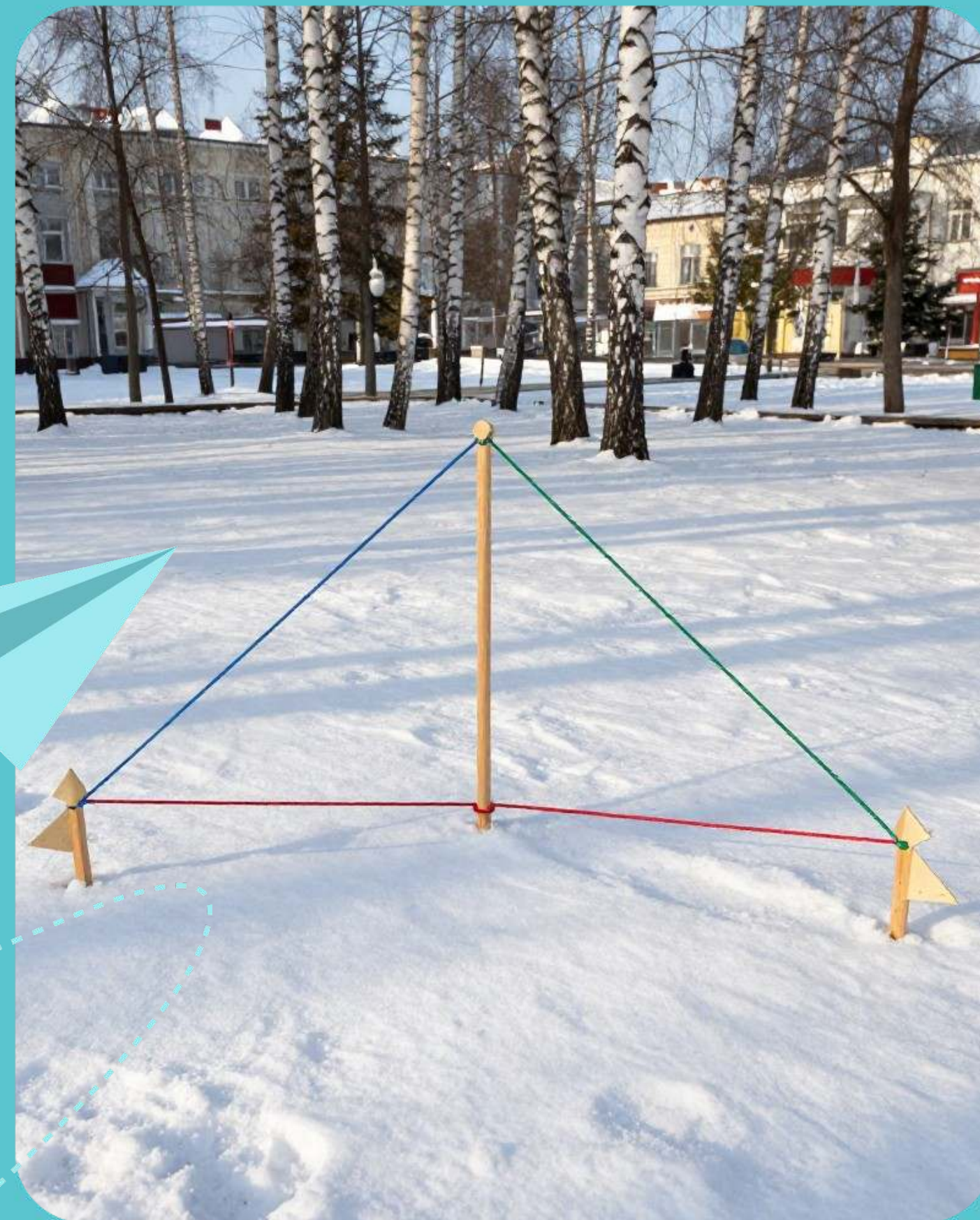
Теорема синусов: связь сторон и углов в треугольнике

$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$ — ключ к нахождению сторон, углов и R.



Где нужна теорема синусов и зачем она полезна

Когда обычных свойств треугольника не хватает, теорема синусов выручает. Она особенно удобна при двух углах и одной стороне, а также двух сторонах и одном угле: можно решать треугольники без прямого угла.



Напоминание: что такое синус угла



Синус в прямоугольном треугольнике

Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Это правило работает для любого подходящего прямоугольного треугольника, а не только для «удобных» размеров.



