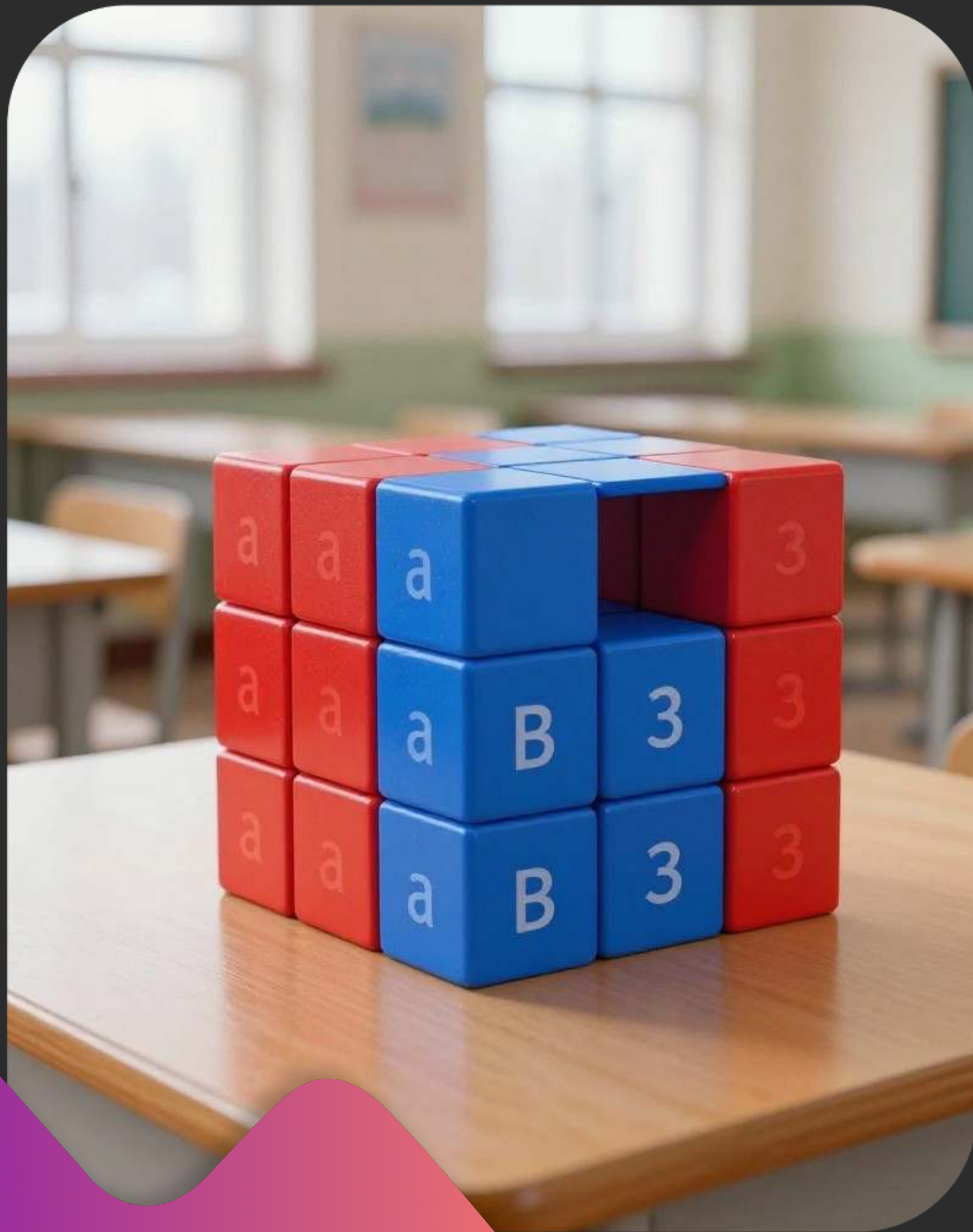


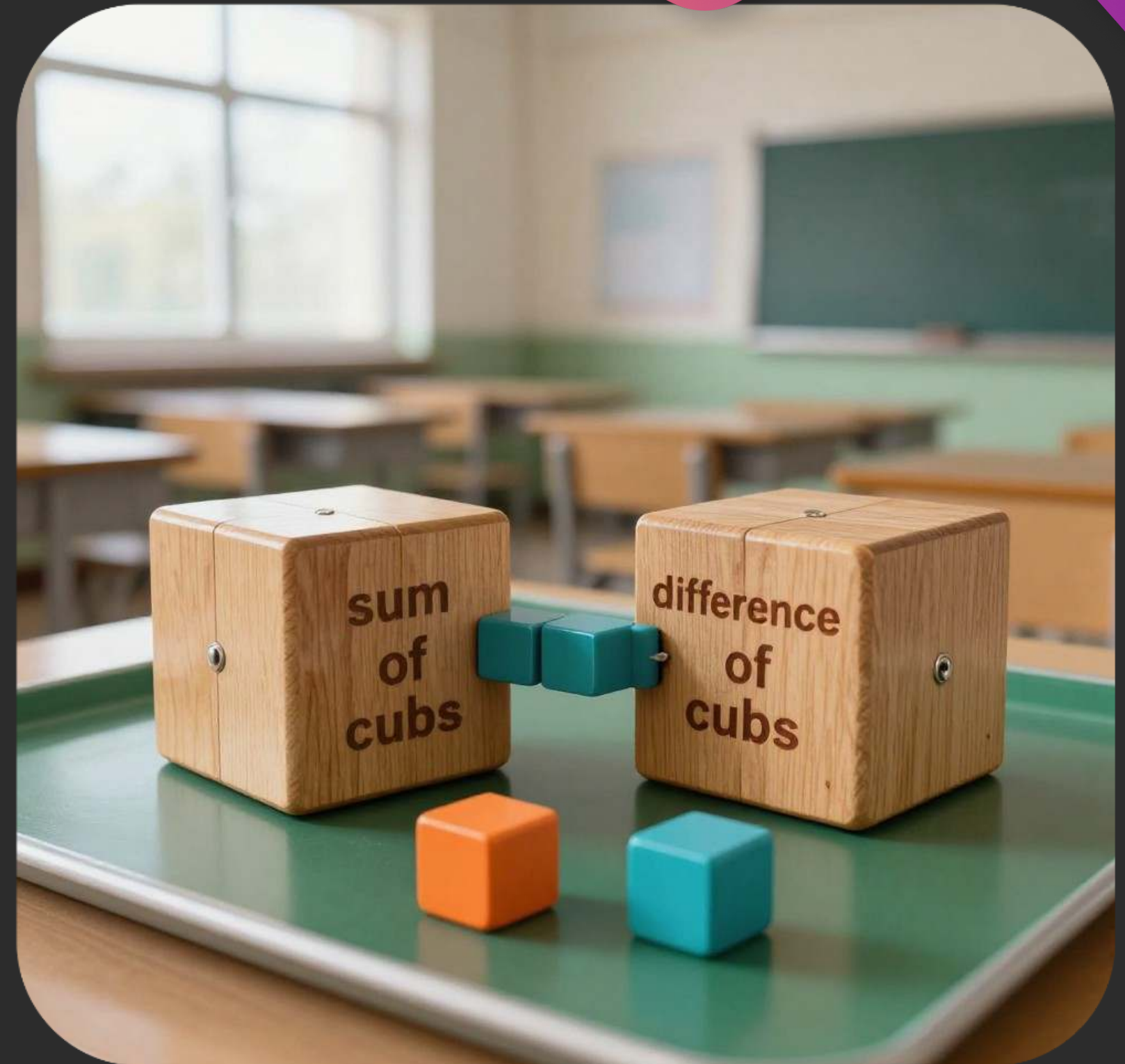
Разложение на множители суммы и разности кубов

Формулы, знаки и проверка умножением.



Зачем нужны кубические формулы

Они помогают быстро упрощать выражения, сокращать дроби и считать без лишних преобразований. Если в записи встречаются кубы чисел и букв, готовые формулы сразу подсказывают удобный ход решения.



Куб помогает распознавать выражения, которые можно разложить по готовой формуле.

3

это степень, которая
записывает умножение
числа само на себя три раза.

