

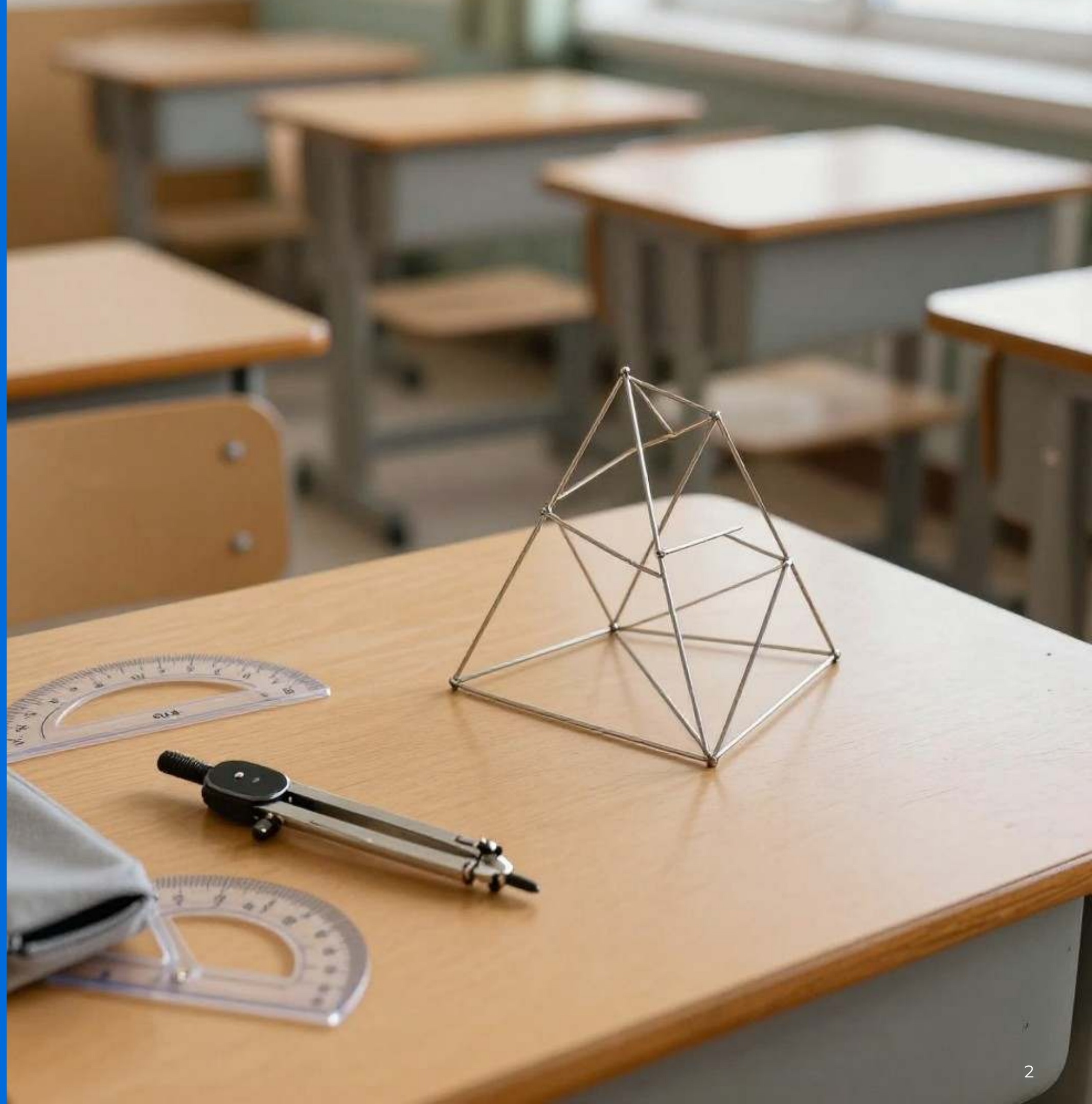
Теорема Эйлера в геометрии: радиусы окружностей и центр треугольника

В треугольнике связь между R , r и расстоянием OI выражается формулой $OI^2 = R(R - 2r)$.



