

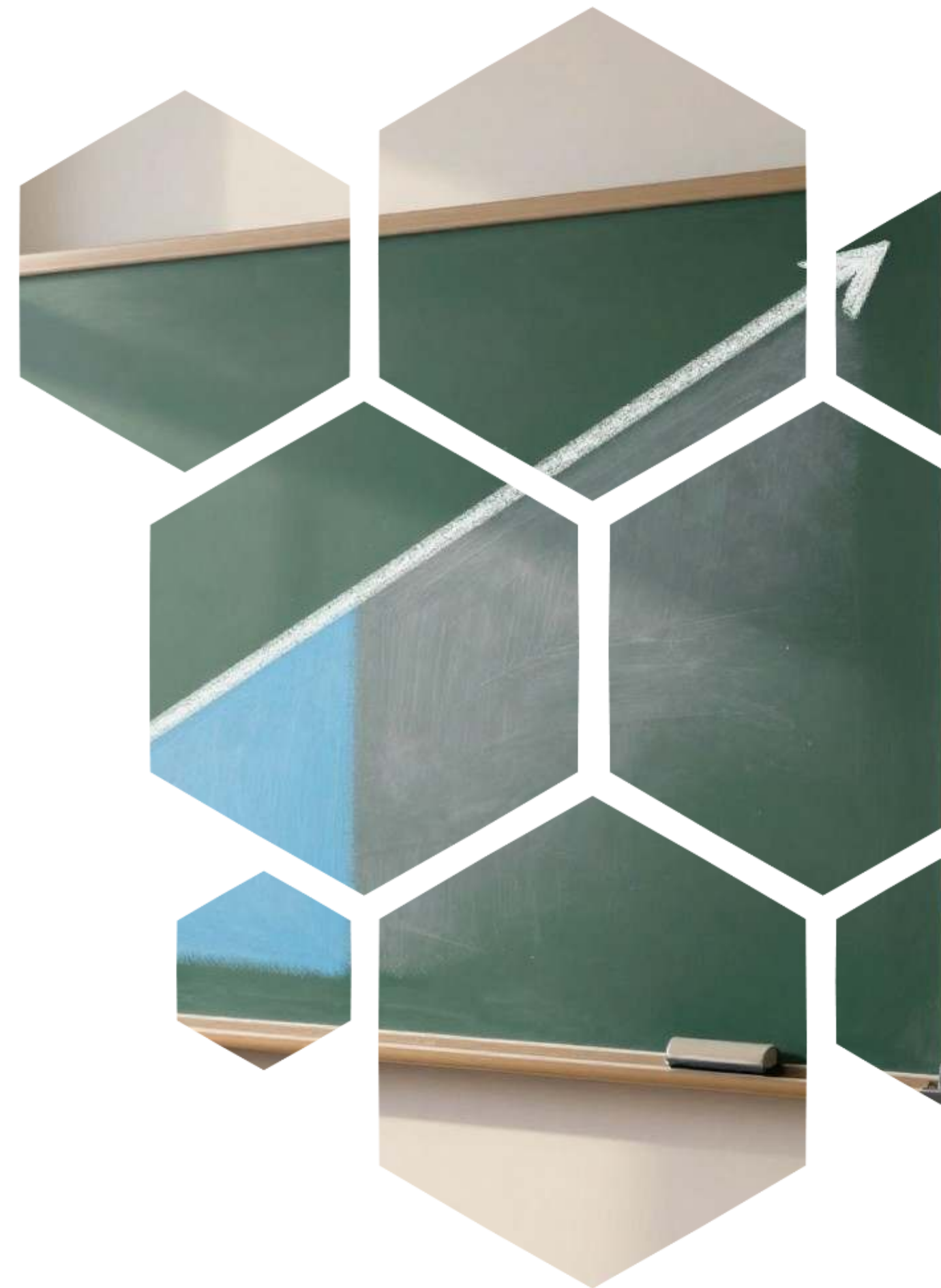
Полуплоскости: как прямая делит плоскость

Полуплоскость — одна из двух частей плоскости. Прямая задаёт границу и стороны решения.



