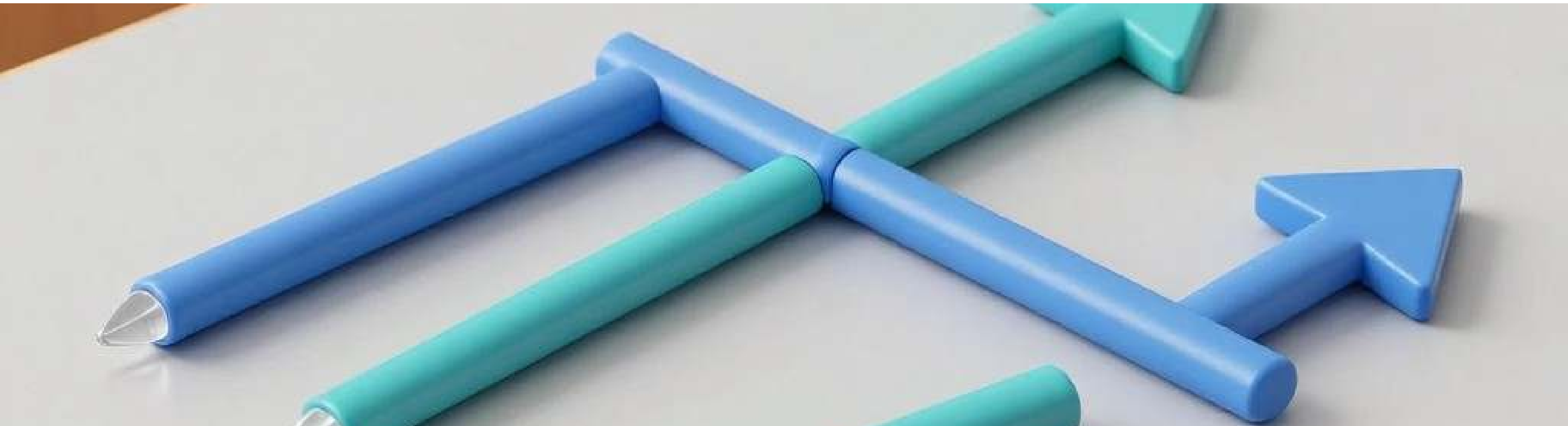


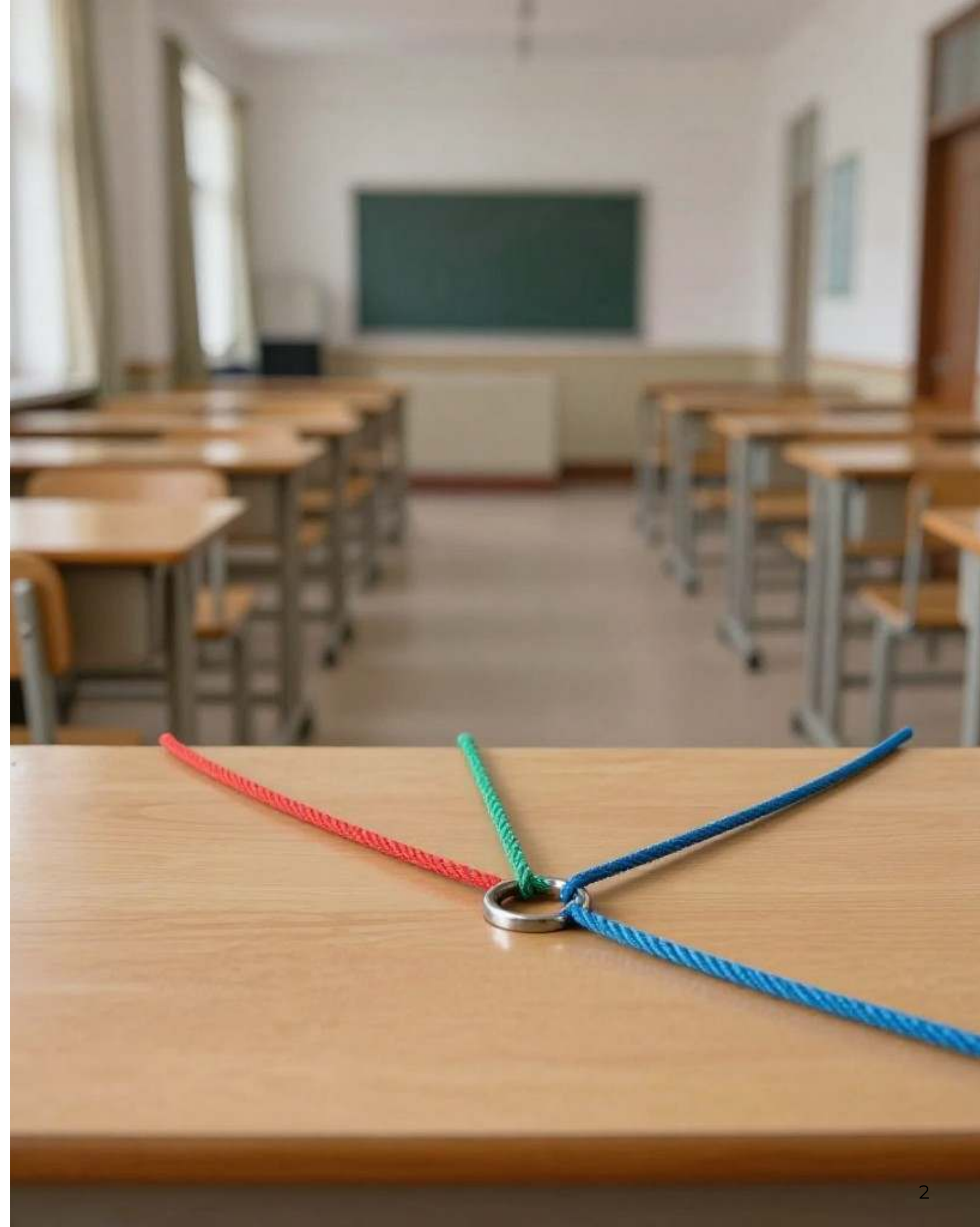
Сложение, вычитание и умножение векторов

На уроке разберём три действия над векторами: геометрически и через координаты.



Почему векторы важны в курсе геометрии 11 класса

Вектор описывает не только длину, но и направление, а также смысл перемещения. На плоскости его удобно записывать как $(x; y)$, а в пространстве — как $(x; y; z)$. Эти операции помогают решать задачи про перемещения, силы и скорости, опираясь на аналитическую геометрию и подготовку к экзамену.



Основные обозначения и свойства векторов

Нулевой вектор имеет модуль 0 и не имеет направления, поэтому его можно считать «переходом без перемещения». Это важная точка отсчёта в вычислениях.

Равные векторы обладают одинаковыми длинами и направлениями, даже если находятся в разных местах чертежа. Противоположные векторы равны по модулю, но направлены в противоположные стороны.

Вектор между двумя точками задаётся как разность координат конца и начала: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ на плоскости. Так появляется мостик между рисунком и формулами.

