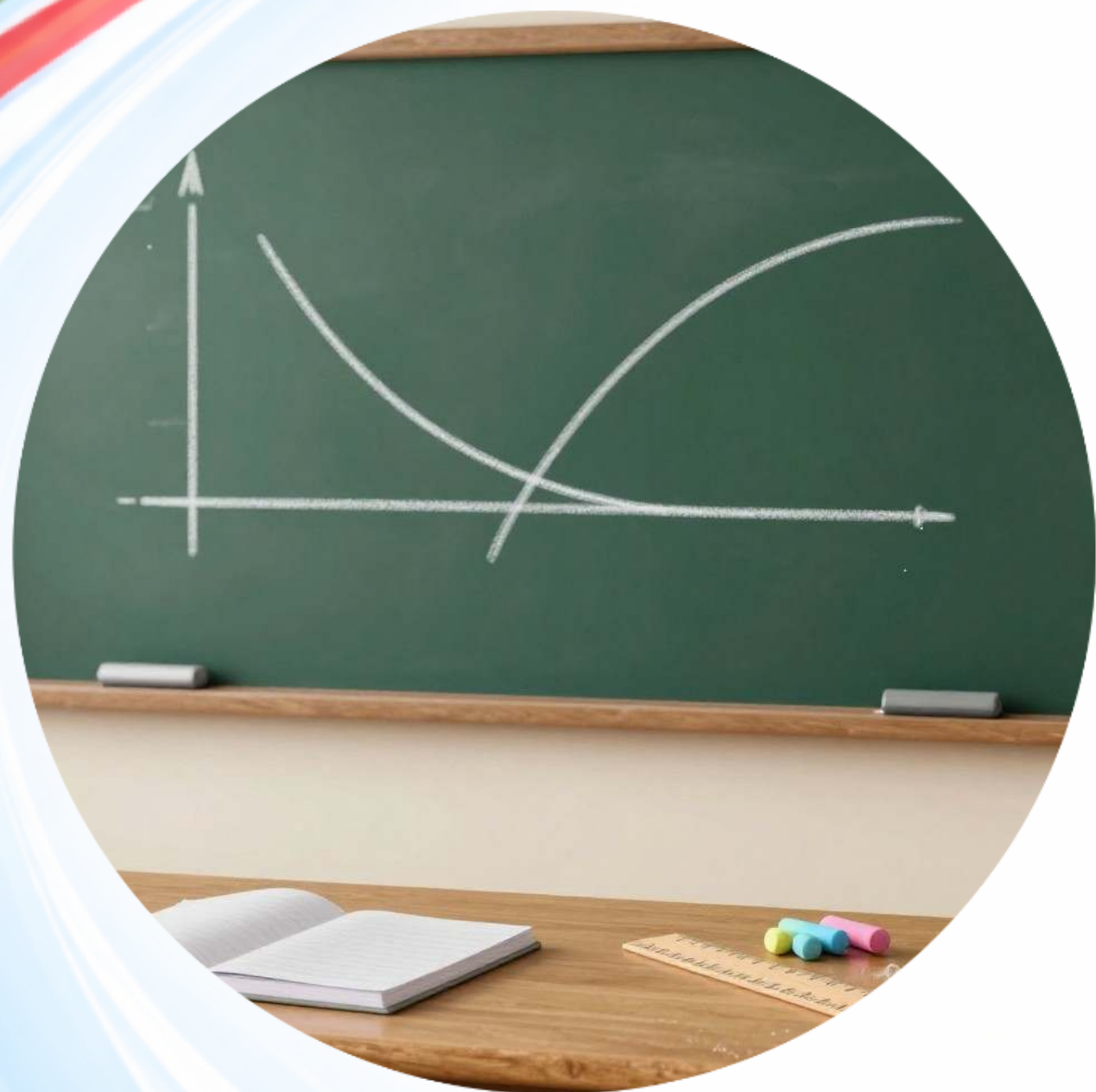




Глава VI. Квадратные уравнения и системы нелинейных уравнений

Уравнения и графики, которые помогают находить решения

Зачем изучать это в 8 классе

- Эта тема показывает, как одна задача может иметь несколько ответов или не иметь их вовсе. Квадратные уравнения связаны с площадями, движением и геометрией, а системы нелинейных уравнений учат находить точки пересечения графиков.