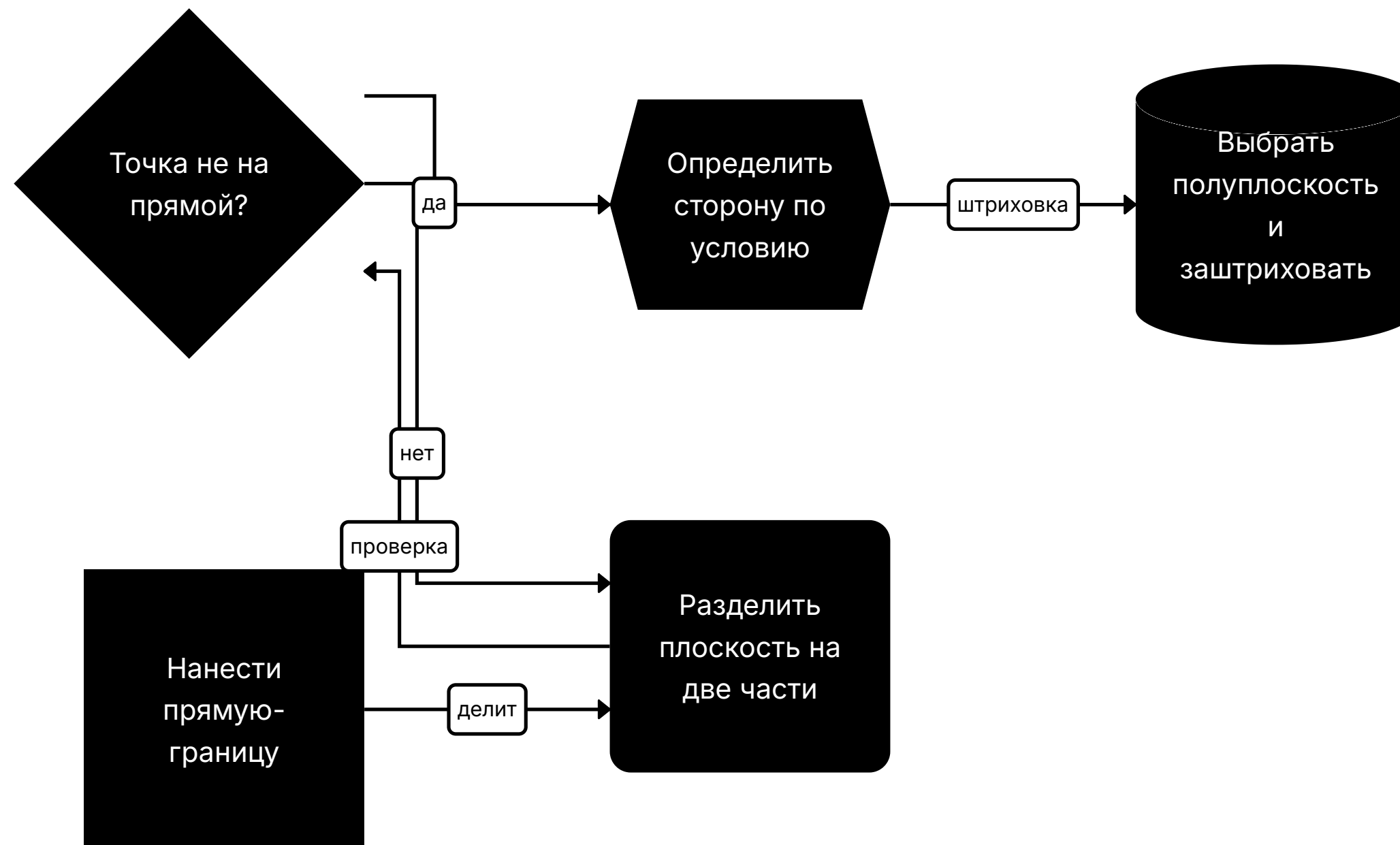
Зачем изучать полуплоскости в 9 классе

Полуплоскости нужны, чтобы на координатной плоскости находить области решений линейных неравенств и систем. Знак неравенства подсказывает, какую сторону от прямой заштриховывать. Так геометрия соединяется с алгеброй и помогает анализировать ограничения в задачах.