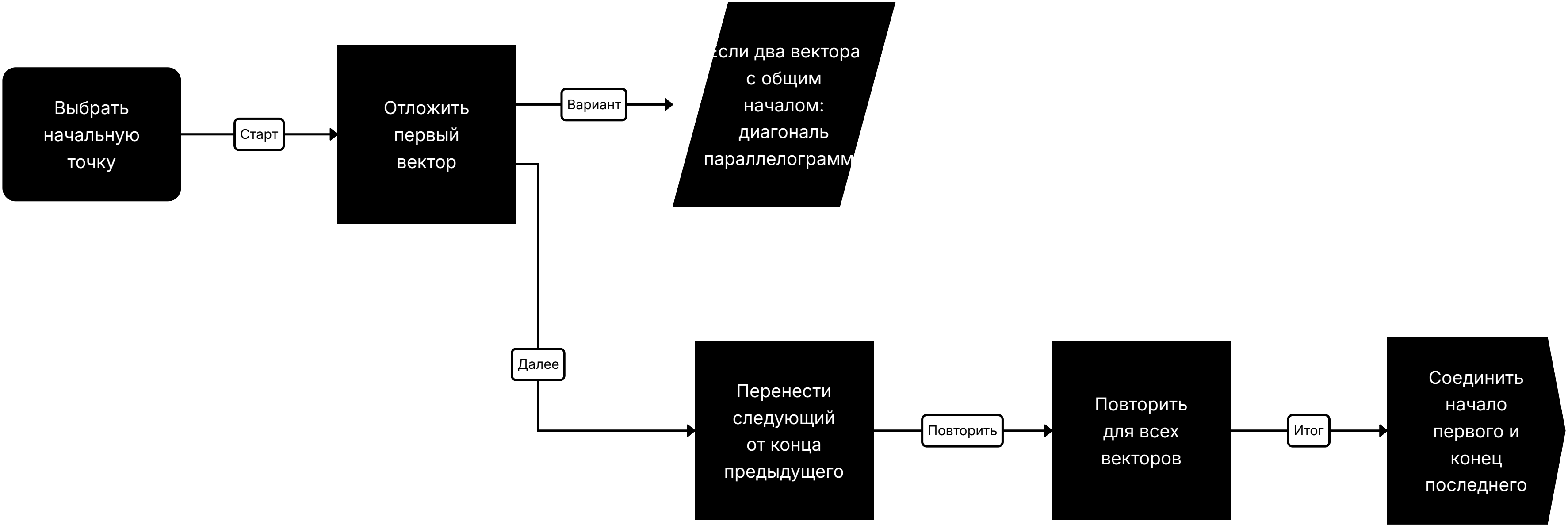
Сложение векторов по правилу треугольника

1. Пусть вектор b отложен от конца вектора a . Тогда сумма $a + b$ изображается вектором, который идёт от начала вектора a к концу вектора b . Геометрически это означает объединение двух последовательных перемещений в одно.
2. При построениях важно, что результат не зависит от «выбранной точки переноса»: направление общего вектора определяется итогом перемещений. Для записи коммутативности используется равенство $a + b = b + a$.



Построение суммы нескольких векторов

Последовательное сложение: переносим каждый следующий вектор от конца предыдущего, а финальный результат соединяем с началом.



Сложение векторов в координатах

Если $a = (x_1; y_1)$ и $b = (x_2; y_2)$, то $a + b = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. На плоскости координаты складываются попарно по каждой оси, как при «суммировании вкладов».

В пространстве выполняется то же правило: $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$. Такой подход особенно удобен, когда рисунок не хочется или некогда строить, а нужно быстро получить результат вычислений.

Для модуля действует ограничение: модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых; равенство наступает, когда векторы сонаправлены. Поэтому знак и взаимная ориентация направления прямо влияют на величину результата.

Способы сложения векторов: сравнение

Сопоставим геометрические и координатные методы по идее, записи и тому, где каждый подход наиболее полезен.

Выбор способа зависит от цели: для рисунка удобнее треугольник/параллелограмм, а для вычислений — координатный и последовательный подход.

Способ	Геометрическая идея	Формула/запись	Применение
Треугольника	Последовательное перемещение	$a + b$	Наглядность результата
Параллелограмма	Сумма как диагональ	$a + b$	Если общие начала
Координатный	Сложить координаты	$(x_1+x_2; y_1+y_2)$	Быстрые расчёты
Последовательный	Пошаговое сложение	$a+b+c...$	Найти общее перемещение

Геометрический смысл вычитания векторов

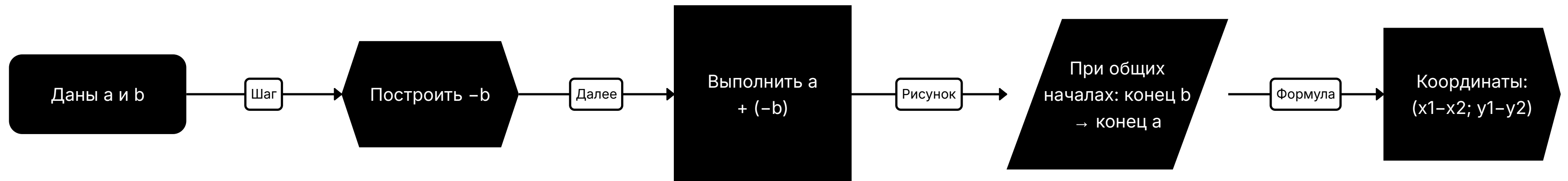
Разность $a - b$ определяется через сумму: $a - b = a + (-b)$, где $-b$ — вектор, противоположный b . Это помогает понять вычитание не как «сложение наоборот», а как новое построение.