Виды квадратных уравнений

1

Общий вид

Квадратное уравнение записывают как $ax^2+bx+c=0$, где a не равно нулю. Именно старший коэффициент делает уравнение квадратным и отличает его от линейного.

2

Приведённая форма

Если старший коэффициент равен 1, получается уравнение $x^2+px+q=0$. Такая запись удобна для применения теоремы Виета и быстрого анализа корней.

3

Полные уравнения

Полное квадратное уравнение содержит все три слагаемых: ax^2 , bx и c . Оно требует более общего способа решения, потому что не упрощается сразу.

4

Неполные уравнения

Если отсутствует b или c , уравнение становится неполным. Такие случаи часто решаются вынесением общего множителя, разложением на множители или извлечением квадратного корня.

Способы решения квадратных уравнений

Сравнение основных методов помогает выбрать подходящий способ для конкретного уравнения и не тратить лишние шаги.

Универсальнее всего формула через дискриминант, а самые быстрые методы зависят от вида уравнения.

Способ	Когда удобен	Идея	Результат
Множители	Простые коэффициенты	Разложить на множители	Корни сразу
Квадрат двучлена	Есть полный квадрат	Преобразовать запись	Найти корни
Дискриминант	Любое полное	Вычислить D	Число и значения корней
Виета	Приведённое уравнение	Подобрать корни	Быстрая проверка

Школьный курс алгебры 8 класса

График квадратного уравнения — парабола

Название графика

График функции $y=ax^2+bx+c$ называется параболой. По его форме удобно видеть, как меняется значение функции и где она достигает экстремума.

Направление ветвей

Если a больше нуля, ветви направлены вверх. Если a меньше нуля, парабола открывается вниз, и вершина становится наибольшей точкой графика.

Роль вершины

Вершина показывает минимальное или максимальное значение функции. Она помогает понять, где график находится ближе всего к оси Ox .

Связь с корнями

Точки пересечения с осью Ox совпадают с корнями уравнения. Если пересечений нет, значит, действительных решений у уравнения не существует.

Практический смысл

По параболе можно заранее оценить число решений и проверить ответ, не вычисляя всё только алгебраически. Это особенно полезно при решении задач и проверке результата.

Сколько корней может быть у квадратного уравнения

Дискриминант позволяет заранее понять, какой результат даст уравнение, ещё до нахождения самих корней.

Чем больше дискриминант, тем больше решений; при отрицательном значении действительных корней нет.



