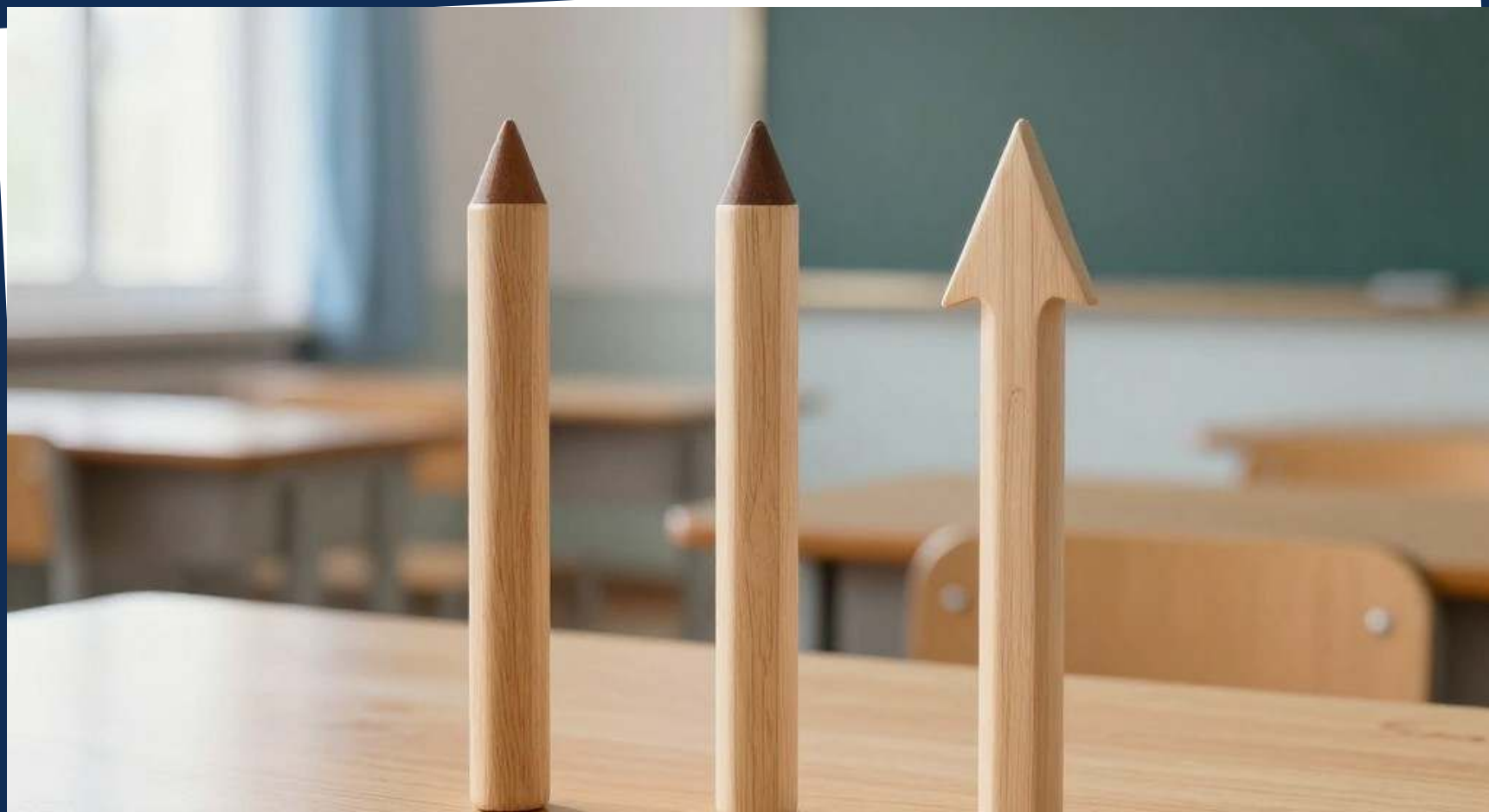


РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ: ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ И СПОСОБЫ ПРОВЕРКИ

Узнаем, когда векторы действительно равны и как это проверить.

ЗАЧЕМ СРАВНИВАТЬ ВЕКТОРЫ В ГЕОМЕТРИИ



Векторы помогают описывать движение, направление и перенос фигур. Понимание их равенства нужно для построения чертежей, решения задач на координатной плоскости и подготовки к темам о векторах и их операциях в 9 классе.

