



Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

Как бесконечная последовательность может
дать конечный ответ?



Геометрическая прогрессия: от повторения к сумме

В геометрической прогрессии каждый следующий член получается умножением на одно и то же число q . Если $|q| < 1$, члены уменьшаются, и бесконечная сумма может оказаться конечной.



Пример убывающей геометрической прогрессии



Первые члены

Последовательность 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... показывает, как быстро уменьшаются значения. Здесь каждый новый член вдвое меньше предыдущего, поэтому прогрессия убывает очень наглядно.

Первый член и знаменатель

В этом примере первый член равен 8, а знаменатель $q = \frac{1}{2}$. Именно он задаёт правило перехода от одного члена к следующему и определяет темп уменьшения.

Что происходит дальше

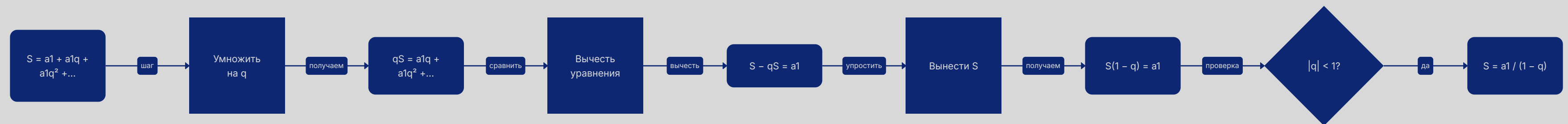
Если продолжать деление, члены становятся всё меньше и ближе к нулю. Такая картина удобна для рисунка со ступеньками, прямоугольниками или делением отрезка на части.

Почему это важно

Убывание помогает понять, почему бесконечное число слагаемых не всегда означает бесконечный результат. При достаточно быстром уменьшении вклад каждого следующего члена становится всё меньше.

Как выводится формула суммы

Преобразование бесконечной геометрической суммы по шагам



Примеры вычисления бесконечной суммы

Три примера показывают, как работает формула $S = a_1 / (1 - q)$ при разных значениях q .