Школьный курс алгебры 8 класса

3

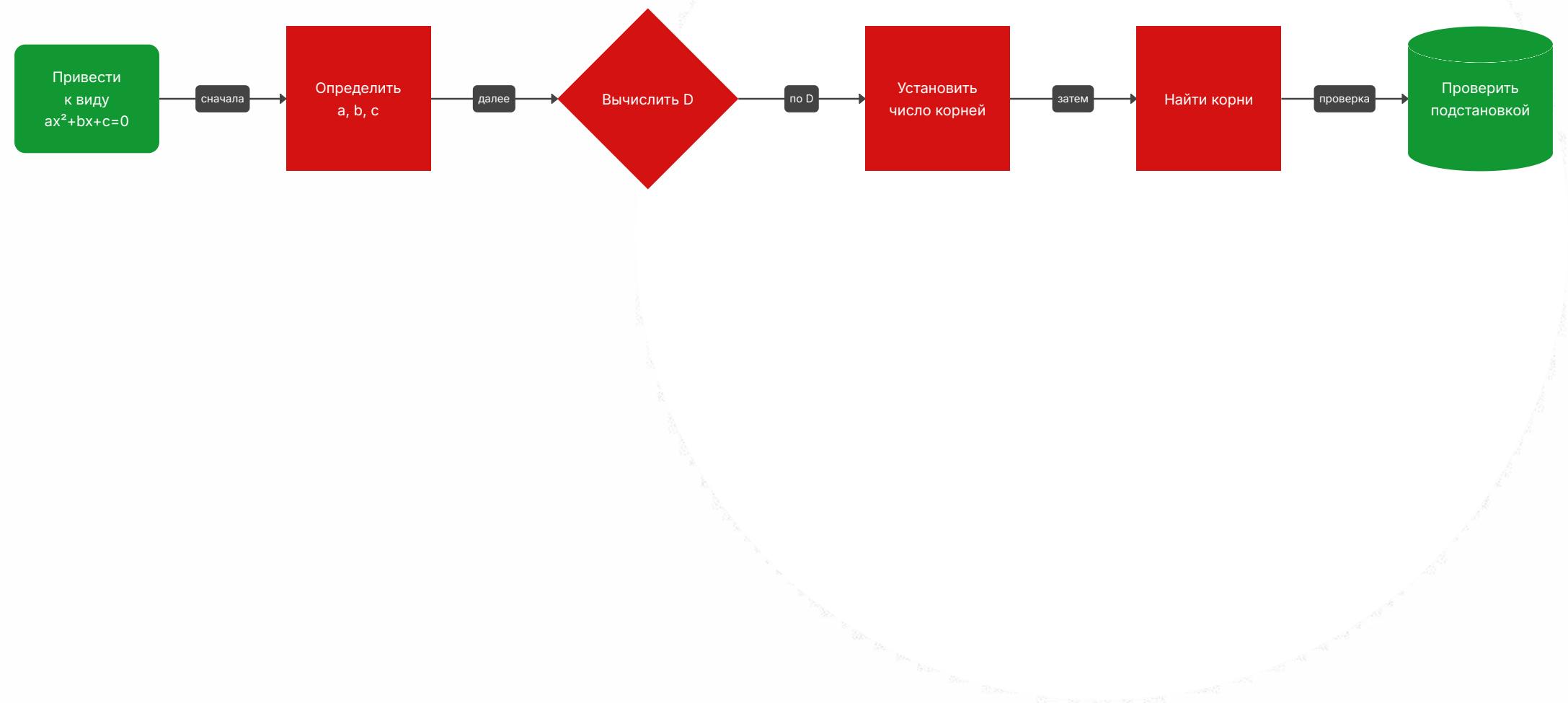
варианта ответа у квадратного уравнения показывает дискриминант.

Знак дискриминанта сразу сообщает, искать ли два корня, один корень или работать только с действительными решениями.

Школьный курс алгебры 8 класса

Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность
действий при решении
полного и неполного
квадратного уравнения



Теорема Виета для приведённого уравнения

1

Сумма корней

Для уравнения $x^2+rx+q=0$ сумма корней равна $-r$. Это правило удобно, когда нужно быстро подобрать подходящие числа без длинных вычислений.

2

Произведение корней

Произведение корней равно q . Если корни уже найдены, это соотношение помогает проверить, правильно ли записан ответ и не допущена ли ошибка в знаках.

3

Когда применять

Теорема Виета особенно полезна для приведённых уравнений с целыми корнями. Она экономит время и делает проверку решения более наглядной и быстрой.



Сравнение методов решения квадратных уравнений

Метод	Удобен	Плюс	Ограничение
Множители	Простые числа	Быстро	Не всегда раскладывается
Дискриминант	Любое полное	Универсален	Нужно считать D
Квадрат двучлена	Есть формула	Показывает структуру	Требует преобразования
Виета	Приведённое	Быстрая проверка	Только для $x^2+px+q=0$

Разные способы подходят для разных уравнений, поэтому важно выбирать метод по виду записи и удобству вычислений.