Зависит только от величины угла

Синус — число, которое определяется только величиной угла. Меняются длины сторон — меняется форма, но синус остаётся тем же для одного и того же угла, например 30° или 45° .



Готовые значения для 30° , 45° , 60°

Часто используют значения синуса: $\sin 30^\circ = 1/2$, $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$. Они ускоряют решения и уменьшают количество вычислений при применении теоремы синусов.



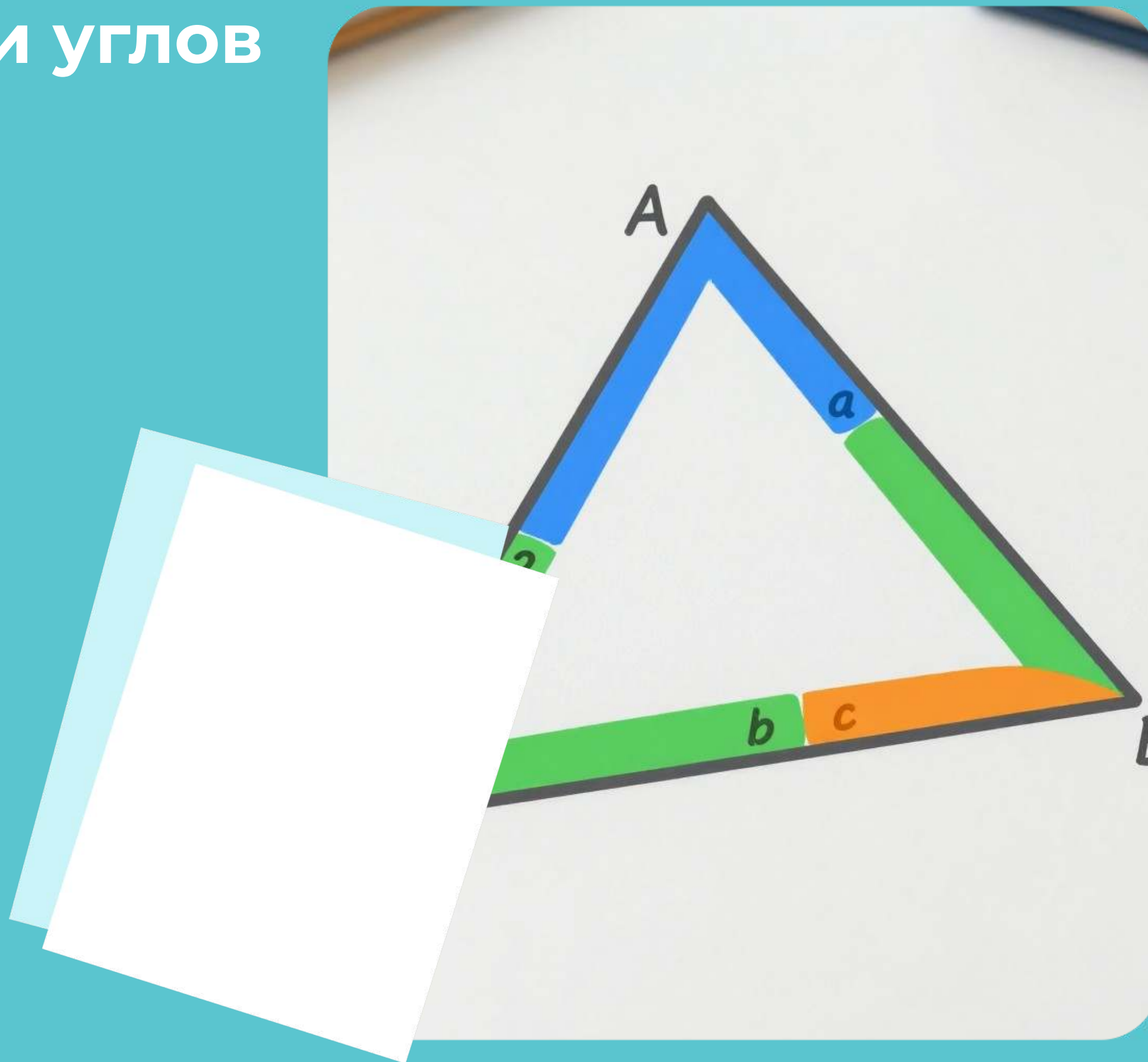
Обозначения сторон и углов в треугольнике

Кто напротив кого: стороны и углы

Сторона a лежит напротив угла A , сторона b — напротив угла B , сторона c — напротив угла C . Такое соответствие обязательно сохраняется в записи формулы и в подстановках при решении.