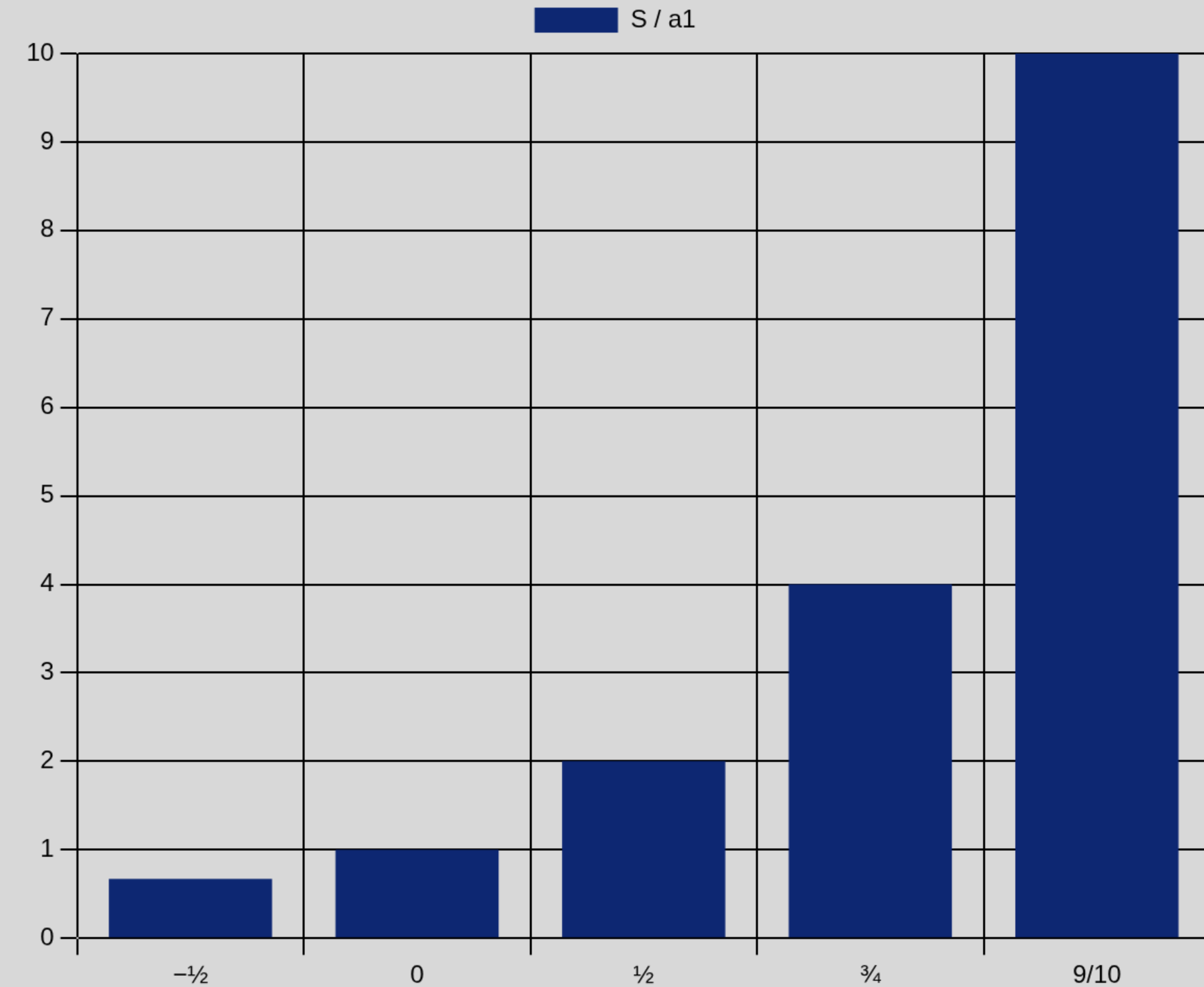
Отрицательный q меняет знаки членов, но при $|q| < 1$ бесконечная сумма всё равно может быть конечной.

a1	q	Формула	Ответ	Вывод
6	$\frac{1}{2}$	$6/(1-\frac{1}{2})$	12	сумма есть
10	$\frac{1}{5}$	$10/(1-\frac{1}{5})$	12,5	сумма есть
3	$-\frac{1}{3}$	$3/(1+\frac{1}{3})$	$\frac{9}{4}$	знаки чередуются

Как меняется сумма при разных значениях q

Диаграмма сравнивает не сами суммы, а отношение S к первому члену. Так видно, насколько сильно q влияет на результат.

Чем ближе q к 1, тем меньше знаменатель $1 - q$ и тем больше итоговая сумма.



Вычисления по формуле $S = a_1 / (1 - q)$

Почему при $|q| < 1$ сумма может быть конечной

Каждый член меньше

Когда модуль q меньше 1, каждый следующий член по модулю становится меньше предыдущего. Поэтому последовательность постепенно «затухает» и приближается к нулю.

Вклад быстро уменьшается

Сначала члены заметны, но потом они становятся очень малыми. Даже если их бесконечно много, общий вклад следующих слагаемых быстро снижается.

Итог не обязан быть бесконечным

Бесконечное количество чисел не всегда даёт бесконечную сумму. Если значения убывают достаточно быстро, получается конечный результат, который можно найти по формуле.

Когда конечной суммы нет

1

$$q = 1$$

Все члены остаются одинаковыми, например 4, 4, 4, 4, ... Сумма будет расти без ограничения, поэтому конечного ответа для бесконечного ряда нет.

2

$$q = -1$$

Члены чередуются по знаку, но не уменьшаются: 3, -3, 3, -3, ... Сумма не приближается к одному числу, значит ряд не имеет конечной суммы.

