

Уравнения и неравенства на плоскости

Алгебра и геометрия встречаются на одной координатной плоскости.



С чего начинается тема

Здесь важны координатная плоскость, прямые и области. Вы уже умеете работать с координатами и подстановкой, а теперь увидите, как алгебраические записи превращаются в графики и решения.



Что означает решение

1. Пара как точка

Уравнение с двумя неизвестными описывает все пары значений, при которых равенство становится верным. Каждая такая пара соответствует точке на координатной плоскости и может быть проверена подстановкой.

2. Проверка принадлежности

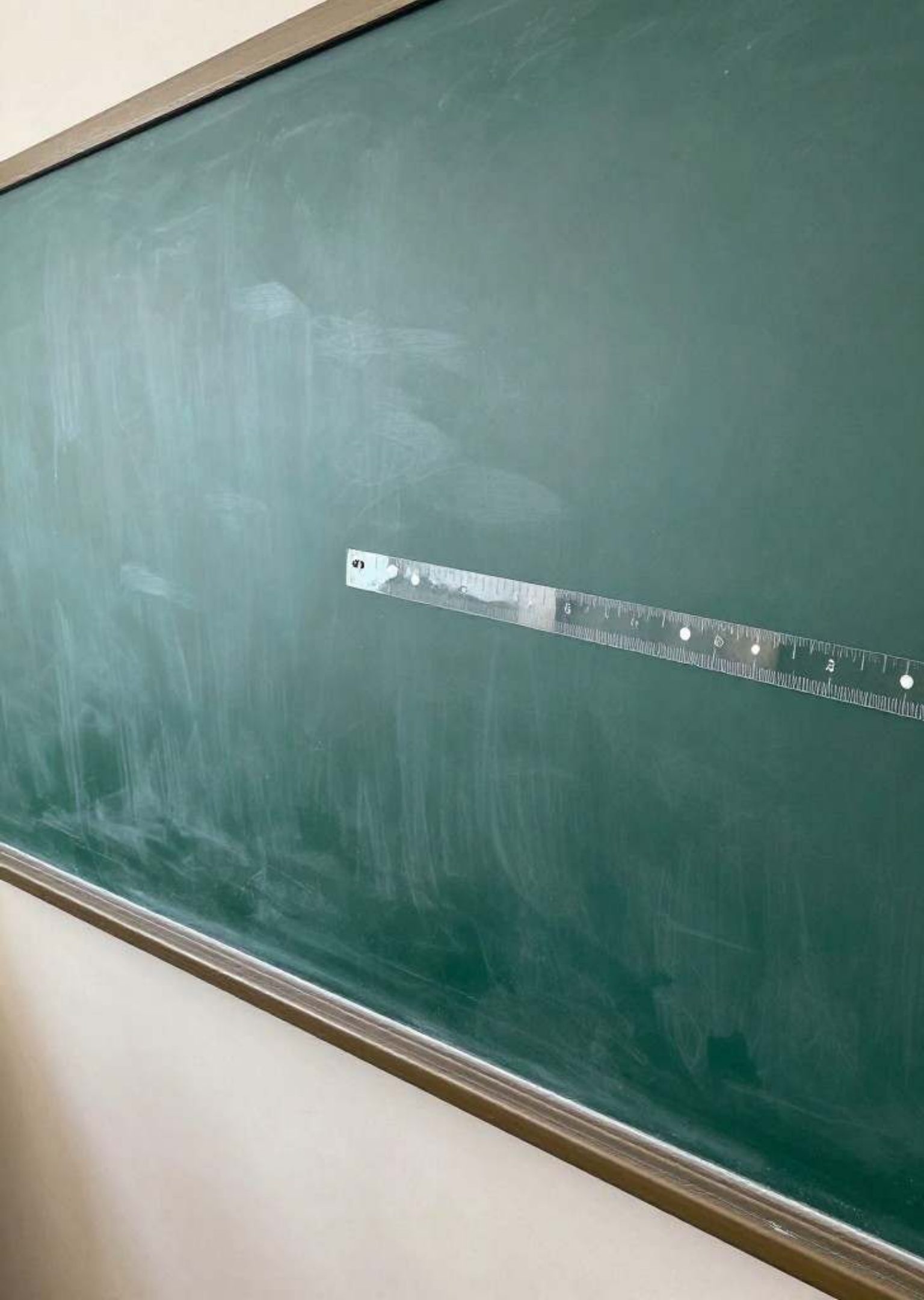
Если подставить координаты в уравнение и получить верное равенство, точка принадлежит его графику. Так алгебраическая запись превращается в геометрический образ, который можно увидеть и построить.