Где теорема Эйлера “включается” в школьную геометрию

После окружностей треугольника и базовых линий (биссектриса, медиана, высота) появляются точки O и I . Теорема показывает, что расстояние между ними задаётся точной формулой и помогает решать задачи на радиусы и проверки вычислений.



Основные обозначения и что они означают



Центр описанной окружности (O)

O — центр окружности, проходящей через все вершины треугольника. Это ключевая опорная точка: радиус R считается от неё до каждой вершины, поэтому O связан со “внешней” геометрией треугольника.



Центр вписанной окружности (I)

I — центр окружности, которая касается всех трёх сторон треугольника. Радиус r равен расстоянию от I до каждой стороны, то есть I “равноудалён” от прямых, образующих треугольник.



Радиус описанной окружности (R)

R — радиус описанной окружности. Его значение задаёт масштаб треугольника “снаружи”: чем больше R , тем дальше вершины в среднем от центра O. В теореме R участвует напрямую в связи с OI.



Радиус вписанной окружности (r)

r — радиус вписанной окружности. Он отражает “внутренний” запас места: окружность вписана так, что расстояния до сторон равны r . В формуле теоремы r влияет на величину $R - 2r$ и, следовательно, на OI.

Для любого треугольника $OI^2 = R(R - 2r)$.
Равносторонний случай даёт $OI = 0$ и, значит, $R = 2r$.

Классическая формула планиметрии (теорема Эйлера о центрах вписанной и описанной окружностей).

2r

Квадрат расстояния между центрами определяется произведением радиуса описанной окружности на разность радиусов.

Частные случаи теоремы Эйлера

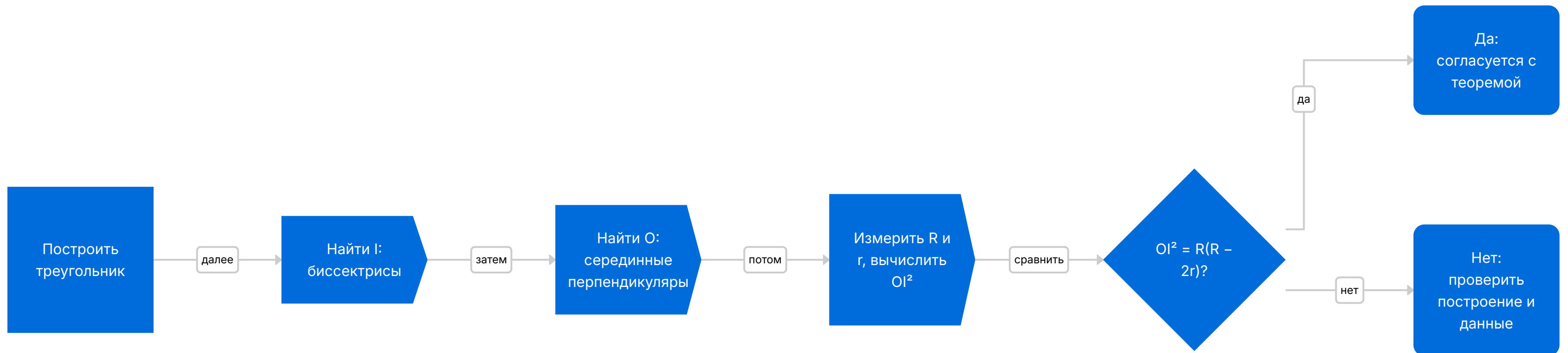
Тип треугольника	Положение О и I	Значение OI^2	Характерный вывод
Равносторонний	$O = I$	0	Центры совпадают
Прямоугольный	разные центры	$OI^2 = R(R - 2r)$	Формула не упрощается
Равнобедренный	на оси симметрии	$OI^2 \geq 0$	Оба центра симметричны относительно оси
Произвольный остроугольный	оба внутри	$OI^2 > 0$	Центры расположены внутри

Равенство $OI^2 = R(R - 2r)$ работает для любых треугольников, но геометрическая картина вокруг центров меняется.

Тип треугольника влияет на “где расположены” точки О и I, хотя строгая связь радиусов остаётся одной и той же.

Как вычислить OI по радиусам и сверить теорему

Пошаговая проверка: от построения треугольника до сравнения с формулой $OI^2 = R(R - 2r)$.