Формулы разложения на множители

Почему сумма и разность кубов раскладываются по особому правилу

Один линейный множитель Квадратный трехчлен

Любая сумма или разность кубов распадается на произведение двух скобок. Первая скобка повторяет знак исходного выражения и сразу показывает, к какой формуле относится пример.

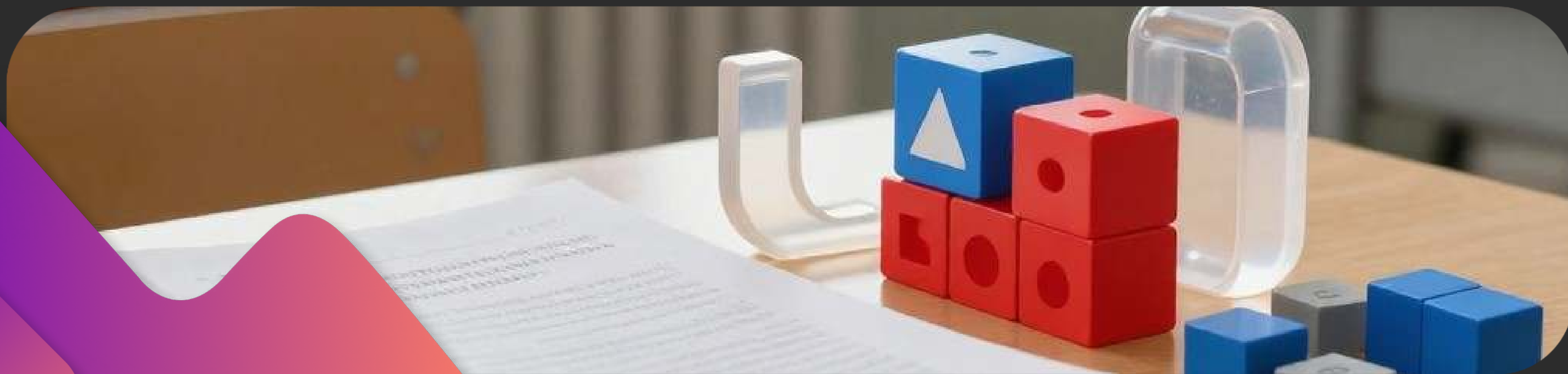
Во второй скобке всегда стоят два квадрата и один средний член. Именно этот трехчлен позволяет после раскрытия скобок вернуть исходное выражение без лишних слагаемых.

Разный знак у ab

В формуле суммы кубов член ab берется со знаком минус, а в формуле разности — со знаком плюс. Это главное различие, которое чаще всего путают.

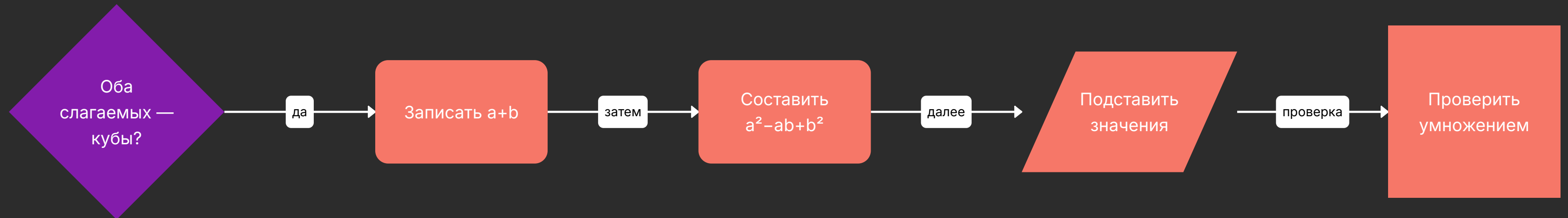
Проверка раскрытием

Если знаки выбраны верно, средние члены взаимно уничтожаются, и после приведения подобных слагаемых остается исходная сумма или разность кубов.