3. Общее решение

Решение системы уравнений — это не отдельное число, а общая точка двух графиков. Иногда точка одна, иногда их бесконечно много, а иногда общих точек нет.

4. Смысл ответа

Поэтому при работе с такими задачами важно не только вычислить ответ, но и понимать, что именно он означает на плоскости: линию, пересечение или отсутствие пересечения.



Уравнение прямой

Геометрический смысл

Линейное уравнение вида $ax+by=c$ задаёт прямую на плоскости. После преобразования к виду $y=...$ или $x=...$ её удобно строить по двум найденным точкам.

Удобная запись

Если коэффициент при y не равен нулю, удобно выразить y . Если коэффициент при x не равен нулю, можно выразить x . Выбор формы зависит от того, что проще вычислить.

Построение и контроль

Двух точек достаточно, чтобы провести единственную прямую. Третья точка используется как быстрая проверка: она должна либо принадлежать линии, либо показать ошибку в вычислениях.

Две точки и проверка

1.

Первая точка

Для уравнения $2x + y = 5$ удобно выбрать $x = 0$: тогда $y = 5$, и точка $(0; 5)$ лежит на графике. Это одна из опорных точек для построения прямой.

2.

Вторая точка

Если взять $y = 0$, получаем $2x = 5$, значит $x = 2,5$. Вторая точка — $(2,5; 0)$. Две найденные точки уже позволяют провести прямую без дополнительных вычислений.

3.

Проверка подстановкой

Для проверки подставляют обе координаты в исходное уравнение. Если равенство выполняется, точка действительно принадлежит прямой; если нет, значит в вычислениях допущена ошибка.

Построение графика уравнения

Алгоритм применяют ко всем линейным уравнениям с двумя неизвестными.



Система двух уравнений

Общие точки

Система двух линейных уравнений означает поиск общей точки двух прямых. Если прямые пересекаются, решение одно; если они совпадают, решений бесконечно много.

Нет решений

Когда прямые параллельны, но не совпадают, общих точек нет. В этом случае система оказывается несовместной, потому что одно и то же значение не удовлетворяет обоим уравнениям одновременно.

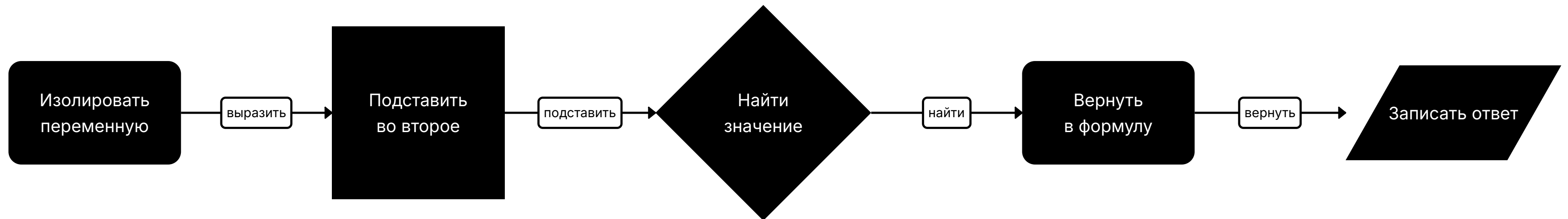
Три возможных случая

Графический смысл помогает сразу увидеть результат: пересечение, совпадение или отсутствие контакта. Именно поэтому системы удобно рассматривать не только алгебраически, но и через построение графиков.



Алгоритм подстановки

Подстановка особенно удобна, когда одна переменная уже выражена через другую.