Выбор метода зависит от вида уравнения: универсальный способ не всегда самый короткий, а быстрый способ не всегда подходит всем случаям.

Неполные квадратные уравнения

Если $c = 0$

.....
Уравнение принимает вид $ax^2+bx=0$. Обычно его раскладывают на множители, вынося x за скобки: $x(ax+b)=0$. Так сразу получаются два возможных значения неизвестного.

Если $b = 0$

.....
Получается уравнение $ax^2+c=0$. Его удобно преобразовать к виду $x^2=\dots$ и затем извлечь квадратный корень, не прибегая к длинным вычислениям.

Только один член

.....
Когда $b=0$ и $c=0$, остаётся уравнение $ax^2=0$. Оно имеет единственный корень $x=0$, потому что квадрат любого числа равен нулю только при $x=0$.

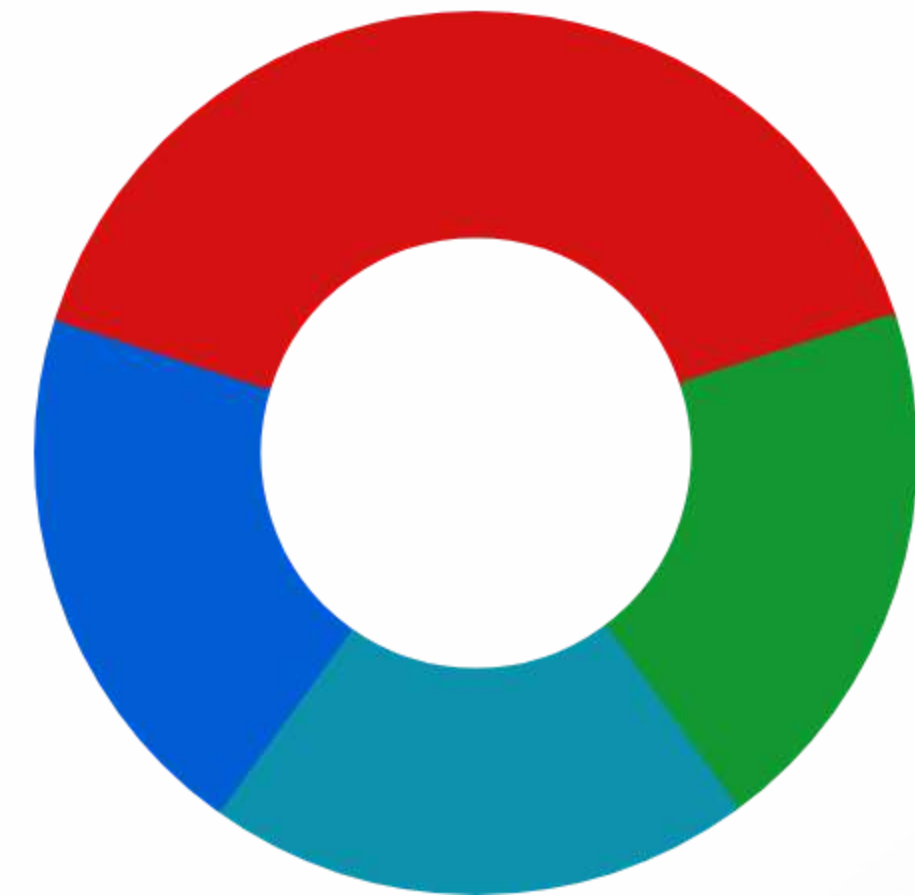
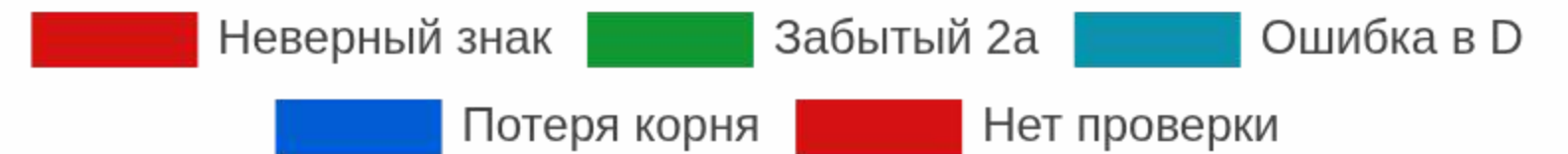
Почему они удобны

.....
Неполные уравнения решаются быстрее полных, потому что в них меньше слагаемых и часто не нужен дискриминант. Это помогает экономить время и уменьшает риск ошибок.