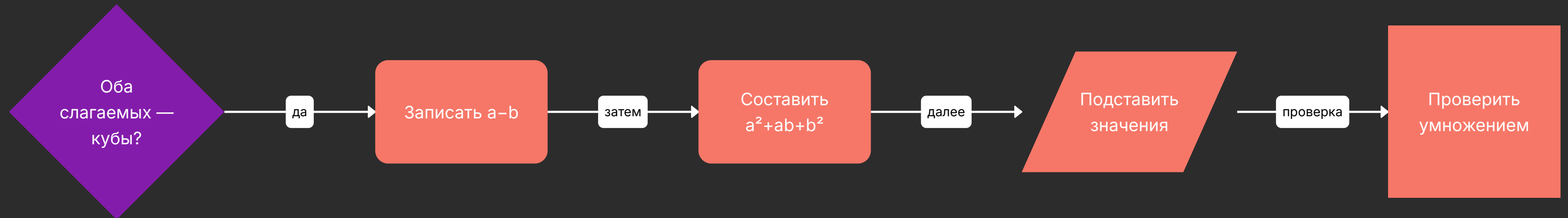
Алгоритм разложения суммы кубов

Пошаговая схема по формуле $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.



Алгоритм разложения разности кубов

Пошаговая схема по формуле $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.



Сравнение формул суммы и разности кубов

Признак	Сумма кубов	Разность кубов
Первый множитель	$a+b$	$a-b$
Знак у ab	$-$	$+$
Квадратный трехчлен	a^2-ab+b^2	a^2+ab+b^2
Проверка	a^3+b^3	a^3-b^3

Формулы разложения на множители

Таблица показывает, что оба правила похожи по строению, но отличаются знаками в ключевых местах.

Во всех случаях сохраняются a^2 и b^2 , а различие между формулами определяется знаком в первой скобке и у члена ab .

Какие действия входят в проверку разложения



Логика проверки разложения на множители

Проверка помогает увидеть, что правильные знаки в множителях действительно возвращают исходное выражение.

Все этапы связаны между собой: ошибка в одном знаке нарушает сокращение и меняет результат проверки.

Пример разложения суммы кубов

1. Записываем кубы

Выражение x^3+8 удобно представить как x^3+2^3 . Так сразу видно, что перед нами сумма двух кубов, и можно применять готовую формулу без лишних преобразований.

2. Подставляем в формулу

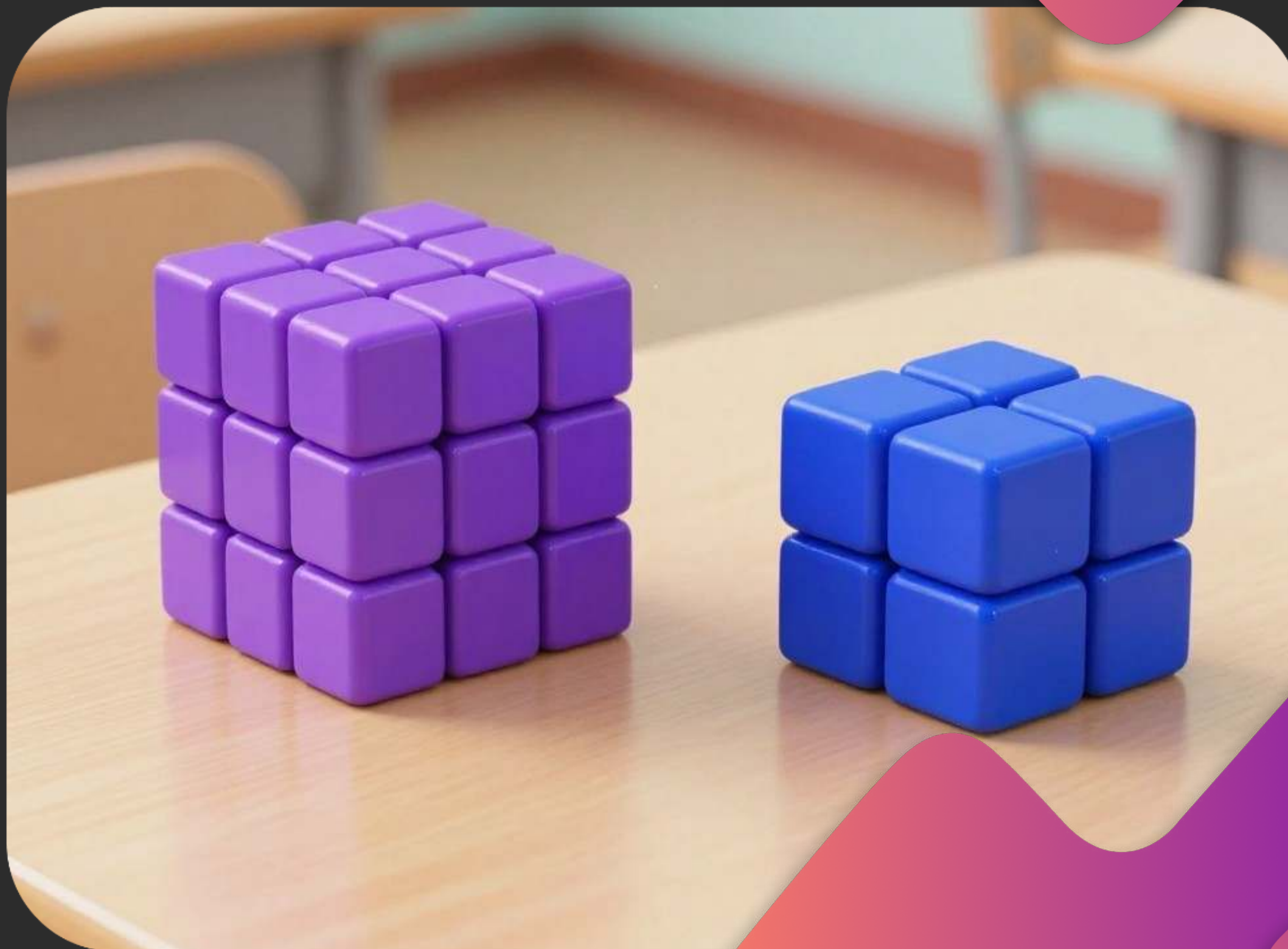
По правилу получаем первую скобку $x+2$ и вторую скобку x^2-2x+4 . Здесь квадрат первого числа, их произведение и квадрат второго числа стоят в нужном порядке.