3

$$|q| > 1$$

При $q = 2$ или другом большем по модулю значении члены быстро растут. В таком случае бесконечный ряд не сходится, и формула суммы как ответ не используется.

Модель с делением целого на части



Половина, потом ещё половина

Представьте круг или пирог, который каждый раз делят пополам. Сначала остаётся $\frac{1}{2}$, потом $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{8}$ и так далее. Хотя частей становится всё больше, каждая новая часть намного меньше предыдущей, поэтому их сумма может дать целое число.



Почему целое не исчезает

Когда кусочки становятся всё тоньше, их вклад уменьшается очень быстро. Именно поэтому ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ равен 1: бесконечность частей не мешает получить точный и конечный результат.

Частичные суммы и их приближение к ответу

n	Sn	S
1	1	2
2	1,5	2
3	1,75	2
4	1,875	2

Таблица показывает, как сумма первых членов постепенно приближается к точному значению.

Частичные суммы становятся всё ближе к 2, но на каждом шаге ещё немного не достигают точного значения.

Что такое частичная сумма

Первые члены

01

Частичная сумма — это сумма первых нескольких членов прогрессии. Она показывает, какой результат получится, если остановиться не на бесконечности, а на выбранном количестве слагаемых.

Промежуточная проверка

02

Для ряда $9, 3, 1, 1/3, \dots$ частичные суммы равны $9, 12, 13, 13,333\dots$. Они помогают увидеть, как ответ постепенно приближается к конечному значению $13,5$.