Типичные ошибки при решении квадратных уравнений

Чаще всего ошибки появляются на этапе подстановки коэффициентов и упрощения выражений. Аккуратная запись каждого шага заметно снижает риск неверного ответа.

Все ошибки связаны не со сложностью темы, а с невнимательностью. Проверка решения помогает вовремя заметить неточность и сохранить верный корень.



Анализ типичных ошибок при выполнении упражнений по теме квадратных уравнений; учебная практика 8 класса

Что такое система нелинейных уравнений



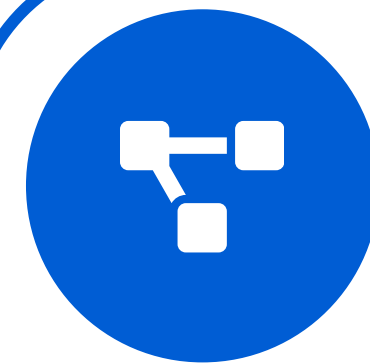
Несколько условий

В системе записаны два или более уравнений, и хотя бы одно из них нелинейно. Это значит, что в записи могут встречаться квадрат, произведение неизвестных или корни.



Общий ответ

Решением считается пара чисел, которая подходит сразу всем уравнениям системы. Если одно из значений не выполняет хотя бы одно условие, такая пара не является решением.