3. Проверяем раскрытием

При умножении скобок появляются $x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$. Средние члены сокращаются, поэтому после приведения подобных слагаемых остается x^3+8 .

4. Делаем вывод

Пример показывает, что сумма кубов раскладывается быстро, если сразу узнать кубы в записи и правильно выбрать знак в квадратном трехчлене.



Пример разложения разности кубов

1.

Приводим к кубам

Выражение $27y^3 - 1$ записывается как $(3y)^3 - 1^3$. Такое преобразование удобно, потому что оба слагаемых становятся кубами и сразу подходят для формулы.

2.

Применяем правило

Получаем разложение $(3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$. В первой скобке сохраняется знак разности, а во второй появляется плюс у среднего члена.

3.

Проверяем результат

При раскрытии скобок выходит $27y^3 - 1$. Все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, поэтому ответ совпадает с исходным выражением.

4.

Запоминаем способ

Сначала нужно увидеть кубы, затем выбрать правильные знаки и только после этого подставлять значения в готовую формулу.



Как распознать выражение, подходящее под формулу



Ищите кубы

Подходят выражения, в которых оба слагаемых можно записать как третьей степени. Это могут быть числа 8, 27, 64, 125 или буквенные выражения вида x^3 и $8a^3$.



Проверяйте коэффициенты

Если число не выглядит как куб, его нужно сначала преобразовать. Например, $27 m^3$ удобно читать как $(3 m)^3$, а $64y^3$ — как $(4y)^3$, чтобы сразу применить формулу.



Выделяйте общий множитель

Когда один из членов не является кубом, выражение часто сначала упрощают. Полезно вынести общий множитель, а затем проверить, можно ли оставшуюся часть представить как сумму или разность кубов.



Сравнивайте с шаблоном

Если оба члена имеют вид a^3 и b^3 , выражение готово к разложению. Достаточно определить, какой знак стоит между ними, и подставить значения в нужную формулу.

Типичные ошибки при разложении

Путают знаки

Самая частая ошибка — неверно выбрать знак во втором множителе. Для суммы кубов у члена ab стоит минус, а для разности кубов — плюс, и это нужно помнить отдельно.

Не проверяют кубы

Некоторые начинают разложение, не убедившись, что оба слагаемых действительно являются кубами. Если это условие не выполнено, формула не подходит и ответ получится неверным.