Связь теоремы Эйлера с равносторонним треугольником

В равностороннем треугольнике симметрия максимально выражена: центр описанной окружности, центр вписанной окружности и другие “классические” центры оказываются в одной точке. Поэтому расстояние OI становится равным нулю.

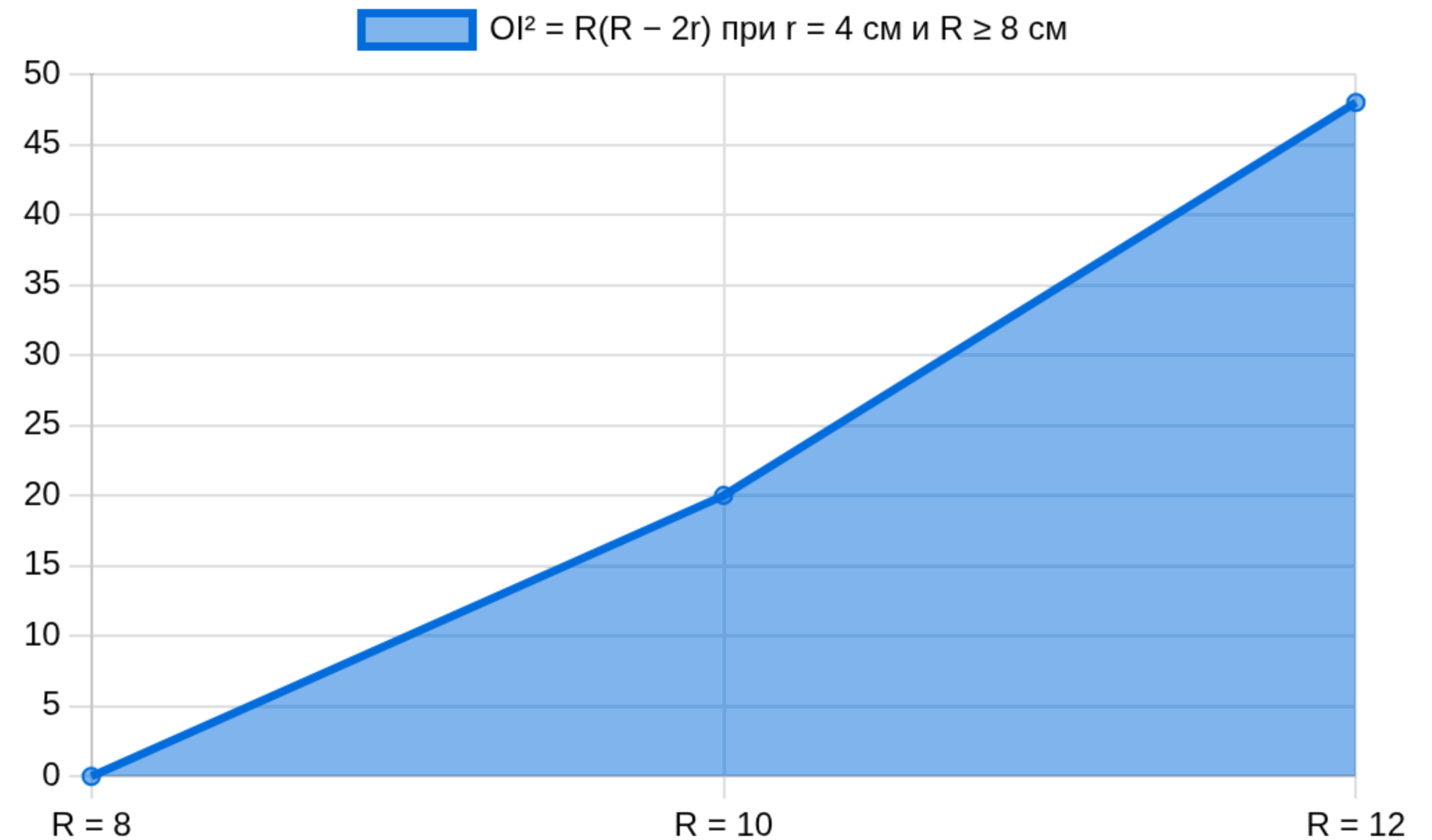
Тогда из общей формулы $OI^2 = R(R - 2r)$ получается $R = 2r$. Это удобно как быстрый ориентир: если в задаче треугольник равносторонний, теорема сразу даёт точное соотношение радиусов.