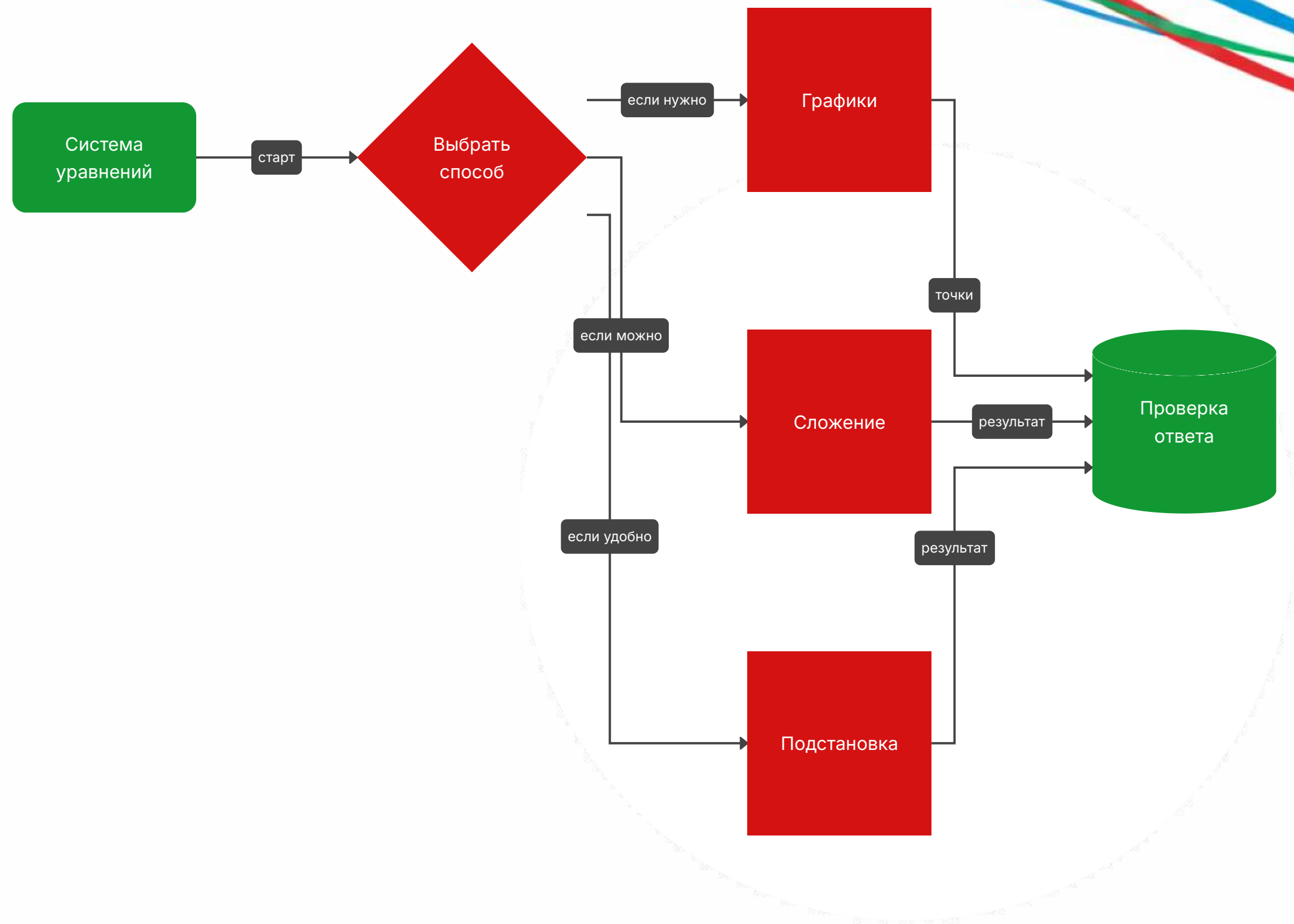


Связь с графиком

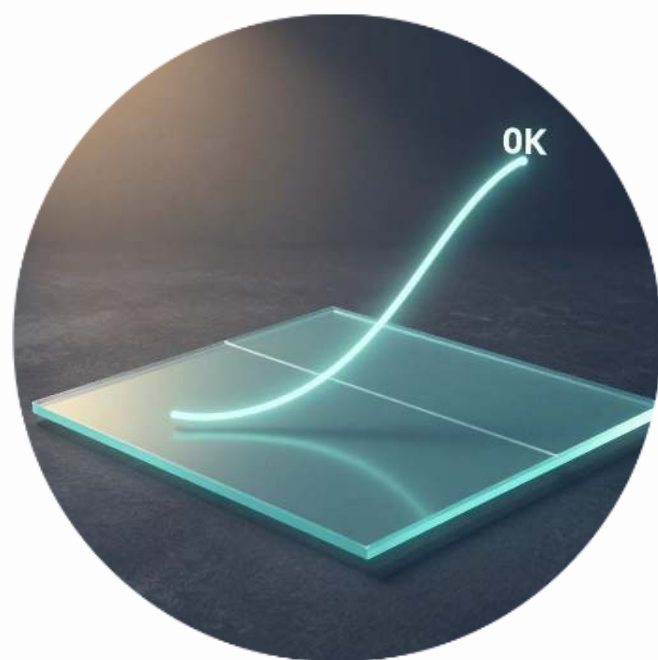
Геометрически решение системы — это точка пересечения графиков. Поэтому алгебраическая запись и рисунок дополняют друг друга и помогают быстрее понять, сколько ответов может быть.

Как решают системы нелинейных уравнений

Последовательность показывает три основных способа и обязательную проверку найденной пары чисел.