Почему важно не менять соответствие

На рисунке треугольника подпишите вершины A , B , C и стороны a , b , c . Если пары «сторона — противолежащий угол» выделить цветом, меньше шансов перепутать элементы и получить неверный ответ.



Формулировка теоремы синусов

В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла одинаково для всех трёх пар: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. Это равенство и называют теоремой синусов.

Теорема показывает закономерность: чем больше сторона, тем больше противолежащий ей угол. Поэтому по углам можно «считывать» относительный размер сторон и наоборот, не измеряя их линейкой.

Основная сила формулы — вычисления. Если в задаче известны некоторые стороны и углы, теорема помогает найти неизвестные элементы треугольника и проверить, согласуются ли данные друг с другом.



Тогда $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$. Зная углы и стороны, можно находить радиус окружности, проходящей через вершины треугольника.

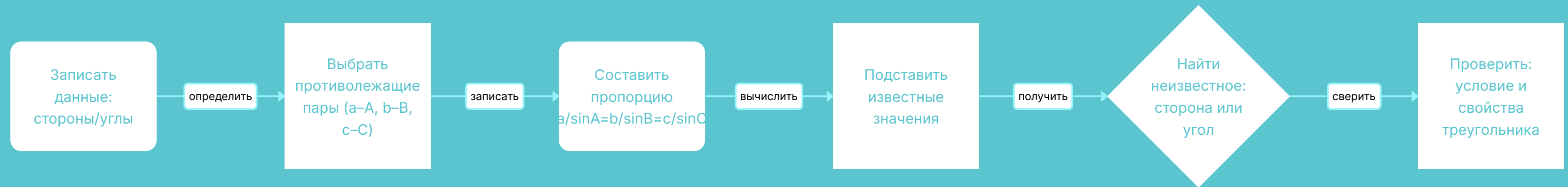
Школьный курс геометрии (теорема синусов и формулы через радиус описанной окружности), 8 класс

2R

**Роль этого множителя —
связать синусы с
радиусом описанной
окружности.**

Алгоритм применения теоремы синусов

Порядок действий: от данных к пропорции и проверке результата.



Когда теорема синусов особенно удобна

Если известны два угла и одна сторона, теорема синусов позволяет найти остальные стороны. Такой набор обозначают как AAS или ASA, и он хорошо подходит для формулы $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$.

Также удобно находить сторону по известным углам: тогда фактически работают с двумя противолежащими парами. Без прямого угла вычисления всё равно становятся системными, а не «угадыванием» размеров.

Если задано SSA, решения могут быть не одно: одному значению синуса соответствует два угла в пределах от 0° до 180° . Поэтому в некоторых задачах возможны два разных треугольника или отсутствие решения.



Сравнение отношений сторон и синусов

На графике показано, что все три отношения совпадают и дают одну и ту же величину. Это и есть главный смысл теоремы синусов.

Если при решении получается, что значения $a/\sin A$, $b/\sin B$ и $c/\sin C$ не равны, значит, в записи соответствий или подстановках допущена ошибка.

Демонстрационный набор значений для визуального подтверждения равенства по теореме синусов (без привязки к конкретному треугольнику)



Значения синусов основных углов



Угол	sin
30°	1/2
45°	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$
90°	1

Школьная таблица значений тригонометрических функций (программа 8 класса)

В таблице собраны значения, которые часто нужны в задачах 8 класса: они помогают подставлять в теорему синусов без долгих вычислений.

При увеличении угла от 30° до 90° синус растёт. Поэтому решения по теореме синусов становятся быстрее и аккуратнее: величины $\sin$ легче сравнивать.