Зачем это нужно

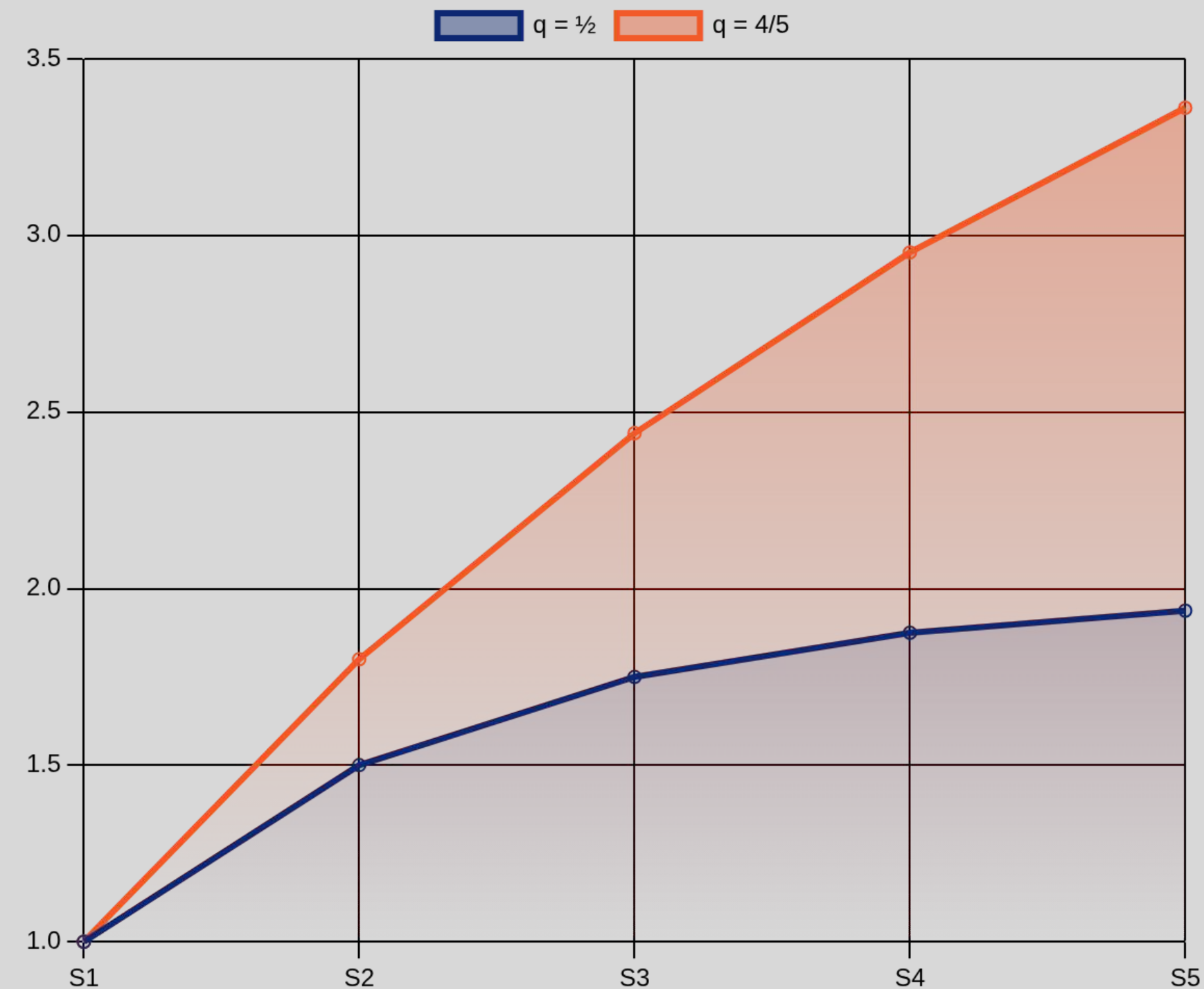
03

Частичные суммы удобны для проверки вычислений и оценки результата без полного выписывания ряда. По ним легко заметить, что каждое новое слагаемое вносит всё меньший вклад.

Скорость приближения к сумме

Обе последовательности начинаются с одного и того же первого члена, поэтому разница в скорости хорошо заметна уже на первых шагах.

При меньшем q частичные суммы быстрее выходят на плато. Чем ближе q к 1, тем медленнее достигается точный результат.



Расчёт по формуле частичной суммы геометрической прогрессии для $a_1 = 1$; значения вычислены для иллюстрации.

Прогрессия с отрицательным q

— Знаки чередуются

Если знаменатель отрицательный, каждый следующий член меняет знак. В последовательности 6, -3, 1,5, -0,75... положительные и отрицательные числа идут поочерёдно, но их модуль уменьшается.



Условие остаётся тем же

Для конечной суммы важно не направление знака, а модуль знаменателя. Когда $|q| < 1$, члены становятся всё меньше, поэтому ряд может иметь конечный результат даже при чередовании знаков.



Особая внимательность

При решении задач легко ошибиться в знаке формулы. Сначала определяют q , затем подставляют его в $S = a_1 / (1 - q)$, не заменяя минус перед q на плюс без основания.