Именно такая проверка на знакомой фигуре показывает смысл теоремы: она не противоречит геометрической интуиции. Равносторонний треугольник выступает “эталоном” симметрии, согласующимся с выводами формулы.

Как меняется расстояние OI при разных радиусах

Когда R приближается к $2r$, разность $R - 2r$ стремится к нулю, и центры “сближаются”. При росте R и фиксированном r расстояние увеличивается быстрее, чем линейно.

График подчёркивает ключевую зависимость от сочетания двух радиусов: OI определяется не одним R или r по отдельности, а их разностью внутри произведения.



Построение по формуле $OI^2 = R(R - 2r)$, $r = 4$ см; точки рассчитаны под условие $R \geq 2r$.

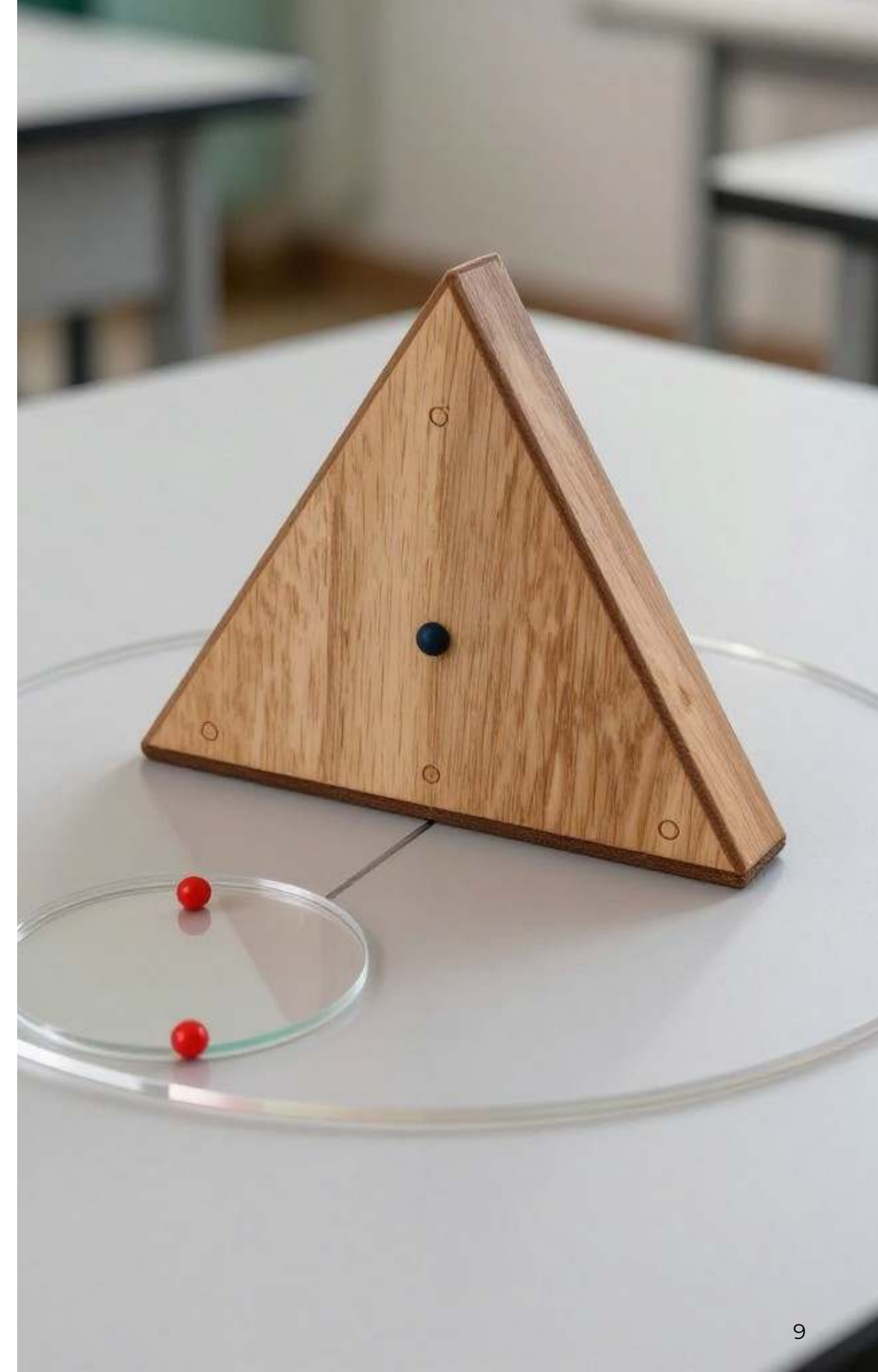
Пример вычисления по теореме Эйлера

Дано и что находим

Пусть для треугольника известны радиусы: $R = 10$ см и $r = 4$ см. Тогда по теореме Эйлера $OI^2 = R(R - 2r)$ можно найти расстояние между центрами без измерений на чертеже.

Вычисление расстояния OI

Подставляем: $OI^2 = 10(10 - 8) = 20$. Значит, $OI = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ см. Схема с отмеченными O и I показывает, что теорема превращает геометрию в расчёт по радиусам.



Из $OI^2 = R(R - 2r)$ следует, что $R(R - 2r) \geq 0$. При $R > 0$ получаем $R - 2r \geq 0$, то есть $R \geq 2r$.