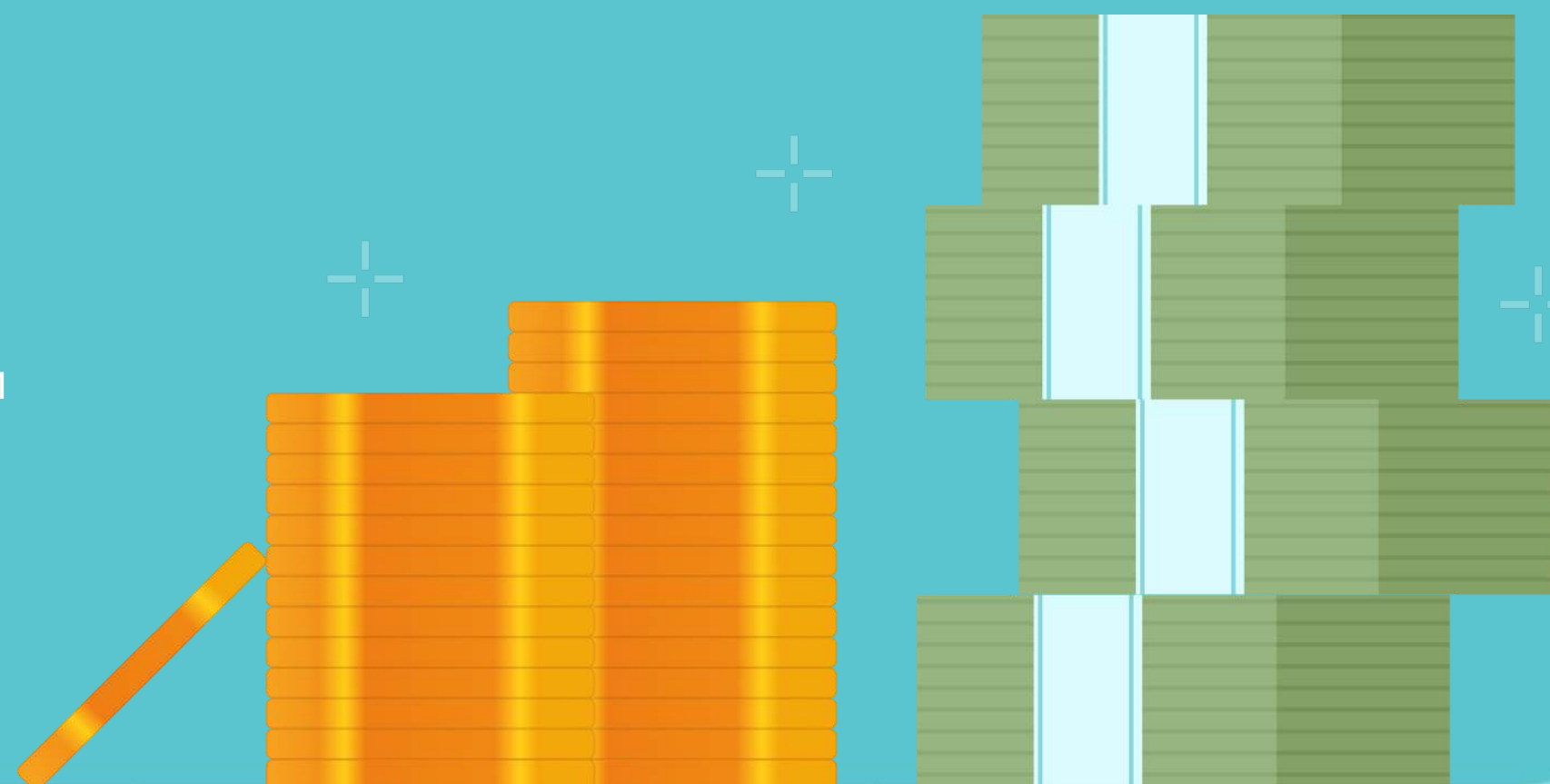


Пример нахождения неизвестной стороны

Дано: $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ и $a = 10$ см.
Нужно найти сторону b , которая лежит напротив угла B . Для этого используем пропорцию между сторонами и синусами противолежащих углов.

Записываем: $b/\sin B = a/\sin A$.
Подставляем значения:
 $b/\left(\sqrt{2}/2\right) = 10/\left(1/2\right)$. Далее находим b , выполняя простое деление и умножение.

Получаем $b = 10 \cdot (\sqrt{2}/2)/(1/2) = 10\sqrt{2}$ см. Заметьте: ответ получается точным, без округлений, потому что используются стандартные значения синусов для 30° и 45° .



Пример нахождения неизвестного угла

Когда известны две стороны и один угол, сначала записывают теорему синусов. Она связывает неизвестный угол с соответствующей ему стороной через отношение вида $a/\sin A = c/\sin C$.