Прямая → две стороны → нужная полуплоскость

Алгоритм выбора полуплоскости по условию и принадлежности точек.



Определение полуплоскости

Полуплоскость — часть плоскости, ограниченная прямой. Каждая прямая задаёт две полуплоскости, лежащие по разные стороны. Любая точка попадает ровно в одну из них, если она не на самой прямой.

Внутренняя область полуплоскости состоит из точек, для которых выполняется одно и то же условие «по одну сторону». В координатной геометрии это удобно записывать неравенством, а границу — уравнением прямой.

Такое описание помогает строить графики и быстро проверять принадлежность точки области. Нужно сравнить значения в неравенстве и понять, подходит ли точка выбранной стороне относительно границы.

Граница, внутренняя область и включение линии

Граничная прямая отделяет одну полуплоскость от другой. Внутренняя область — это все точки, которые лежат строго по одну сторону от границы и удовлетворяют заданному неравенству.

Если условие строгое, например $y > 2x + 1$, то прямая считается «не включённой»: точки на ней не входят в решение. Значит, внутри остаётся только одна сторона, а линия не участвует.

Если неравенство нестрогое, например $y \geq 2x + 1$, прямая входит в решение. Тогда точки на линии подходят, а сама граница становится частью заштрихованной области.

На рисунках это различают видом линии: пунктир показывает строгие неравенства, а сплошная линия — нестрогие. Поэтому при чтении графика сразу видно, включается ли граница.