Пишут одинаковые знаки

Опасно записывать выражение $a^2 \pm ab \pm b^2$ с одинаковыми знаками. В формуле знаки распределяются строго по правилу, поэтому важно не подменять его похожей, но неверной записью.

Пропускают проверку

Даже правильная на вид запись может содержать ошибку в коэффициенте. Поэтому после разложения нужно раскрыть скобки и убедиться, что получается исходное выражение без лишних членов.

Проверка знаков на коротких примерах

Пример	1-й множитель	2-й множитель	ab
x^3+27	$x+3$	x^2-3x+9	-
$64-y^3$	$4-y$	$16+4y+y^2$	+
$8a^3+b^3$	$2a+b$	$4a^2-2ab+b^2$	-
m^3-125	$m-5$	$m^2+5m+25$	+

В таблице видно, как знак между кубами влияет на оба множителя и помогает быстро выбрать правильную форму записи.

Знак в исходной записи определяет и первый множитель, и знак при ab во втором множителе.

Связь с геометрией куба

Объём куба

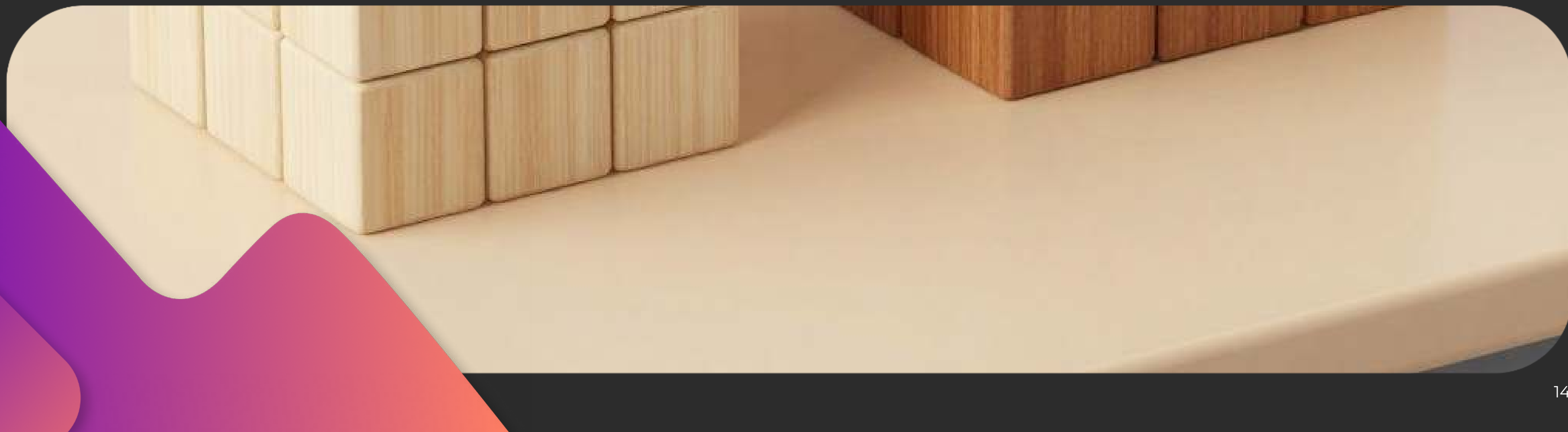
Кубическое выражение напрямую связано с объёмом куба: $V=a^3$. Поэтому третья степень не просто запись, а удобный способ описать, как меняется объём при изменении ребра.

Быстрый рост

Если ребро чуть увеличивается, объём растёт заметно сильнее, чем сама длина. Именно поэтому кубические выражения помогают описывать ситуации, где изменение величины происходит особенно резко.

Наглядная модель

На рисунке можно сравнить два куба с разными рёбрами и подписать их объёмы алгебраически. Такой пример делает формулу наглядной и помогает связать алгебру с геометрией.



Где встречаются суммы и разности кубов

Упрощение выражений Решение уравнений Сокращение дробей
Геометрические задачи Проверка вычислений



Диаграмма показывает, что формулы чаще всего используются там, где нужно быстро привести выражение к удобному виду и сократить запись.