1

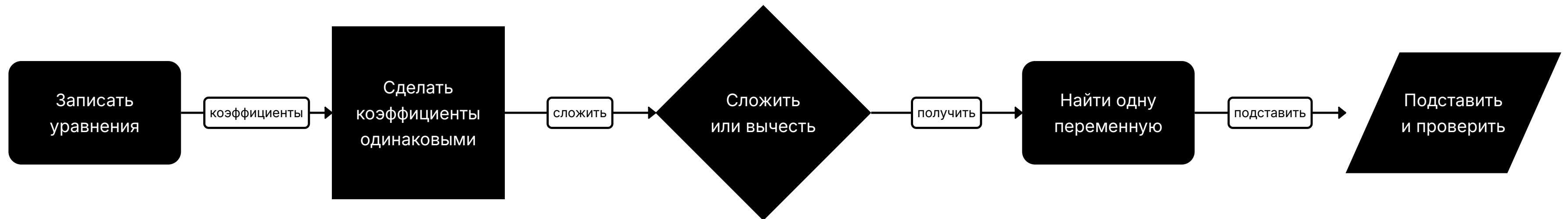
**точка пересечения
показывает, что система
имеет единственное
решение.**

Одна общая точка полностью определяет решение системы двух линейных уравнений.

Пример из темы: графики уравнений $y=2x-1$ и $x+y=8$.

Метод исключения

Последовательность действий при решении линейной системы методом исключения.



$(3;1)$

**— единственная общая
точка двух прямых
в этом примере.**

Из двух уравнений сразу получается точка
пересечения: это и есть искомое решение системы.

Составлено по примеру из условия

Графический контроль

Проверка ответа

Сначала алгебраический ответ стоит проверить на рисунке. Если обе прямые действительно проходят через найденную точку, решение согласуется с геометрическим смыслом системы.

Смысл пересечения

График помогает увидеть, есть ли вообще пересечение. Параллельные прямые сразу показывают отсутствие решения, а совпадающие — бесконечное множество общих точек.

Контроль ошибки

Этот способ особенно полезен после вычислений. Даже при точном алгебраическом решении построение выявляет ошибку в знаке, коэффициенте или переносе слагаемых.