Следствие из теоремы Эйлера о центрах описанной и вписанной окружностей (планиметрия).

0

**Квадрат расстояния
между центрами задаёт
знак правой части,
поэтому радиусы связаны
строгим ограничением.**

Сравнение значений R и r в типичных треугольниках

Вид треугольника	R	r	$R-2r$	OI
Равносторонний	$2r$	r	0	0
Остроугольный	R	r	>0	$OI>0$
Прямоугольный	$c/2$	$(a+b-c)/2$	>0	$OI>0$

Стандартные свойства центров треугольника и следствия из теоремы Эйлера.

Таблица показывает, как соотношение радиусов описанной и вписанной окружностей отражается на расстоянии между их центрами. Это помогает контролировать вычисления и оценивать правдоподобие результата.

Если $R-2r=0$, то O и I совпадают. Во всех остальных случаях $R>2r$, значит OI строго больше нуля, а условие $R\geq 2r$ служит быстрой проверкой.

Геометрический смысл центров O и I

Точка I — центр вписанной окружности: она равноудалена от всех трёх сторон. Это следует из того, что любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

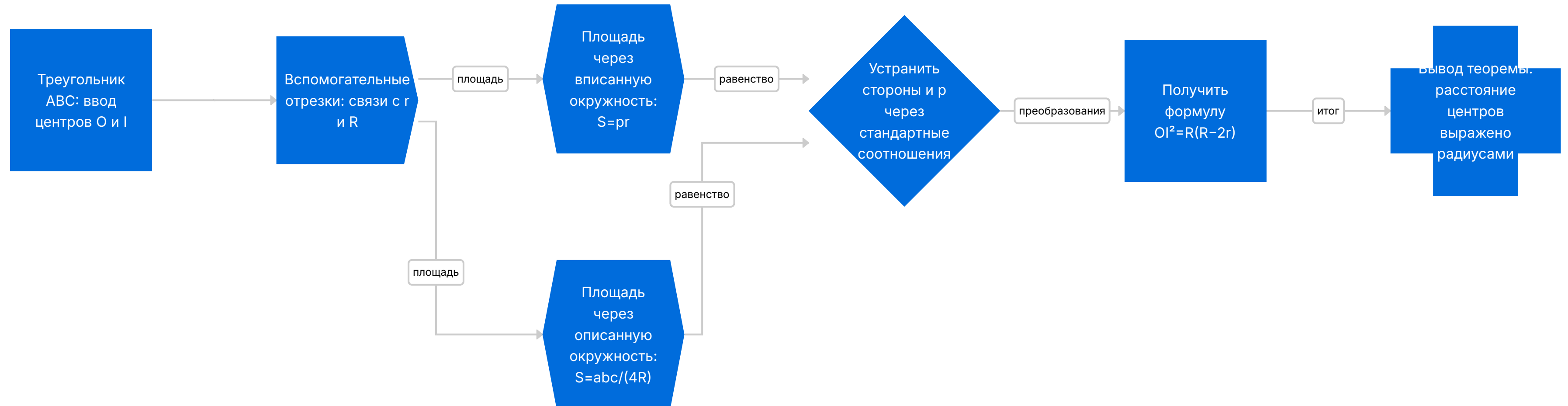
Точка O — центр описанной окружности: она равноудалена от всех трёх вершин. Поэтому O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема Эйлера связывает два разных «типа равенств»: относительно сторон (через r и центр I) и относительно вершин (через R и центр O).