ЧТО ТАКОЕ ВЕКТОР И КАК ОН ОБОЗНАЧАЕТСЯ

➤ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТРЕЗОК

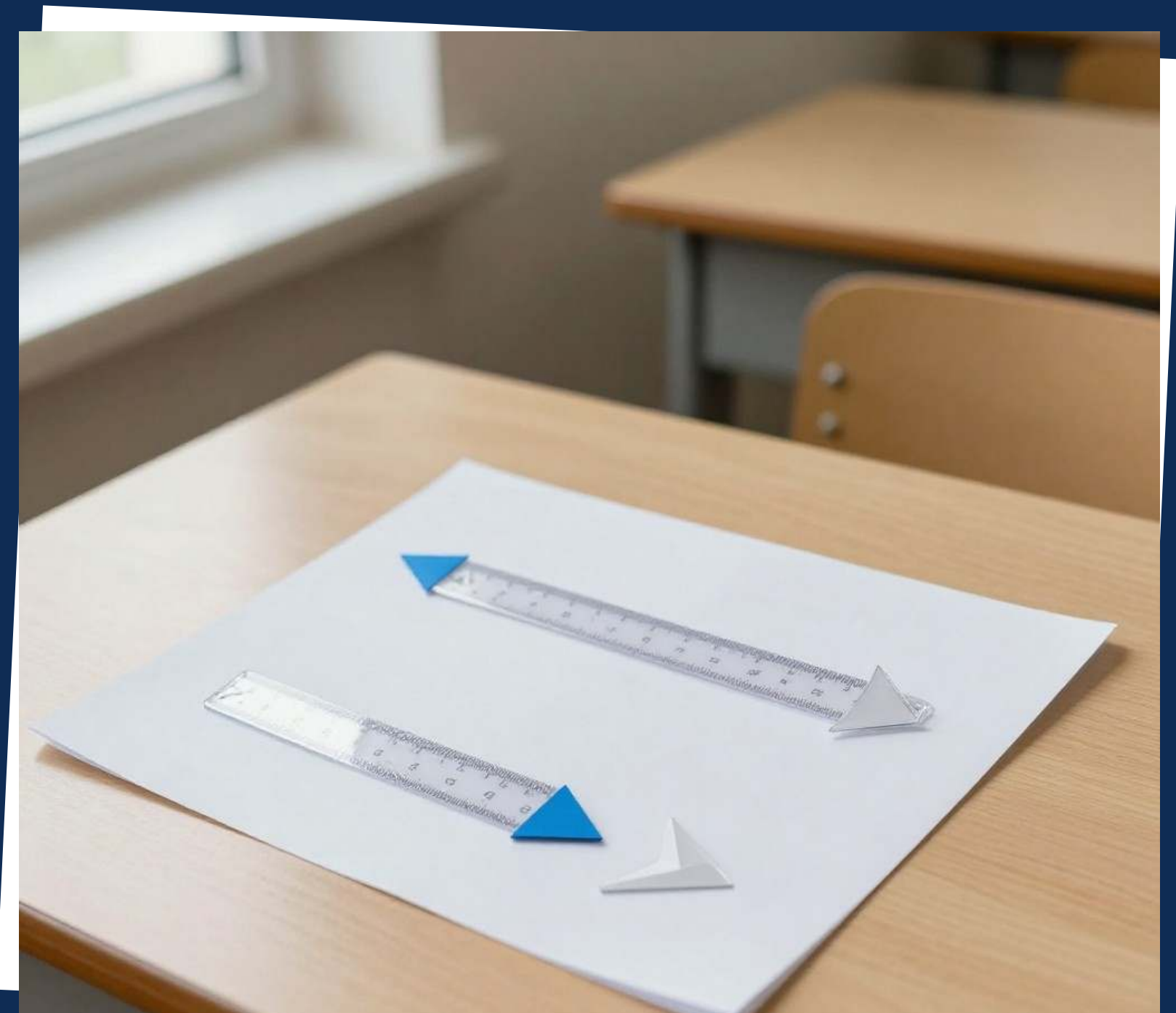
Вектор — это отрезок с началом и концом, у которого есть длина и направление. Именно эти два свойства отличают его от обычного отрезка.

➤ МОДУЛЬ ВЕКТОРА

Длина вектора называется модулем. Она показывает, насколько «длинным» является вектор, но сама по себе ещё не определяет его как равный другому.

➤ ОБОЗНАЧЕНИЕ НА ЗАПИСИ

На чертежах вектор изображают стрелкой, а в записи используют $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\overrightarrow{AB}$. В школьной геометрии векторы рассматривают на плоскости и в координатной системе.