Неравенства и граница

1. Строгие знаки

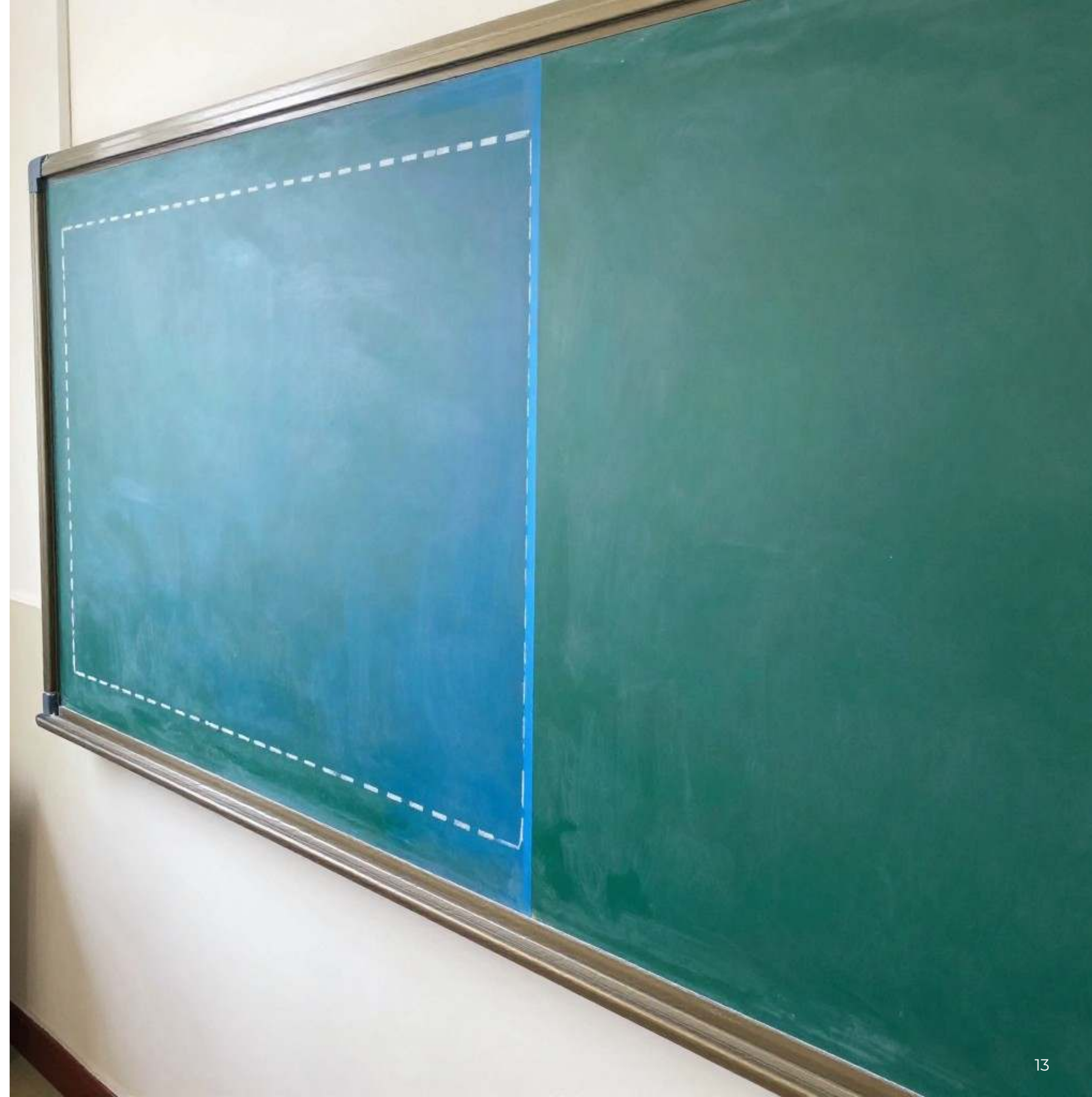
Строгие неравенства задают одну из двух полуплоскостей, не включая граничную прямую. Поэтому знак $<$ или $>$ всегда означает, что линия не принадлежит решению.

2. Граница входит

Не строгие знаки $\leq$ и $\geq$ включают границу в множество решений. На чертеже это показывают сплошной линией, чтобы отличить её от пунктирной.