Главная область применения — упрощение выражений; остальные случаи встречаются реже, но тоже полезны в школьной алгебре.

Условная оценка по типичным заданиям школьной алгебры

Как разложение помогает упростить выражения



Сокращение дробей

Если сумма или разность кубов стоит в числителе либо знаменателе, разложение помогает увидеть общий множитель. После этого дробь часто сокращается и становится намного короче.



Удобная запись

Разложенный вид проще анализировать, чем громоздкое исходное выражение. Это особенно полезно, когда нужно сравнить несколько вариантов ответа или продолжить преобразования без лишних вычислений.



Меньше вычислений

Вместо длинного перемножения можно сразу использовать готовую формулу. Такой способ экономит время и уменьшает риск ошибки при раскрытии скобок и сложении подобных членов.



Полезно в задачах

При решении уравнений и преобразовании дробей разложение на множители часто становится первым шагом. Оно помогает обнаружить скрытую структуру выражения и выбрать правильный дальнейший ход.

Тренировочные примеры разложения

1. Сумма и разность

В примере $64 - x^3$ сначала видим кубы 4^3 и x^3 , поэтому получаем $(4 - x)(16 + 4x + x^2)$. Здесь первый множитель повторяет знак исходного выражения.

2. Переход к кубам

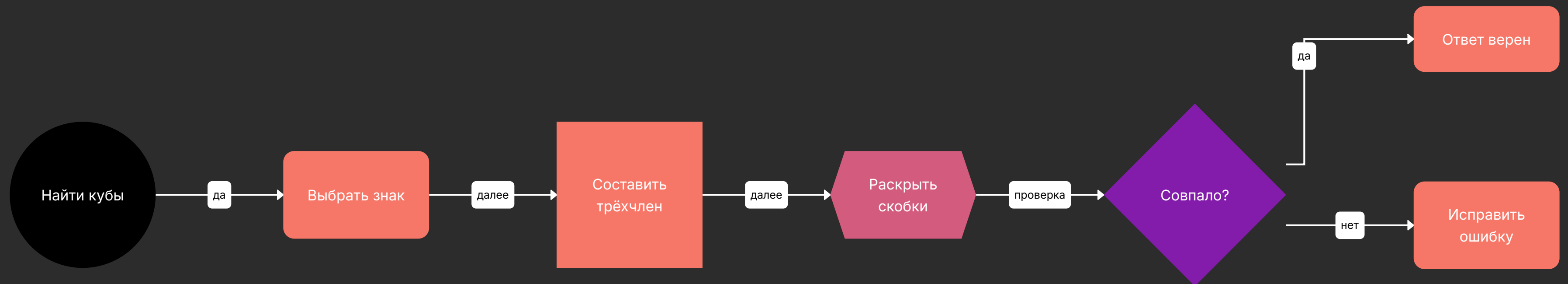
В записи $a^3 + 125$ число 125 удобно заменить на 5^3 . После этого формула суммы кубов даёт $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$, где второй множитель содержит все нужные члены.

3. Составное выражение

В выражении $8m^3 - 27n^3$ распознаём $(2m)^3$ и $(3n)^3$. Поэтому разложение имеет вид $(2m - 3n)(4m^2 + 6mn + 9n^2)$, и его легко проверить раскрытием скобок.

Пошаговая проверка ответа

Алгоритм проверки разложения на множители для суммы и разности кубов



Что нужно запомнить о формулах

1.

Два множителя

Формулы суммы и разности кубов всегда дают два множителя. Это помогает быстро узнать нужный шаблон и не перепутать его с другими способами разложения на множители.

2.

Правильные знаки

Первый множитель повторяет знак исходного выражения: при сумме ставится плюс, при разности — минус. Во втором множителе знак у ab меняется наоборот, и это главное правило.

3.

Проверка умножением

После разложения полезно раскрыть скобки и сравнить результат с исходным выражением. Такая проверка сразу показывает ошибку в знаке, коэффициенте или самом выборе формулы.

Формулы, которые экономят время

Сумма и разность кубов раскладываются по чётким формулам, которые легко запомнить и применять. Если уметь узнавать кубы, выбирать знаки и проверять ответ умножением, ошибки становятся редкостью.