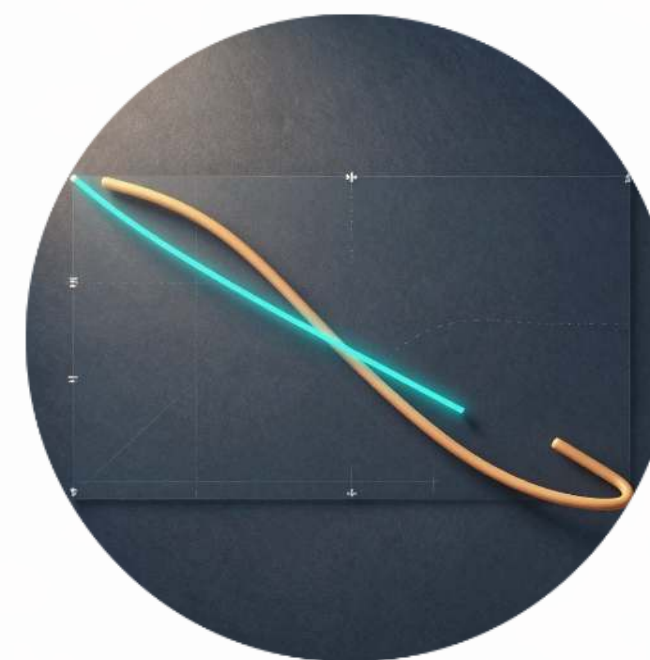


Как выглядит графическое решение



Прямая и парабола

На одном чертеже легко увидеть, где линии встречаются. Если прямая и парабола пересекаются в двух точках, система имеет два решения: координаты обеих точек нужно записать как пары чисел.



Касание или отсутствие пересечения

Иногда графики соприкасаются в одной точке или вообще не пересекаются. Тогда сразу видно, что у системы одно решение или его нет вовсе, без длинных вычислений и лишних преобразований.

Примеры систем и число решений

Три простых примера показывают, как число решений связано с расположением графиков на координатной плоскости.

Число решений системы видно не только по вычислениям, но и по графику. Пересечение, касание и отсутствие встречаются как три основных случая.

Система	Решений	Смысл
Парабола + прямая	2	Две точки
Парабола + касание	1	Одна точка
Парабола + прямая	0	Нет пересечений

Практические задачи из жизни и геометрии

Площадь прямоугольни а

Если известны периметр и одна сторона, вторую находят через квадратное уравнение. Такая задача показывает, как алгебра помогает работать с геометрическими величинами.

Траектория мяча

Движение мяча часто изображают параболой. По ней можно оценить высоту, дальность и момент, когда объект снова окажется на земле.

План и координаты

Системы нелинейных уравнений помогают найти точку пересечения двух линий на плане. Это важно, когда нужно определить место встречи или общую точку объектов.

Фигура по двум условиям

Когда размеры фигуры зависят сразу от двух требований, составляют систему. Решение даёт значения, которые удовлетворяют обоим условиям одновременно.

Как коэффициенты влияют на параболу и корни

Коэффициенты работают вместе: один задаёт форму графика, другой — его положение, а дискриминант связывает запись уравнения с числом решений.

Изменение коэффициентов меняет и вид параболы, и число пересечений с осью Ox . Поэтому формула и график всегда рассматриваются вместе.



Школьный курс алгебры 8 класса

Главные правила главы



Привести к виду

Сначала уравнение нужно записать в стандартной форме $ax^2+bx+c=0$. Это делает понятными коэффициенты и помогает выбрать подходящий способ решения без пропуска важных шагов.



Выбрать метод

Дальше подбирают удобный приём: дискриминант, разложение на множители, теорему Виета или способ для неполных уравнений. Выбор зависит от вида записи и чисел.



Проверить ответ

После вычислений корни обязательно подставляют в исходное уравнение. Проверка позволяет заметить ошибку в знаке, в расчётах или при преобразовании выражения.



Беречь решения

В системах нелинейных уравнений нельзя терять и добавлять лишние ответы. Каждое преобразование должно быть аккуратным, чтобы итоговая пара чисел действительно подходила всем условиям.

Глава VI: от уравнения к ответу

В этой главе вы научились решать квадратные уравнения, читать параболу и находить решения систем нелинейных уравнений. Эти умения делают алгебру понятнее и помогают уверенно решать задачи разного вида.