Далее вычисляют $\sin C$ по найденному отношению. Часто получается число, которое можно сопоставить со значениями из таблицы или уточнить с помощью калькулятора, не забывая про округление при необходимости.

После этого подбирают сам угол C : одному значению синуса могут соответствовать два угла в диапазоне от 0° до 180° . Поэтому возможны два ответа или один, в зависимости от получившихся вариантов.

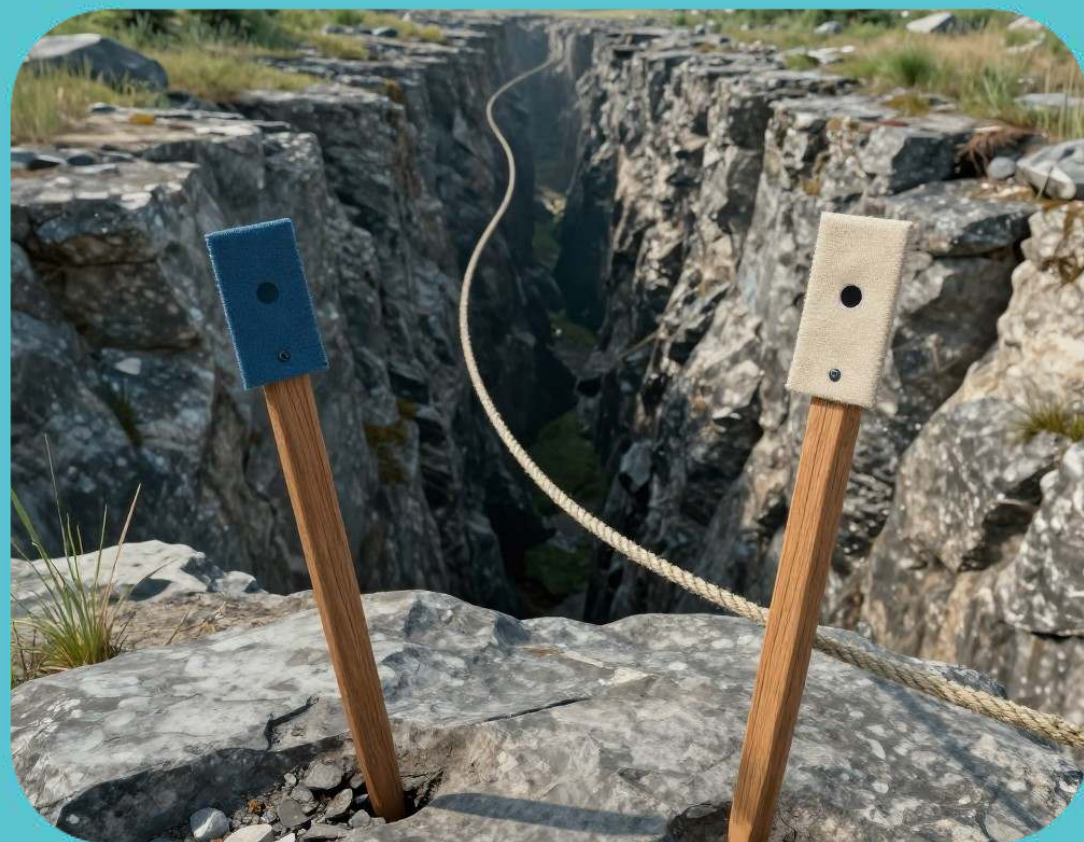
В конце обязательно проверяют результат по свойствам треугольника: сумма углов должна быть 180° , а найденный угол должен «вписываться» в условие. Так отсеивается неверный вариант.



Геометрия в реальных задачах: где работает теорема синусов

Разметка на местности без прямого измерения

Иногда расстояние до точки измерить напрямую нельзя: мешает овраг, забор или вода. Но если известны два угла видимости и одна сторона между наблюдателями, можно восстановить нужное расстояние по треугольнику. Теорема синусов делает эту «дальнюю» измерительную задачу выполнимой.



Навигация и расчет положения по направлениям

Корабли и самолёты ориентируются по направлениям и углам, которые можно определить приборами. Представьте три точки: наблюдатель, ориентир и цель. Когда известны углы между направлениями и одна измеренная дистанция, теорема синусов помогает вычислить остальные стороны треугольника.