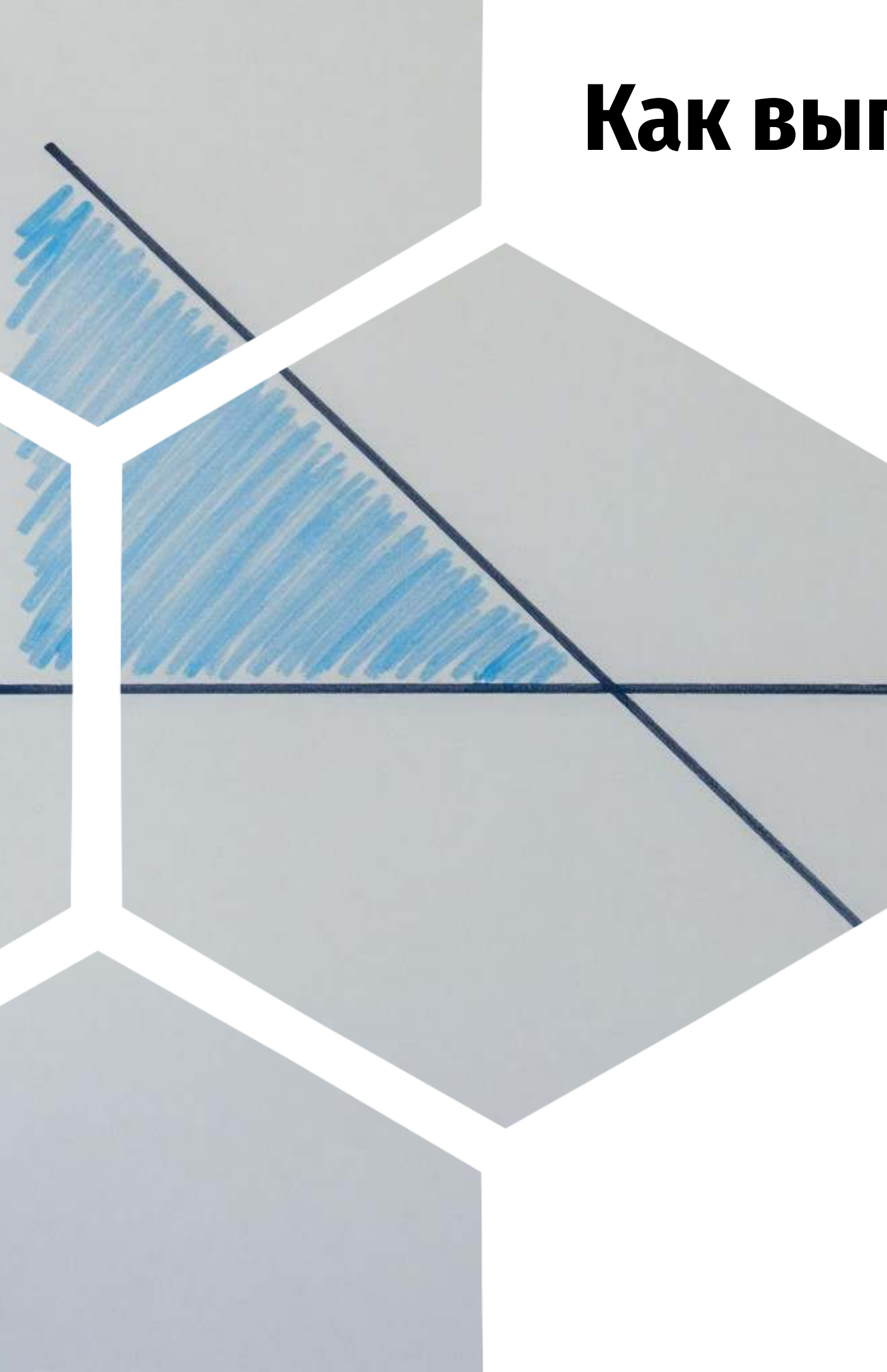
Прямая, луч, угол и полуплоскость: сравнение

Сопоставьте геометрические объекты по «что они занимают» и как ведут себя точки на границе.

Главное: полуплоскость — это именно область плоскости, поэтому вопрос принадлежности решается условием (включается ли граница).

Объект	Как выглядит	Где располагается
Прямая	Без начала и конца	Только линия
Луч	Начало и направление	Часть прямой
Угол	Между двумя лучами	Область между лучами
Полуплоскость	По одну сторону от прямой	Вся часть плоскости

Как выглядит полуплоскость на рисунке



Граница и заштрихованная сторона

На рисунке видно, где проходит прямая-граница и какая часть плоскости заштрихована. Подойдут примеры с горизонтальной, вертикальной или наклонной границей: смысл остаётся одним — выбрать сторону.

Точки внутри и снаружи

Внутри заштрихованной области обычно отмечают одну точку, а рядом рисуют точку вне области. Сравнение этих двух точек помогает понять, почему одна сторона удовлетворяет условию, а другая — нет.

Как проверить принадлежность точки полуплоскости

Чтобы проверить, принадлежит ли точка выбранной полуплоскости, подставьте её координаты в неравенство. Если оно выполняется, точка относится к заштрихованной области.

Если при подстановке получается неверное неравенство, значит точка лежит в другой полуплоскости, по «не той стороне» от границы. Так легко отделить подходящие точки от неподходящих.

Для построения графика часто выбирают контрольную точку, которая не лежит на прямой. Её проверка особенно удобна для наклонных границ, где «на глаз» можно ошибиться.

Строгие и нестрогие неравенства на графике

Строгие неравенства дают пунктирную границу и не включают её, а нестрогие — сплошную и включают. При одинаковом наклоне знак определяет, что именно входит.

Логика одна: пунктир соответствует «граница не подходит», сплошная — «граница подходит». Поэтому вид линии напрямую отвечает на вопрос о включении.