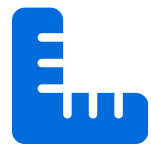
Расстояние OI становится не произвольным, а полностью согласованным с радиусами: по формуле $OI^2 = R(R - 2r)$ оно отражает, насколько треугольник отклоняется от симметрии равностороннего.

Логика доказательства теоремы Эйлера в школьной геометрии

От площади двумя способами к связи радиусов через центры O и I



Связь с площадью треугольника



Две формулы площади

Площадь выражается через полупериметр: $S=pr$, и через радиус описанной окружности: $S=abc/(4R)$. Эти записи включают r и R , но по-разному связывают элементы треугольника.



Пересечение с геометрией центров

Теорема Эйлера «встраивает» в задачу центры O и I : их расстояние OI становится мостиком между двумя способами описать площадь и радиусами.



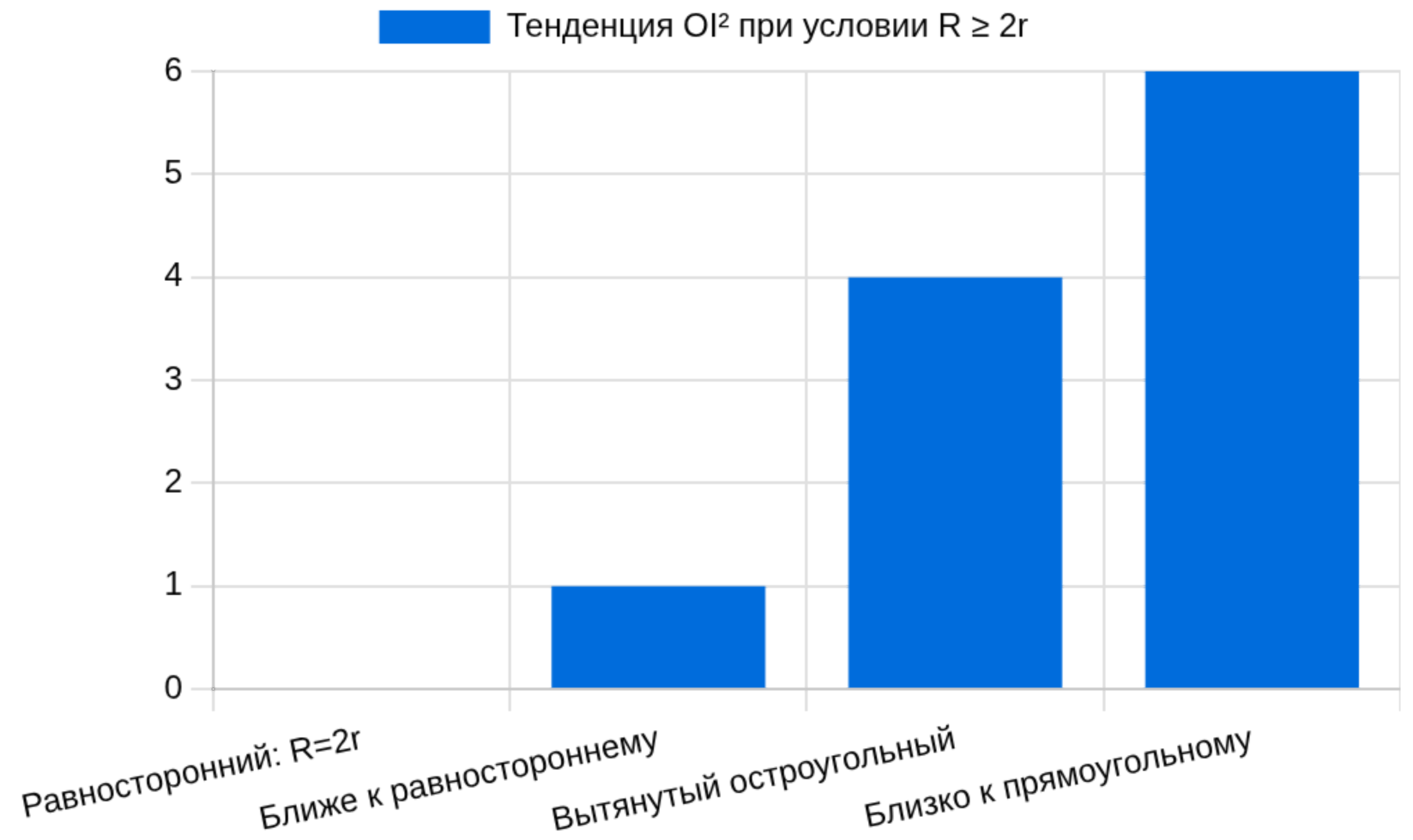
Проверка задач с неполными данными