Картография: измерения по карте

На карте масштабы и построения позволяют измерять углы, но не всегда удобно получать точные расстояния «на местности». Составив треугольник по точкам на плане, можно вычислить недоступные отрезки. Визуальная схема «карта — точки — треугольник» хорошо показывает логику такого решения.



Сравнение способов решения треугольников

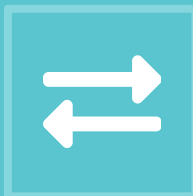
Выбор формулы зависит от того, что именно дано в условии: углы, стороны и есть ли угол между ними.

На практике теорема синусов чаще всего удобна для не прямоугольных треугольников с известными углами и одной стороной; косинусов — для пары сторон с углом между ними.

Обобщение школьных алгоритмов решения треугольников (программа по геометрии, 8 класс)

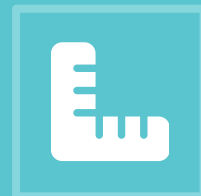


Типичные ошибки при решении задач



Перепутали пару «сторона — противолежащий угол»

Очень легко записать дробь в неправильном порядке: например, поставить сторону напротив «чужого» угла. Перед подстановкой мысленно проверьте соответствие: какой угол лежит напротив каждой стороны.



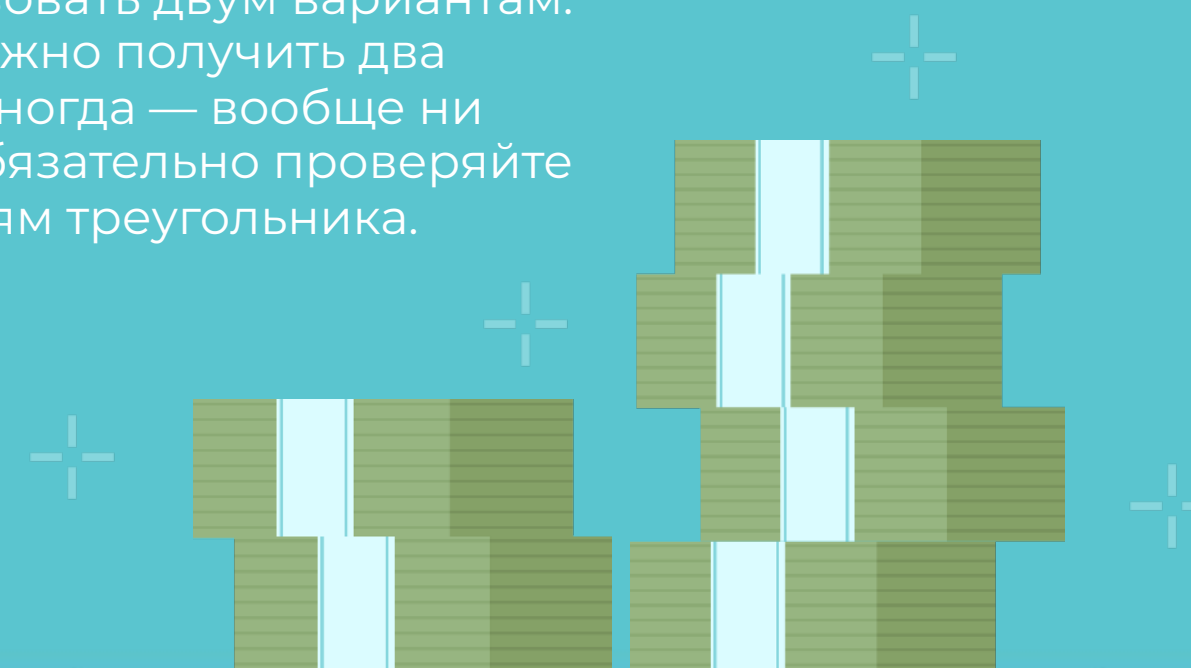
Использовали разные единицы длины

В одной задаче нельзя смешивать сантиметры и метры, не приводя все к одной системе. Сначала переведите длины в одинаковые единицы, затем подставляйте их в формулу.