ДВА ПРИЗНАКА РАВЕНСТВА ВЕКТОРОВ



СРАВНИТЕ ДЛИНУ

Первое условие равенства — одинаковый модуль. Если один вектор длиннее другого, равенства быть не может, даже при одинаковом направлении.

01

ПРОВЕРЬТЕ НАПРАВЛЕНИЕ

Векторы должны быть направлены в одну сторону. Если стрелки смотрят по-разному, то векторы не равны, даже если их длины совпадают.

02

УЧТИТЕ ПЕРЕНОС

Положение вектора на листе неважно: его можно параллельно перенести. Равный вектор совпадёт с исходным, если сохранить длину и направление.

03

СДЕЛАЙТЕ ВЫВОД

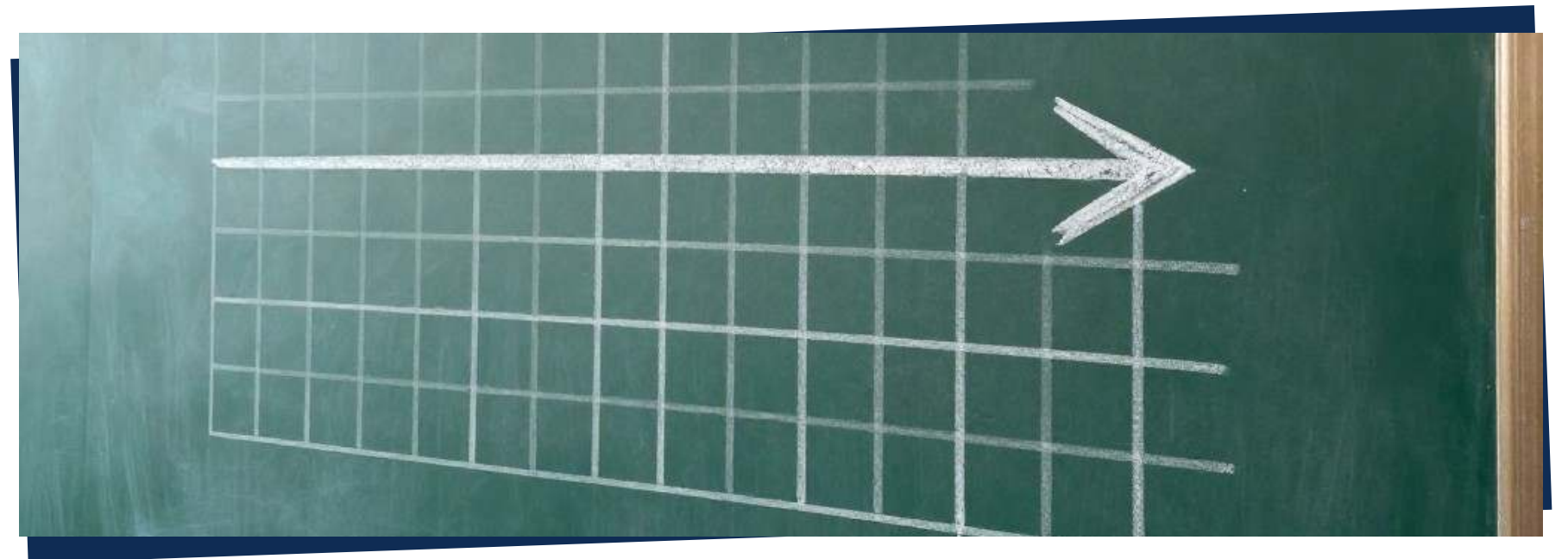
Равенство возникает только тогда, когда оба признака совпадают одновременно. Достаточно одного отличия, чтобы векторы стали неравными.

04

КАК ВЫГЛЯДЯТ РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ НА РИСУНКЕ

ОДИНАКОВАЯ ДЛИНА

На чертеже равные векторы имеют одинаковое число клеток или одинаковую длину линейного отрезка. Это легко увидеть даже без дополнительных вычислений.