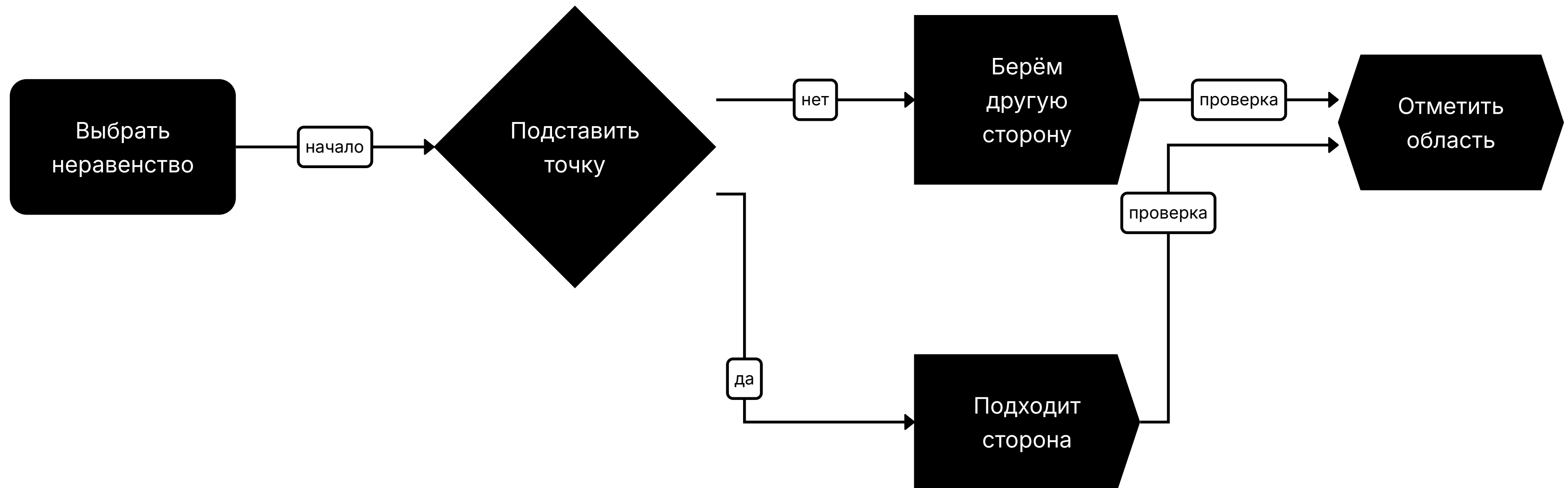
3. Выбор области

После построения прямой выбирают нужную сторону плоскости. Именно там расположены все точки, которые удовлетворяют исходному неравенству.



Как выбрать нужную полуплоскость

Подставляют тестовую точку, чаще (0; 0), и по результату выбирают нужную полуплоскость.



Четыре знака на одном примере



На одном и том же шаблоне хорошо видно, как меняется только наличие границы: сама полуплоскость выбирается по знаку, а линия зависит от строгости неравенства.

Строгие знаки не включают прямую, нестрогие — включают. При этом выбранная сторона плоскости определяется знаком неравенства, а не видом линии.

Составлено по учебному примеру $x+y=4$

Как читать систему неравенств



Пересечение областей

Каждое неравенство оставляет свою допустимую область на плоскости. Решение системы — только те точки, которые одновременно подходят всем условиям без исключений.



Пошаговый поиск

Общую часть удобно искать поэтапно: сначала строят каждую границу, затем отмечают соответствующую полуплоскость и сравнивают получившиеся области между собой.



Пустое пересечение

Если области не пересекаются, система несовместна. Тогда ни одна точка плоскости не удовлетворяет всем неравенствам одновременно, и решений нет.



Неограниченная область

Когда общая область тянется без ограничений, решений бесконечно много. Это типично для совместимых неравенств, задающих широкую область на плоскости.

Как выглядит область решений

Первая четверть и граница

Сначала отмечают первую четверть: здесь одновременно выполняются условия $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Затем проводят прямую $x+y=6$ и оставляют часть плоскости ниже неё, включая границу. Внутри получается аккуратный треугольник, который легко проверить по вершинам.



Треугольник решений

Вершины области находятся на осях и на линии ограничения. Точки $(0; 0)$, $(6; 0)$ и $(0; 6)$ задают замкнутую фигуру, все стороны которой входят в решение. Такой рисунок помогает увидеть множество решений без длинных вычислений.



Откуда берутся ошибки

1. Граница

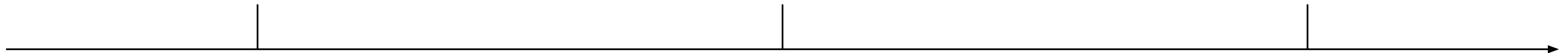
Самая частая ошибка — неверно изобразить границу: пунктир вместо сплошной или наоборот. Из-за этого меняется смысл ответа, хотя вычисления могут быть выполнены верно.

2. Подстановка

Следом появляются ошибки в алгебре: при переносе слагаемых теряется знак, а при подстановке тестовой точки берут точку на самой прямой, что делает проверку бессмысленной.

3. Контроль

Последний шаг — контроль. Перепроверьте знак неравенства, границу и соответствие области условию. Короткая повторная проверка обычно сразу обнаруживает неточность.



Мини-памятка

Краткая схема помогает быстро выбрать метод и не смешать уравнения с неравенствами.

Во всех случаях сначала приводят запись к удобному виду, а затем переходят либо к построению, либо к выделению общей части областей.

Случай

Уравнение

Система ур-ний

Неравенство

Система неравенств

Действие

Точки и прямая

Общая точка

Граница и сторона

Общая область

Сводка по материалу презентации

Главное — видеть смысл записи

Эта тема показывает, как алгебра превращается в геометрию: прямая, точка, полуплоскость и область решений. Если понимать смысл записи, выбирать метод и проверять ответ становится заметно проще.