Если в задаче известны не все стороны, формулы для площади и теорема дают дополнительные связи. Это позволяет сокращать вычисления и проверять решение на согласованность.

Связь между формой треугольника и расстоянием между центрами

Если при фиксированном r значение R приближается к $2r$, то OI^2 стремится к нулю, и центры O и I «сближаются» геометрически.

Общая закономерность такая: отклонение треугольника от равносторонней симметрии сопровождается увеличением OI . Это прямо считывается из зависимости $OI^2 = R(R - 2r)$.



Тенденция следует из формулы теоремы Эйлера при $R \geq 2r$ (конкретные численные наборы берутся для демонстрации графика).

Типовые задачи на применение теоремы Эйлера

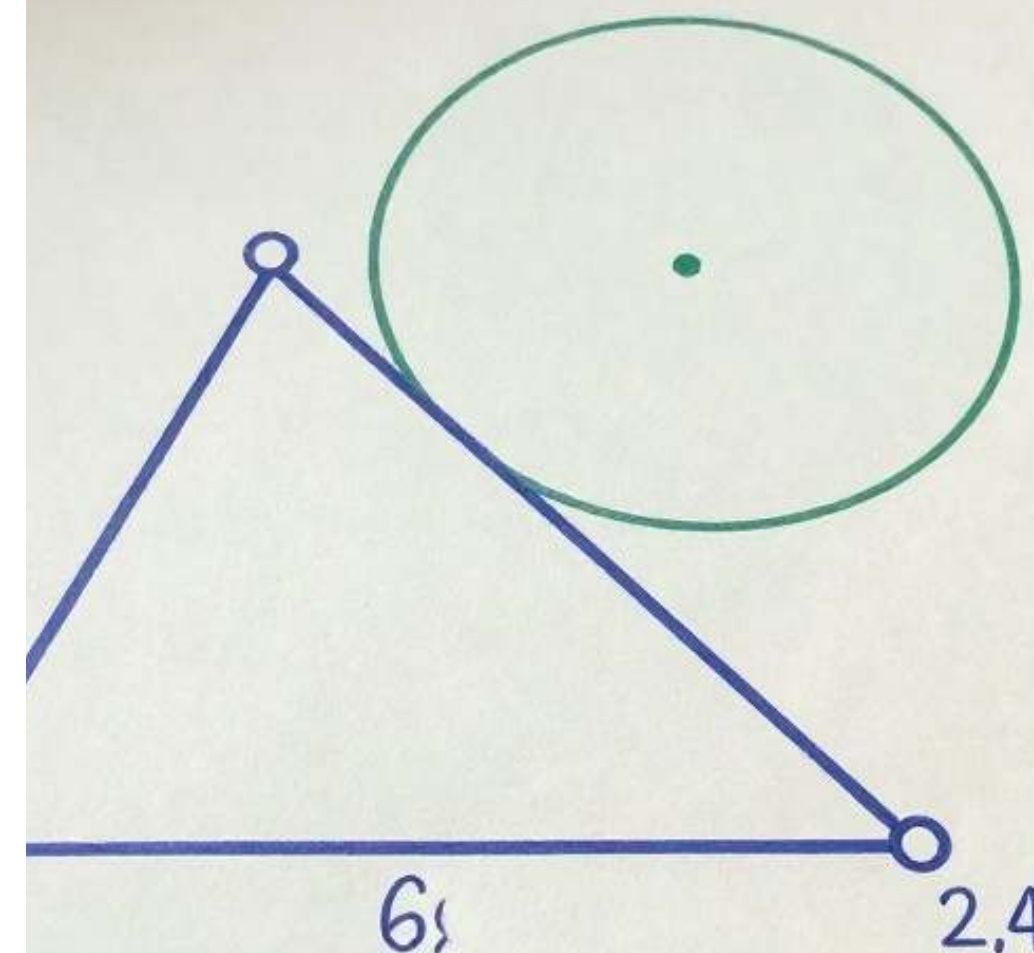
Находят расстояние между центрами O и I по известным радиусам: сначала вычисляют $OI^2 = R(R - 2r)$, затем извлекают корень. Это особенно удобно, когда на рисунке нельзя точно измерить отрезок OI .