ОДНО НАПРАВЛЕНИЕ

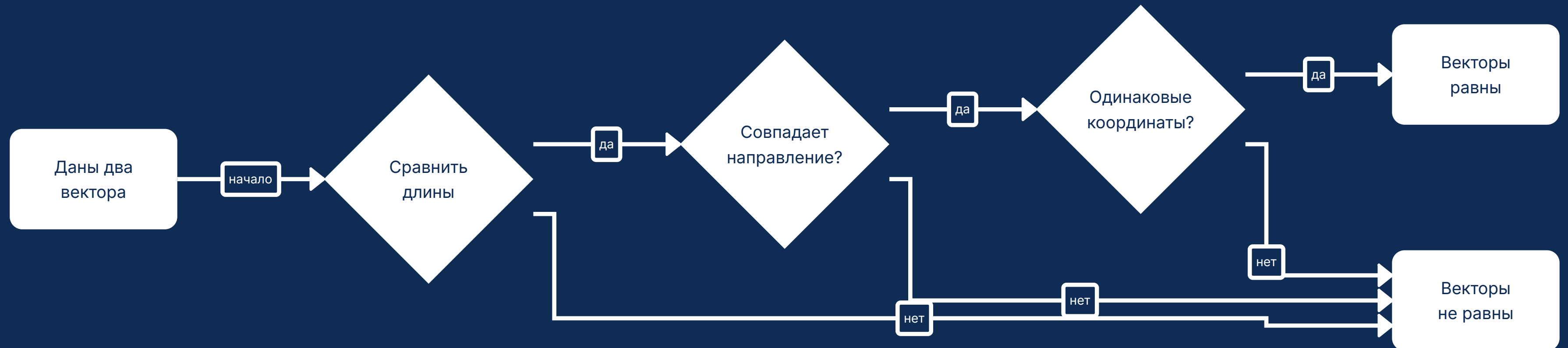
Стрелки равных векторов направлены одинаково. Они могут быть нарисованы в разных местах, но выглядят как один и тот же перенос.

ПРИМЕР ЗАПИСИ

Если на рисунке $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ совпадают по длине и направлению, их записывают как равные векторы.

ПРОВЕРКА РАВЕНСТВА ВЕКТОРОВ ПО РИСУНКУ И КООРДИНАТАМ

Алгоритм сравнения по чертежу и координатной записи



СОНАПРАВЛЕННЫЕ И ПРОТИВОПОЛОЖНО НАПРАВЛЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

» СОНАПРАВЛЕННЫЕ

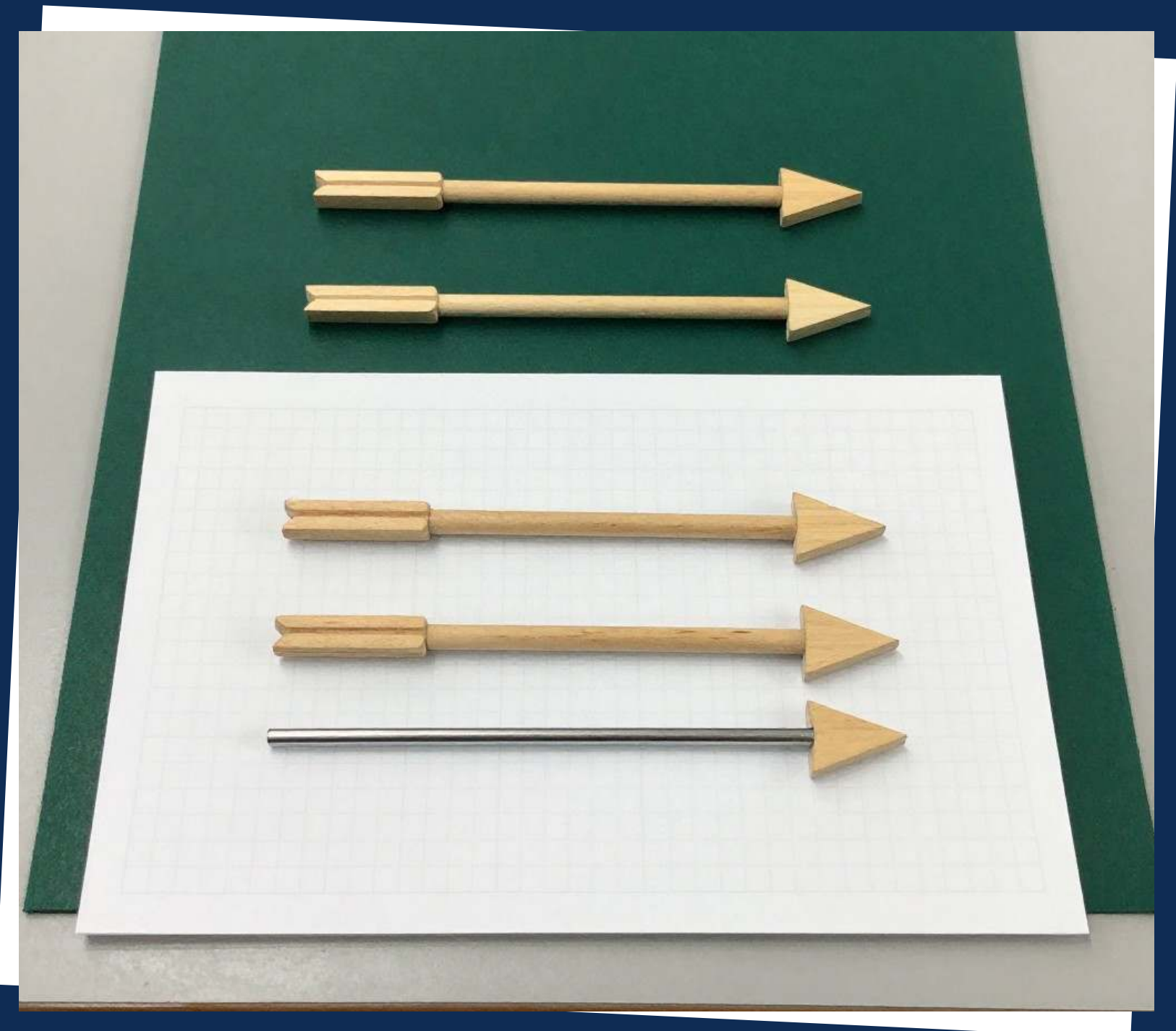
Сонаправленные векторы смотрят в одну сторону. Они могут находиться в разных местах плоскости, но сохраняют одинаковое направление, если стрелки идут одинаково.

» ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ

Противоположно направленные векторы имеют одинаковую длину, но их стрелки смотрят в разные стороны. Из-за этого они не считаются равными.

» ГЛАВНОЕ РАЗЛИЧИЕ

Только сонаправленные векторы могут быть равными. Совпадение длины без совпадения направления не даёт равенства, даже если рисунок выглядит похоже.



ЧТО ВАЖНО ПРИ СРАВНЕНИИ ВЕКТОРОВ

Диаграмма показывает, какие признаки влияют на проверку равенства сильнее всего, а какой признак только помогает в рисунке.

Главными остаются длина и направление; положение вектора на листе не определяет равенство.

* Школьный курс геометрии

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

1

2

3

1. ИСХОДНЫЙ ВЕКТОР

Вектор задан на плоскости как направленный отрезок с определённой длиной и направлением.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Вектор можно перенести без поворота и растяжения так, чтобы он занял другое место, но сохранил свои свойства.

3. СОВПАДЕНИЕ С РАВНЫМ ВЕКТОРОМ

После переноса он может полностью совпасть с другим вектором той же длины и направления, что помогает в чертежах и доказательствах.

СРАВНЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО ОСНОВНЫМ СВОЙСТВАМ

Таблица показывает, какие признаки совпадают у равных векторов, а какие приводят к различию.

Для равенства нужны одновременно одинаковая длина и одинаковое направление; одно совпадение недостаточно.

Векторы	Длина	Направление	Равенство
AB и CD	одинакова	одинаковое	равны
EF и GH	разная	одинаковое	не равны
KL и MN	одинакова	противоположное	не равны

КАК ЗАПИСЫВАЮТ РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

01

СТАНДАРТНАЯ ЗАПИСЬ

Равенство векторов записывают знаком «=»: $\vec{AB} = \vec{CD}$ или $\vec{a} = \vec{b}$. Такая запись показывает, что сравниваются не точки на рисунке, а сами векторы как направленные отрезки.

02

ЧТО ОЗНАЧАЕТ РАВЕНСТВО

Если векторы равны, у них совпадают длина и направление. Их можно изобразить в разных местах чертежа, но после параллельного переноса один вектор полностью совпадёт с другим.

03

ПРОВЕРКА ПО КООРДИНАТАМ

Когда векторы заданы координатами, сравнивают соответствующие числа: должны совпасть первая и вторая координаты. Если хотя бы одна координата отличается, векторы не равны, даже при одинаковом направлении.

04

ЧТО ВАЖНО ПОМНИТЬ

Запись равенства всегда относится к самому вектору, а не к его положению на листе. Поэтому главным остаётся совпадение направления и длины, а не место начала стрелки.

РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

ОДИНАКОВЫЙ СДВИГ

На координатной сетке равные векторы удобно узнавать по одинаковому смещению: столько же клеток вправо, влево, вверх или вниз. Если два вектора дают один и тот же перенос, они равны, даже если начинаются в разных точках.



ОДИН РЕЗУЛЬТАТ — РАЗНЫЕ МЕСТА

Представьте две стрелки, нарисованные в разных частях плоскости. Одна начинается ближе к центру, другая — у края, но обе проходят одинаковое число клеток по горизонтали и вертикали. Такой рисунок наглядно показывает равенство векторов.



ПРОВЕРКА ПО КООРДИНАТАМ

Если координаты двух векторов записаны одинаково, например $((3; 2))$ и $((3; 2))$, то векторы равны. Координаты сразу показывают и длину, и направление, поэтому сравнение становится особенно быстрым и удобным.



РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ ВЕКТОРОВ В ТИПИЧНЫХ СЛУЧАЯХ

Диаграмма показывает четыре распространённые ситуации сравнения. Она помогает быстро увидеть, что равенство возможно только при одновременном совпадении двух признаков, а не одного из них.

Только первый случай даёт равенство. Любое различие в длине или направлении приводит к отрицательному результату.

* Школьный курс геометрии

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ СРАВНЕНИИ ВЕКТОРОВ



Путают направление

Ещё одна ошибка — принимать за равные векторы одинаковой длины, но с противоположно направленными стрелками. Для равенства направление должно совпадать полностью, а не частично.



Смотрят только на место

Иногда векторы считают разными лишь потому, что они нарисованы в разных частях листа. На самом деле положение не влияет на равенство, если длина и направление совпадают.



Смешивают модуль и вектор

Иногда сравнивают только длину и забывают, что вектор — это не просто отрезок. У него есть направление, и именно вместе с длиной оно определяет равенство.

ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ РАВЕНСТВА НА ЧЕРТЕЖАХ

Три учебных примера помогают увидеть, какие признаки нужно сравнивать в первую очередь.

Векторы	Длина	Направление	Вывод
AB и CD	4 клетки	вправо-вверх	равны
EF и GH	4 и 5	одинаковое	не равны
KL и MN	одинаковая	противоположное	не равны

Совпадение длины без совпадения направления не даёт равенства. Для верного вывода нужны оба признака сразу.

* Учебные чертежи по геометрии

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Последовательность проверки по рисунку, клеткам и координатам



РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ В ФИЗИКЕ И ПОВСЕДНЕВНЫХ СИТУАЦИЯХ

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

В физике векторы описывают перемещение, силу и скорость. Поэтому равные векторы помогают сравнивать одинаковые действия или движения, даже если они начинаются в разных точках пространства.

01

ОДИНАКОВЫЙ ПУТЬ

Если два тела сместились на одно и то же расстояние в одном направлении, их перемещения можно считать равными векторами. Важно не место старта, а совпадение длины и направления.

02

ПРИМЕР ИЗ ЖИЗНИ

Два шага на север на одинаковое расстояние задают равные векторы. Даже если шаги сделаны в разных местах, результат одинаков: направление совпадает, а длина перемещения одинакова.

03

ЧТО СОВПАДАЕТ У РАВНЫХ ВЕКТОРОВ

Диаграмма подчёркивает, что равенство связано только с двумя свойствами. Начальная точка и место на плоскости могут меняться без нарушения равенства.

У равных векторов полностью совпадают модуль и направление, а остальные признаки не влияют на результат сравнения.

* Школьный курс геометрии

КРАТКИЕ ПРАВИЛА ДЛЯ ЗАПОМИНАНИЯ

ПЕРЕНОС ПОМОГАЕТ

Равные векторы можно мысленно совместить параллельным переносом. Если после такого переноса стрелки полностью совпадают, значит, векторы равны по длине и направлению.

ДВА ОБЯЗАТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКА

Для равенства нужно, чтобы совпали и модуль, и направление. Если хотя бы один признак отличается, векторы уже нельзя считать равными, даже при похожем рисунке.

ЧТО НЕ УЧИТЫВАЕТСЯ

Начальные точки, положение на листе и поворот рисунка не влияют на ответ. При решении задач важно смотреть на свойства вектора, а не на его размещение.

ИТОГ УРОКА: КАК УЗНАТЬ РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление, где бы они ни были изображены. Это правило помогает читать чертежи, работать с координатами и уверенно решать задачи по геометрии.