Если у векторов a и b общие начала, то $a - b$ изображается вектором, соединяющим конец b с концом a . По направлению и длине он показывает, как отличаются два вектора друг от друга.

В задачах на движение вычитание часто используется для нахождения относительного смещения и разницы перемещений или скоростей. Поэтому оно напрямую связывает сравнение траекторий с векторной записью.

Как строится разность векторов

Вычитание сводится к сложению с противоположным вектором, затем строится итоговый вектор разности.



Свойства вычитания и работа с координатами

Вычитание векторов не коммутативно: в общем случае $a - b \neq b - a$. Поэтому при переносе формул важно следить за тем, какой вектор стоит «первым», а какой «вторым».

Для любого вектора a выполняется равенство $a - a = 0$: вычитая один и тот же вектор, мы получаем нулевое перемещение. Этот факт удобно использовать как быструю проверку.

В координатах разность вычисляется по координатно: вычитают соответствующие координаты, а не складывают их. Иначе знак результата по направлениям сразу станет неверным.

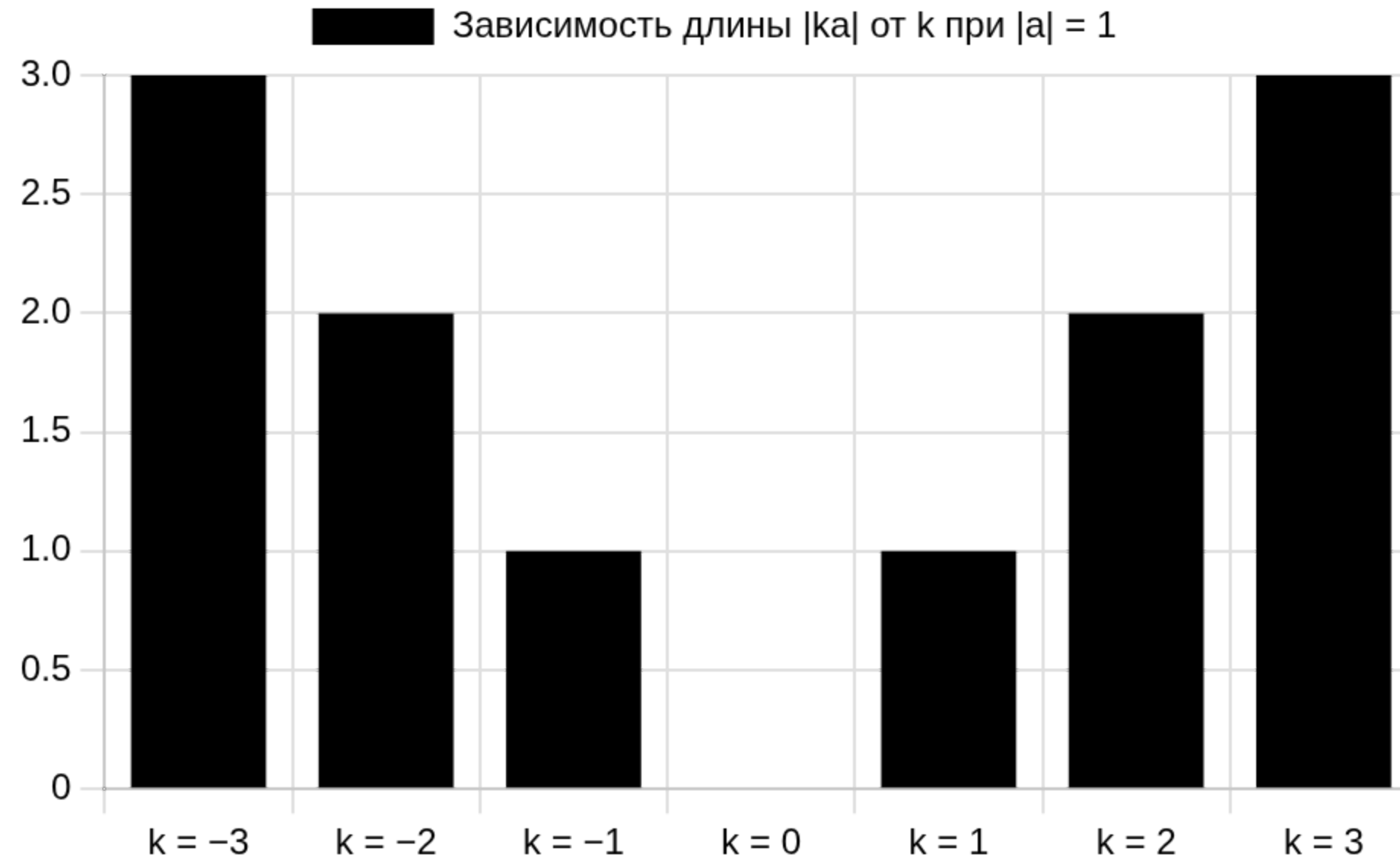
Для двух точек $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ вектор перемещения задаётся формулой $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. Она позволяет находить разность без лишних построений.