Типичные ошибки при решении задач

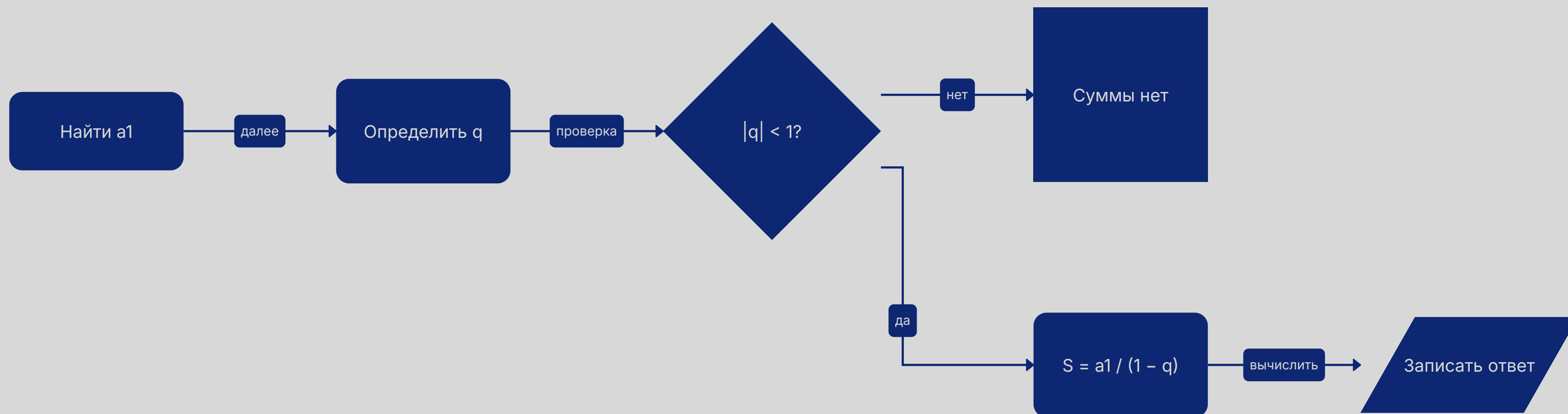
Сравните частые ошибки и правильный подход при нахождении суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Главная проверка выполняется до вычислений: если $|q| \geq 1$, формулу суммы использовать нельзя. Ошибки чаще всего связаны со знаком и невнимательностью к условию.

Ошибка	Пример	Вывод
$q = 2$	2, 4, 8...	Суммы нет
Забыть $ q < 1$	$q = 1$	Проверить условие
Путать формулы	$1 + q$	Нужен $1 - q$

Алгоритм нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии

Последовательность действий для проверки и вычисления суммы ряда.