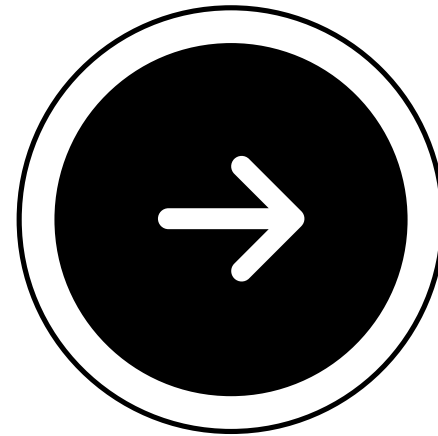
Учебные материалы по графикам неравенств (школьная программа, 9 класс).

Полуплоскости в координатной плоскости



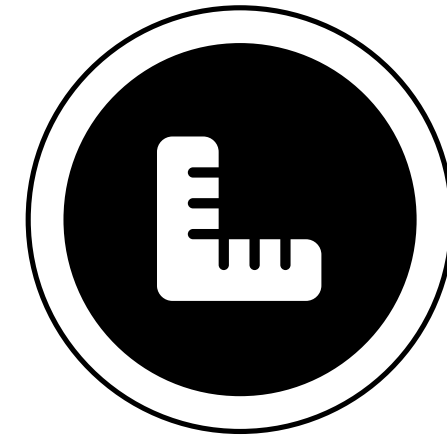
Две части от прямой $y=ax+b$

Прямая $y=ax+b$ разделяет координатную плоскость на две области по разные стороны. Одна из них удовлетворяет неравенству, а другая — нет, что видно по штриховке



Вертикальная граница $x=c$

Вертикальная прямая $x=c$ делит плоскость на левую и правую полуплоскости. По знаку неравенства выбирают, какая сторона подходит: левая при $x \leq c$, правая при $x \geq c$.



Наклонная граница и контрольная точка

Для наклонной прямой удобнее определять сторону по проверке контрольной точки. Если при подстановке получается нужный знак — штрихуют ту сторону, где выполняется условие.

Способы задания полуплоскости

- Полуплоскость можно задать геометрически: прямую считают границей, а область выбирают по одну сторону. Это удобно, когда по условию требуется изобразить решение на координатной плоскости.
- Другой способ — через уравнение границы и неравенство. Например, $x \geq 2$ задаёт правую полуплоскость, а $y < -1$ — нижнюю. Тогда штриховка показывает, какие точки удовлетворяют условию.
- Третья форма — линейное неравенство без явного деления по координатам, например $2x - y + 3 \leq 0$. Один и тот же участок плоскости можно описать разными способами: словами, формулой, рисунком.

Алгоритм построения полуплоскости по неравенству

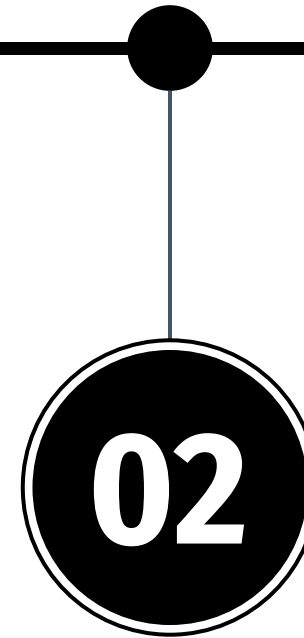
Неравенство задаёт, какую сторону границы нужно заштриховать; тип линии (сплошная или пунктир) зависит от строгого или нестрогого знака.