Умножение вектора на число



1. При умножении вектора a на число k получают вектор ka . Его модуль равен $|k| \cdot |a|$, то есть длина меняется в $|k|$ раз относительно исходного вектора. Это удобно для масштабирования перемещений.
2. Если $k > 0$, направление сохраняется; при $k < 0$ вектор разворачивается и становится противоположным исходному. При $k = 0$ получается нулевой вектор. В координатах умножаются все компоненты на k одновременно.

Как меняется длина вектора при умножении на число



На вертикальной оси показана длина $|ka|$, которая при $|a| = 1$ равна $|k|$. Знаки k на длину не влияют, но отвечают за смену направления при $k < 0$.

График подтверждает формулу $|ka| = |k| \cdot |a|$: длина растёт линейно с $|k|$ и обращается в ноль при $k = 0$. Знак коэффициента влияет только на ориентацию.

Собственные вычисления по формуле $|ka| = |k| \cdot |a|$ при $|a| = 1$; значения k : $-3 \dots 3$.

Свойства умножения вектора на число

Сумма векторов и умножение согласуются между собой: $k(a + b) = ka + kb$. Это означает, что масштабирование можно «распределить» по слагаемым и не менять итоговый результат.

Два числа при умножении работают как привычная алгебра: $(k + m)a = ka + ma$. Поэтому выражения с линейными коэффициентами упрощаются, а вычисления становятся более организованными и быстрыми.

Если сначала умножить на m , а потом на k , получается то же самое, что умножить сразу: $(km)a = k(ma)$. Геометрически это соответствует последовательному изменению масштаба, а знак определяет возможную смену направления.

Три операции с векторами и их запись

Операция	Формула	Геометрический смысл	Координаты
Сложение	$a + b$	общее перемещение как объединение двух шагов	$(x_1+x_2; y_1+y_2)$
Вычитание	$a - b$	разность как добавление противоположного вектора	$(x_1-x_2; y_1-y_2)$
Умножение	ka	масштабирование: длина меняется, при $k<0$ меняется направление	$(kx; ky)$
Противоположный	$-a$	вектор той же длины в противоположную сторону	$(-x; -y)$

Стандартные школьные формулы векторной алгебры (учебный материал по теме «векторы»).

В таблице сопоставлены формулы, геометрический смысл, координатные записи и типичные примеры для сложения, вычитания, умножения на число и получения противоположного вектора.

Геометрическая интерпретация и координатная запись описывают одну и ту же операцию: меняются лишь способ понимания и инструмент вычислений.