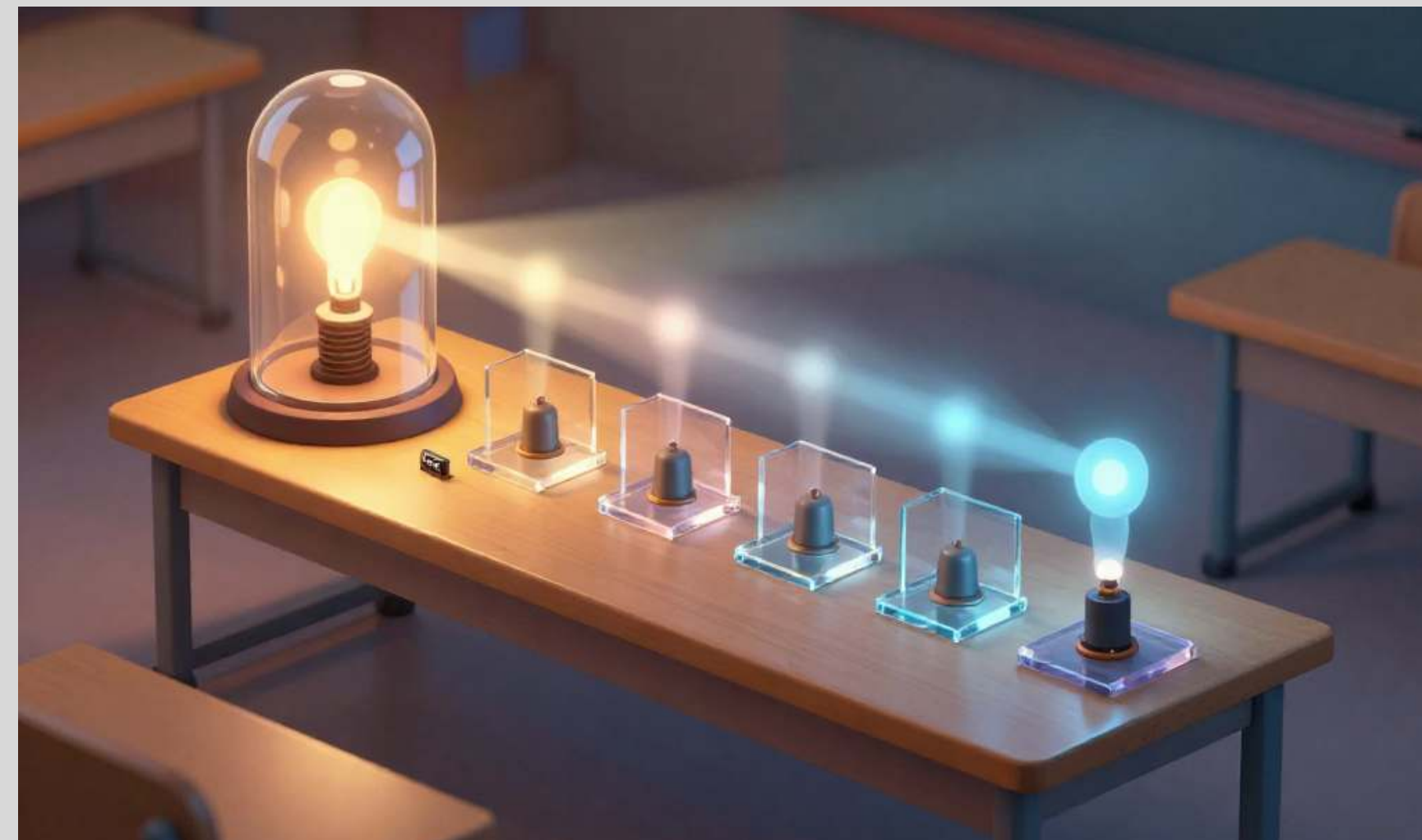


Примеры из жизни, где встречается убывание по геометрии.



Скидка по шагам

В магазине цена может снижаться не сразу на всю величину, а несколько раз подряд от уже уменьшенной суммы. Тогда каждое новое снижение считается от меньшей базы, и изменение похоже на убывающую геометрическую прогрессию.



Остывание и уменьшение

Похожая логика встречается, когда величина постепенно уменьшается: например, сигнал слабеет после каждого прохождения через препятствие, а процент потерь считается от предыдущего результата. Так получаются всё более маленькие шаги вниз.

Связь темы с понятием предела

1

Частичные суммы

Сначала считают несколько первых сумм ряда и смотрят, как они меняются. Если значения всё ближе к одному числу, можно говорить о стремлении к пределу.

2

Идея бесконечного приближения

Бесконечный ряд не обязан давать бесконечный ответ. Когда каждый следующий член становится меньше по модулю, вклад новых слагаемых быстро ослабевает и сумма стабилизируется.