Система неравенств как пересечение полуплоскостей



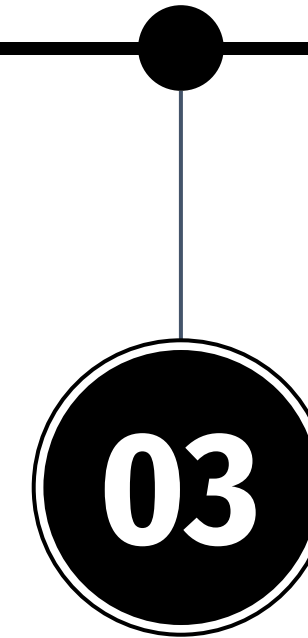
Шаг 1: Каждое неравенство — своя полуплоскость

Линейное неравенство задаёт одну сторону от граничной прямой. На рисунке это выглядит как заштрихованная полуплоскость, соответствующая условию.



Шаг 2: Пересечение — общая часть условий

Решение системы — это точки, которые подходят всем неравенствам одновременно. На графике они находятся в пересечении заштрихованных областей.



Шаг 3: Итог может быть разным по форме

Пересечение может оказаться пустым, ограниченным участком или неограниченной областью. Часто при нескольких условиях получается многоугольник.

Область решений нескольких неравенств

Если наложить две или три заштрихованные полуплоскости, общий участок и будет решением системы. Изменение границ влияет на форму пересечения.

По одному добавленному условию заштрихованная область обычно уменьшается: остаются только точки, которые удовлетворяют всем требованиям. Поэтому формы решения часто «сужаются».

Обобщение свойств пересечения заштрихованных полуплоскостей в школьных графических задачах (без конкретных числовых данных).

Где встречаются полуплоскости в школьных задачах

Полуплоскости появляются при построении графиков линейных неравенств на координатной плоскости. Любая граница — прямая, а заштрихованная сторона показывает, где условие выполняется.

Ещё один частый сюжет — задачи на «области допустимых значений». Например, $x+y \leq 10$ задаёт все пары чисел, сумма которых не превышает 10; это сразу задаёт одну сторону от линии $x+y=10$.

В геометрических заданиях полуплоскости помогают описывать расположение точек относительно прямой. Также они удобно выражают «с той стороны угла» или «между направляющими» через неравенства.

Когда условия накладываются друг на друга, решением становится пересечение нескольких полуплоскостей. Тогда на рисунке получается одна общая заштрихованная область, которая и отвечает всем условиям сразу.

Типовые неравенства и соответствующие полуплоскости

▶ В каждом примере одна граничная прямая делит плоскость на две части. Знак неравенства определяет, входит ли прямая в область, а вид уравнения показывает наклон границы.

▶ Во всех случаях ключевой принцип один: строгий знак исключает граничные точки, нестрогий включает; наклон границы задаётся уравнением прямой.

Неравенство	Граница	Полуплоскость
$x > 0$	$x = 0$	Справа от оси Oy , граница не входит
$x \leq 0$	$x = 0$	Слева, ось Oy входит
$y \geq 3$	$y = 3$	Сверху, граница включена
$2x - y < 4$	$2x - y = 4$	Наклонная граница, точек на ней нет
$y - x \geq 1$	$y = x + 1$	Выше прямой, граница входит

Материал для школьного курса алгебры (9 класс): сопоставление неравенства и расположения полуплоскости.

Частые ошибки при работе с полуплоскостями

Перепутать сторону штриховки

Чаще всего ошибаются, выбирая не ту половину плоскости. Лучше всего помогает контрольная точка не на границе: она сразу показывает, в какую сторону верно направлено неравенство.

Смешать пунктир и сплошную линию

Пунктир используют для строгих неравенств, а сплошная линия соответствует нестрогим. Если линии подобраны неверно, граница ошибочно считается то включённой, то исключённой.

Неверно читать знак неравенства

Путают строгие и нестрогие знаки: например, принимают $\leq$ за $<$. Тогда меняется включение границы и штриховка, а значит и результат решения.

Проверять точку прямо на границе

Проверка подстановкой контрольной точки нужна, но она не должна лежать на границе. Точка на линии даёт «пограничный» результат и не помогает понять, где нужно заштриховывать.