Типичные ошибки при решении задач на векторы

Частая ошибка — перепутать $a - b$ и $b - a$. В первом случае вы «прибавляете» к a противоположный вектор b , а во втором получаете совершенно иной результат по направлению и величине.

Нередко в координатах при вычитании случайно складывают компоненты. Важно помнить: координаты разности находятся как разность соответствующих координат, а не как сумма.

При умножении на отрицательное число забывают, что направление меняется на противоположное. Модуль может оставаться «тем же по числу», но ориентация относительно заданного чертежа становится другой.

Ещё одна распространённая проблема — смешение понятий: длина вектора, его координаты и модуль не одно и то же. Быстрая проверка чертежом и контроль знаков в координатах помогают избежать неверного ответа.

Примеры применения векторов в физике и жизни

Силы и движение: как находят итог

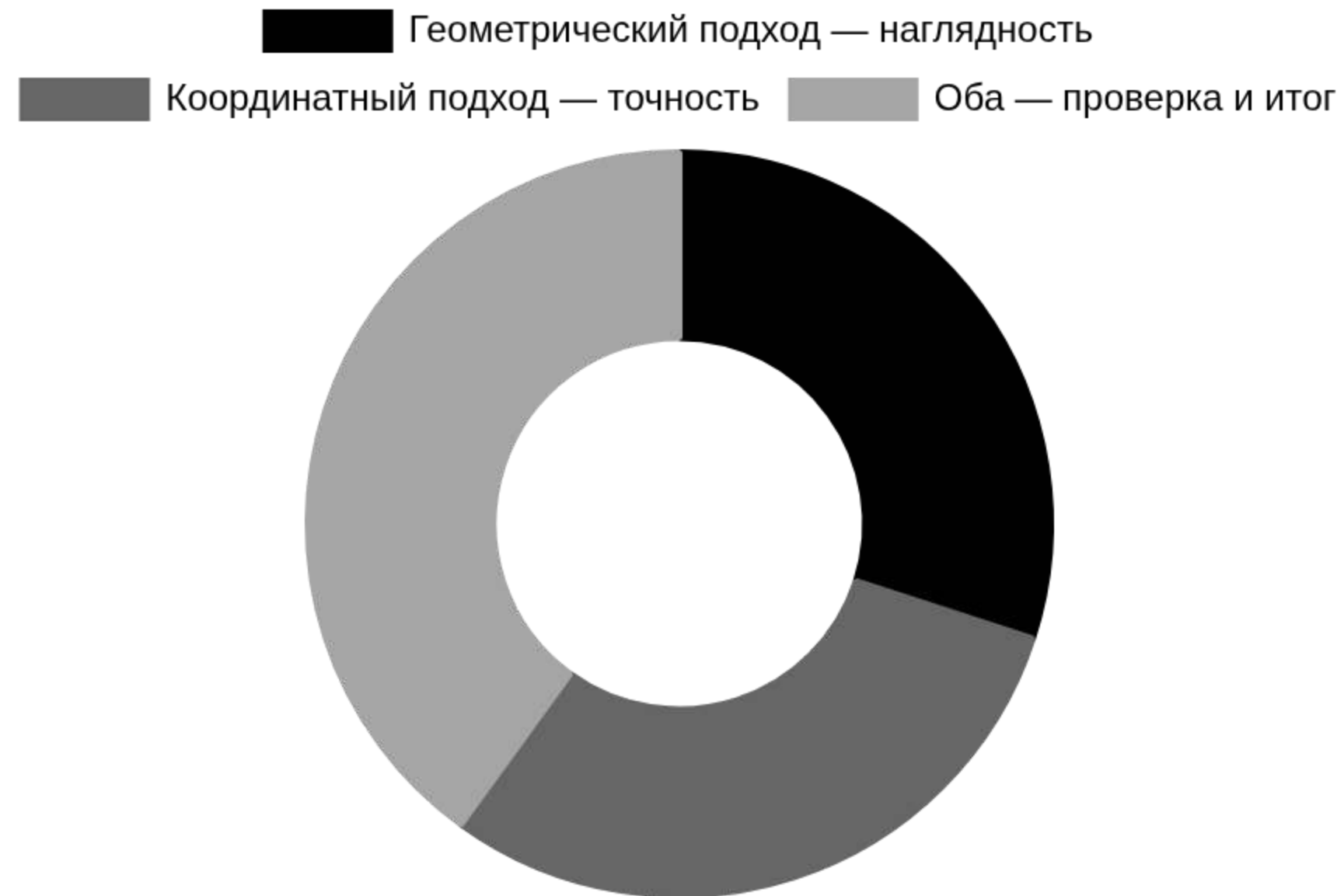
Сложение векторов помогает определить равнодействующую сил и итоговое перемещение при последовательных действиях. Когда движение делится на несколько шагов, результирующий вектор собирается из этих перемещений как единый «ответ».