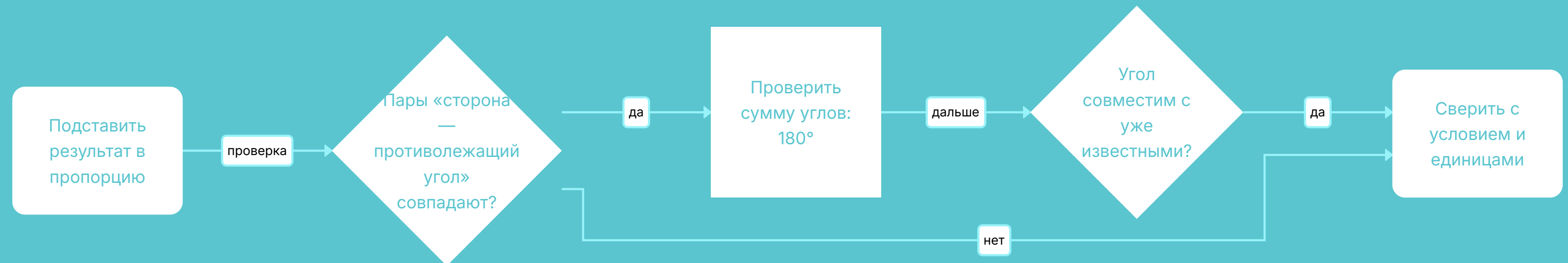
Забыли про случай SSA и возможный второй ответ

Если задано SSA, синус неизвестного угла может соответствовать двум вариантам. Иногда можно получить два ответа, а иногда — вообще ни одного. Обязательно проверяйте по условиям треугольника.



Проверка ответа в задаче на теорему синусов

Пошаговый контроль найденных углов и сторон по теореме синусов



Краткая история появления теоремы синусов

Древняя астрономия и геометрия

Астрономам и географам нужны были расчёты расстояний до удалённых объектов. Сложные измерения сводили к треугольникам, где связывали стороны и углы — так постепенно формировалась идея теорем.

Потребность в измерениях на местности

Когда нужно было определять дистанции до недоступных мест — звёзд, горных вершин, береговых линий — использовали геометрические построения. Треугольник становился удобной моделью для вычислений.

Закрепление в математических методах

Со временем связь между углами и сторонами стала частью стандартных геометрических расчётов. Сегодня теорема синусов — один из главных инструментов школьной тригонометрии.



Как меняется синус при увеличении угла

Синус увеличивается монотонно на отрезке 0° – 90° , поэтому большему углу соответствует больший синус.

Если в треугольнике больше угол, то по теореме синусов ему соответствует и большая противолежащая сторона, поскольку отношение постоянно.

Справочные значения тригонометрических функций (школьный курс), 0° – 90°



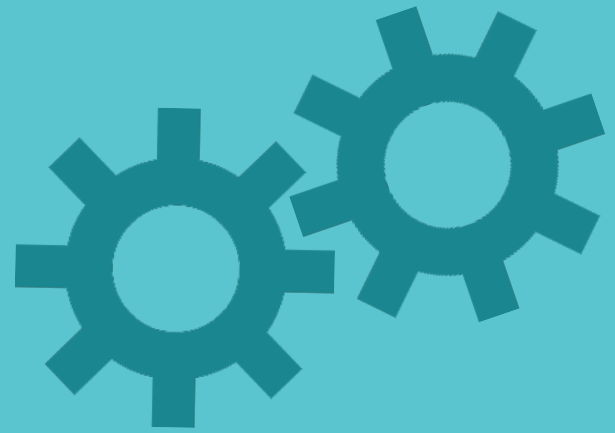
Памятка по применению теоремы синусов

Ситуация	Что известно	Что делать	Результат
1	Два угла и одна сторона	Записать пропорцию $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$	Найти остальные стороны
2	Две стороны и противолежащий угол	По пропорции вычислить синус неизвестного угла	Подобрать угол (возможен вариант)
3	Все элементы известны	Подставить найденное и проверить равенство	Убедиться, что вычисления верны

Три типовые ситуации: как выбирать неизвестное, что считать первым и когда проверять итог. Ключевое — строго сочетать сторону с противолежащим ей углом.

Если в дробях «сторона» и «противолежащий угол» не согласованы, ответ будет неверным; поэтому соответствие нужно проверять перед подстановкой.

Методические правила применения теоремы синусов (школьная геометрия, 8 класс)



Главная идея теоремы синусов



Теорема синусов задаёт одну пропорцию между сторонами и противолежащими углами в любом треугольнике. Она помогает находить неизвестные элементы и служит проверкой правильности вычислений и построений.