3

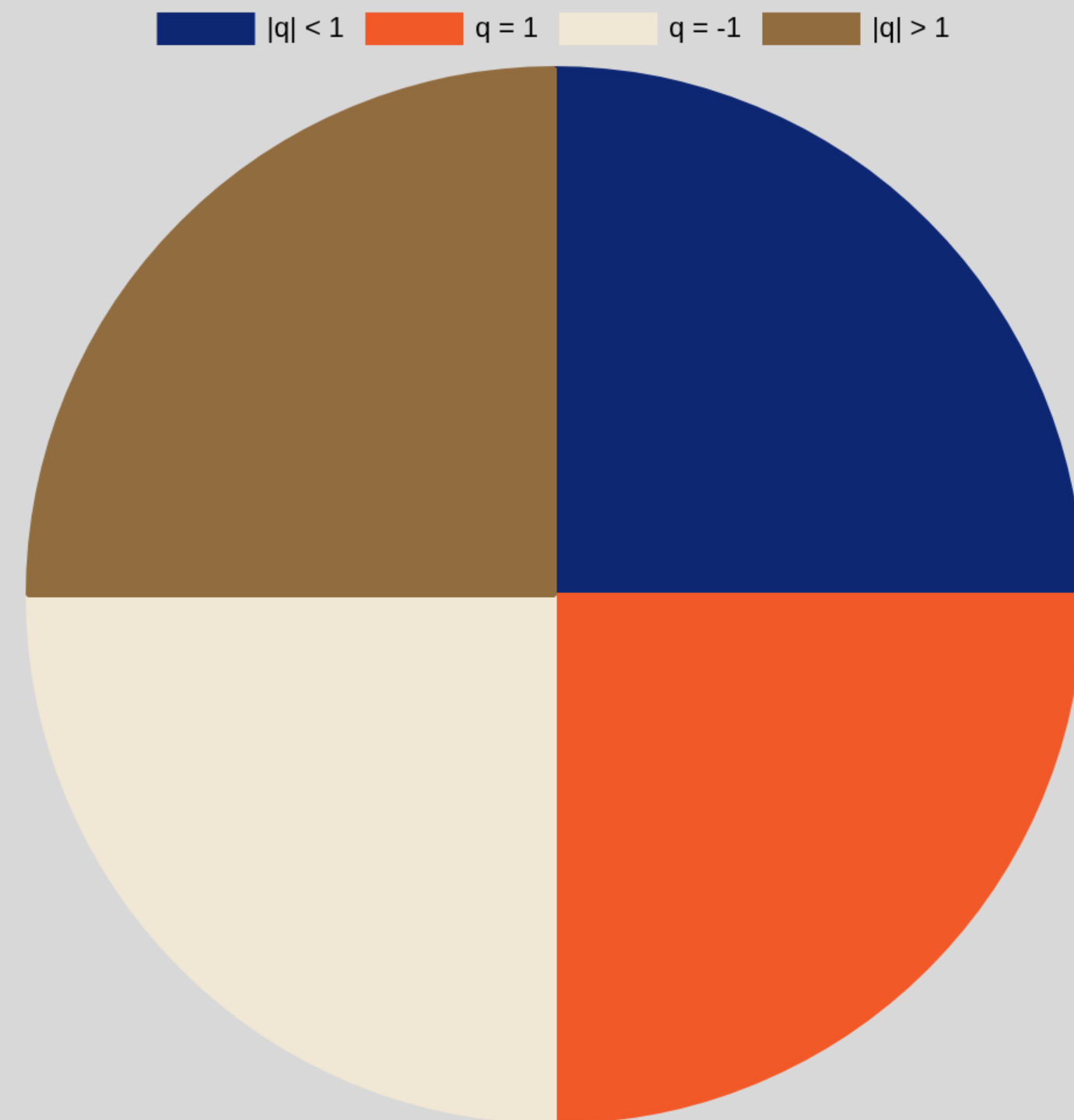
Почему это важно

Для школьника здесь видно главное: конечный результат появляется не из-за маленького числа членов, а из-за закономерного уменьшения каждого следующего шага.

Поведение ряда в зависимости от q

Диаграмма показывает не величину суммы, а то, при каких значениях знаменателя бесконечный ряд может вести себя по-разному.

Решающим является модуль q : только при $|q| < 1$ ряд сходится. Остальные случаи не дают конечной суммы бесконечного ряда.



Классификация случаев для геометрической прогрессии
по школьному курсу алгебры.

Задания для самопроверки с ответами

Пример	Вычисление	Ответ
4, $\frac{1}{2}$	$4/(1-\frac{1}{2})$	8
3, $-\frac{1}{3}$	$3/(1+\frac{1}{3})$	$\frac{9}{4}$
5, 1	нет суммы	—

Проверьте себя на трёх коротких примерах и сравните вычисления с ответами.

Во всех заданиях сначала нужно определить, выполняется ли условие $|q| < 1$. Если нет, конечный результат по формуле не находится.

Главный вывод по теме

Бесконечная геометрическая прогрессия даёт конечную сумму только при $|q| < 1$. Тогда работает формула $S = a_1 / (1 - q)$, а проверка условия остаётся обязательной частью решения.