Сравнение и масштабирование: от скорости до маршрута

Вычитание векторов используют, чтобы находить разность скоростей, сравнивать смещения между точками и рассматривать относительное движение. Умножение на число моделирует увеличение или уменьшение величины на чертеже — например, скорости или силы — без изменения структуры направления.



Геометрический и координатный подходы к операциям с векторами



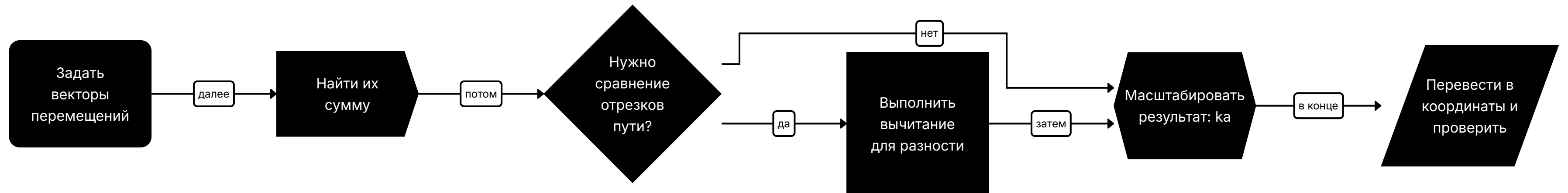
Если задача требует «видеть» направление и взаимное расположение векторов, удобнее геометрия. Когда нужна точность и однотипные вычисления, сильнее работает координатный метод.

Диаграмма подчёркивает баланс: геометрия даёт уверенность в форме и ориентации, координаты — аккуратный расчёт. Совместное применение сокращает ошибки и ускоряет решение.

Учебное обобщение критериев выбора метода; количественные значения отражают сравнительную значимость в школьной практике (без экспериментальных измерений).

Сквозной алгоритм комбинированной векторной задачи

как связаны сложение, вычитание и умножение в одном решении



Практическая проверка ответа в векторной задаче



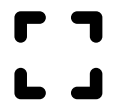
Контроль длины при умножении

Если вектор умножен на 2, длина должна увеличиться в два раза. При умножении на коэффициент k масштаб меняется ровно в $|k|$ раз, что легко проверить по модулю.



Ориентация и знак при отрицательном k

Для отрицательного коэффициента направление вектора меняется на противоположное. Значит, в ответе должны совпасть координаты с нужными знаками и геометрический смысл на чертеже.



Сумма как правило треугольника/параллелограмма

При сложении итоговый вектор обязан соответствовать построению: диагональю параллелограмма или соединению от начала первого до конца последнего. Несоответствие обычно выдаёт ошибку в знаках или в последовательности шагов.



Сверка координат по формулам

Координаты разности находят как разность, а не как сумму: $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Перед записью результата полезно подставить координаты напрямую в формулу, чтобы избежать арифметических промахов.



Согласование геометрии и аналитики

Координатный ответ считают верным только тогда, когда он согласуется с геометрическим изображением: направлением, относительным расположением точек и примерным модулем. Это снижает риск «правильной формулы — неправильного рисунка».

Векторы — удобный язык для движения и анализа

Сложение объединяет векторы в один общий результат, вычитание сравнивает их через противоположный вектор, а умножение на число изменяет длину и при необходимости направление. Геометрия и координаты работают совместно, делая векторный аппарат универсальным для школьных задач.