В задачах на обратный ход используют теорему для вычисления одного радиуса по другому и по OI . Получают уравнение относительно R или r и выбирают вариант, согласованный с треугольником.

Ещё один тип задач — проверка существования: если при данных R и r выходит $OI^2 < 0$ или нарушается условие $R \geq 2r$, значит треугольник с такими параметрами невозможен, а ответ требует исправления.

Пример задачи с координатной геометрией

- В системе координат заданы вершины $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$. По координатам находят длины сторон, затем вычисляют полупериметр и площадь, после чего определяют r и R .
- Далее подставляют найденные радиусы в формулу $OI^2 = R(R - 2r)$. На рисунке центры O и I отмечаются отдельно, что позволяет убедиться: вычисленный OI согласуется и с аналитическим планом, и с геометрией.



Типичные ошибки при применении теоремы Эйлера

Ошибка	Как исправить	Проверка
Путают O и I	следить за центрами описанной и вписанной окружностей	OI^2 всегда считается для этой пары
Подставляют диаметр вместо радиуса	использовать именно r и R , а не $2r$ и $2R$	в формуле нет множителей 2
Забывают возвести OI в квадрат	работать по шагам: $OI^2 \rightarrow OI$	квадрат расстояния неотрицателен
Игнорируют условие $R \geq 2r$	смотреть на знак $R - 2r$	если $R - 2r < 0$, треугольник невозможен
Берут данные от разных треугольников	проверить, что R и r относятся к одной фигуре	согласованность подтверждается равенством OI^2

Таблица помогает быстро диагностировать распространённые неточности: перепутанные обозначения, подмена радиуса диаметром, неверное возведение в квадрат и несоблюдение условий.

Ключевой принцип: формула чувствительна к обозначениям и условиям. Даже при верной арифметике несоответствие параметров приводит к неправильному выводу.

Практическая ценность теоремы в курсе 10 класса

Связка тем

Теорема соединяет окружности, треугольники, площади, симметрию и координатные методы. Поэтому её удобно рассматривать как «узел», где сходятся разные способы описания одной фигуры.

Экономия вычислений

В задачах высокого уровня результат помогает сократить цепочку вычислений: вместо прямого измерения OI используют радиусы и проверяют согласованность по формуле.

Контроль логики решения

Неравенство $R \geq 2r$ служит внутренней проверкой. Если оно нарушено, это сигнал ошибки в данных или в преобразованиях, даже когда итоговое число выглядит «красиво».

Развитие геометрического мышления

Теорема формирует понимание, что в геометрии величины связаны жёстко. Тренируется навык видеть зависимости и оценивать правдоподобие ответа ещё до финальных вычислений.



Итоги: что устанавливает теорема Эйлера

Теорема Эйлера задаёт точную связь между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника:
 $OI^2 = R(R - 2r)$. Отсюда следует $R \geq 2r$ и равенство $R = 2r$ только в равностороннем.