Полуплоскости в окружающих примерах



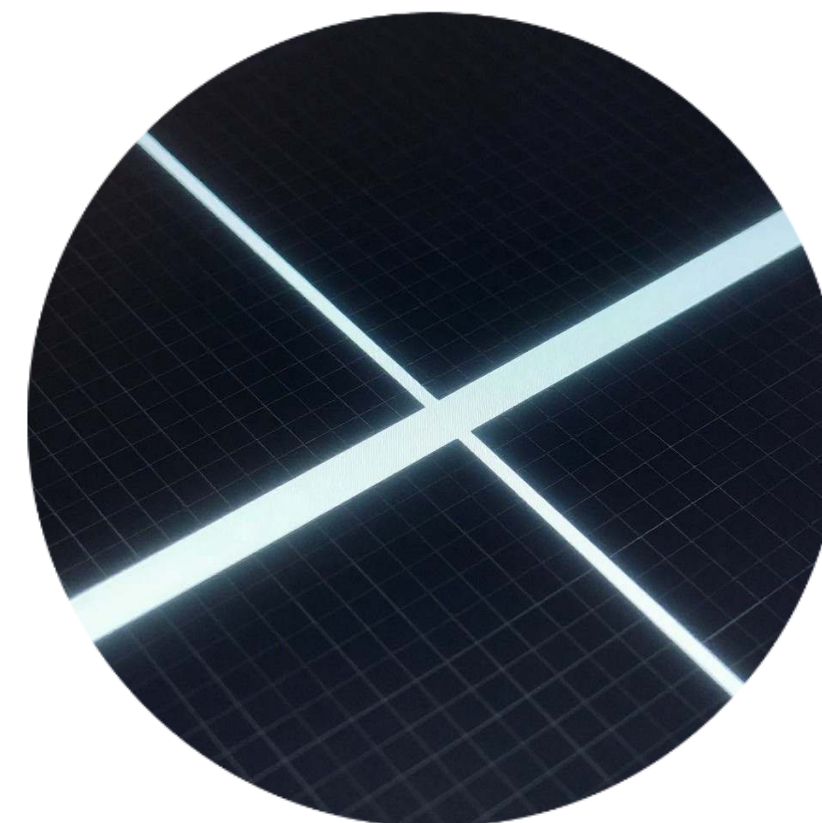
«Одна сторона дороги» на схеме маршрута

Представьте карту города с прямой линией, разделяющей две зоны. Обычно одна сторона отмечена как разрешённое направление, а другая — как запрещённая. Такая разметка работает как граница, а полуплоскость — как «разрешённая территория» по одну сторону.



Река и берег: наглядное деление пространства

Если на плане улиц провести линию берега, то все точки «по одну сторону» будут описывать, например, безопасное расстояние. Визуально это похоже на две области, разделённые линией: одна подходит условию, другая — нет.



Координатная сетка и экранные подсказки

На экране приложения иногда видно деление плоскости: линии ограничивают область значений, а часть сетки подсвечивается. Это точно такой же принцип: граничная прямая и заштрихованная полуплоскость отражают условие для точек.

Как распознать полуплоскость по графику

Полуплоскость отмечают одной граничной прямой и заштрихованной стороной, при этом граница может быть сплошной или пунктирной.

Если граница наклонная, направление заштриховки находят по контрольной точке. Так легче отличить полуплоскость от полосы, угла и отрезка.

Сводка графических признаков из школьных задач на построение и чтение решений неравенств (без привязки к конкретному набору чисел).

Главные выводы о полуплоскостях

Полуплоскость — базовое понятие геометрии 9 класса, связанное с прямой, координатной плоскостью и линейными неравенствами. Прямая делит плоскость на две части, а знак показывает, какая из них является решением. Полуплоскости помогают строить графики, решать системы неравенств и описывать области допустимых значений, готовя к более сложным темам алгебры и геометрии.