

# Корни простейших тригонометрически х уравнений

---

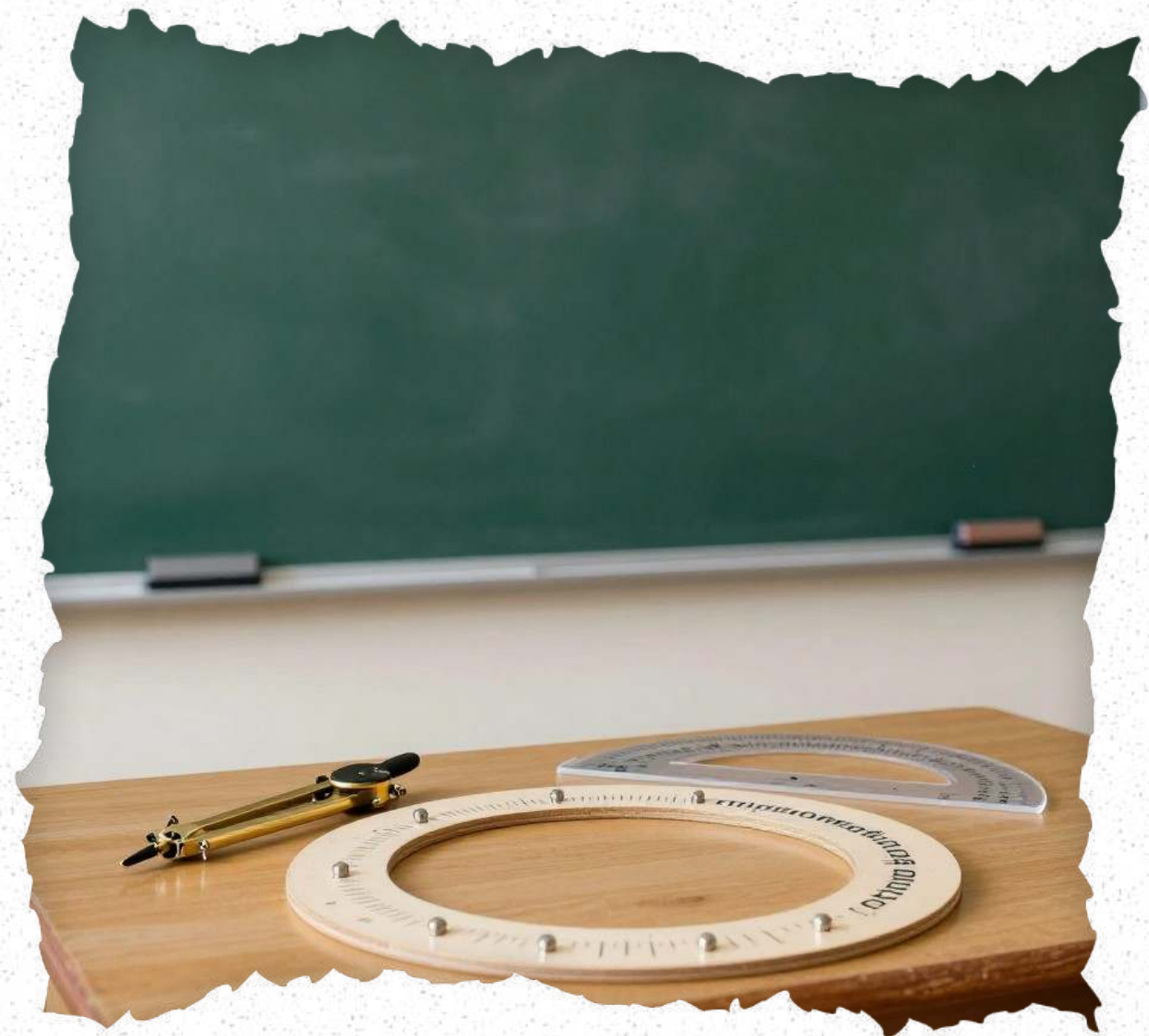
Находим все углы, где  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  или  $\operatorname{ctg}$  принимают  
заданное значение.

---

# Геометрия, аналитика и графики в одном шаге

---

- В 10 классе тригонометрические уравнения опираются на угол и радианную меру. Синус и косинус читаются как координаты точки окружности, тангенс и котангенс — как отношения и наклон. Так геометрия превращается в запись и графический анализ.



# Что считается простейшими тригонометрическими уравнениями

---

● К простейшим относят уравнения вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$  и  $\operatorname{ctg} x = a$ , где  $a$  — заданное число.

● Отличительная черта: в уравнении присутствует только одна тригонометрическая функция от одного аргумента, без выражений вида  $\sin(2x)$  или  $\cos(x+\pi/3)$ .

● Эти формы — фундамент: они учат находить корни по области значений, периодичности и симметрии, прежде чем переходить к более сложным преобразованиям.

# Единичная окружность как модель поиска корней

---

- На единичной окружности синус угла равен ординате соответствующей точки, а косинус — абсциссе. Поэтому уравнение превращается в задачу о точках с заданной координатой.
- Опорные углы вида  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$  и  $2\pi$  помогают быстро проверить идеи и увидеть, что одному и тому же значению функции отвечает несколько углов из-за симметрии.

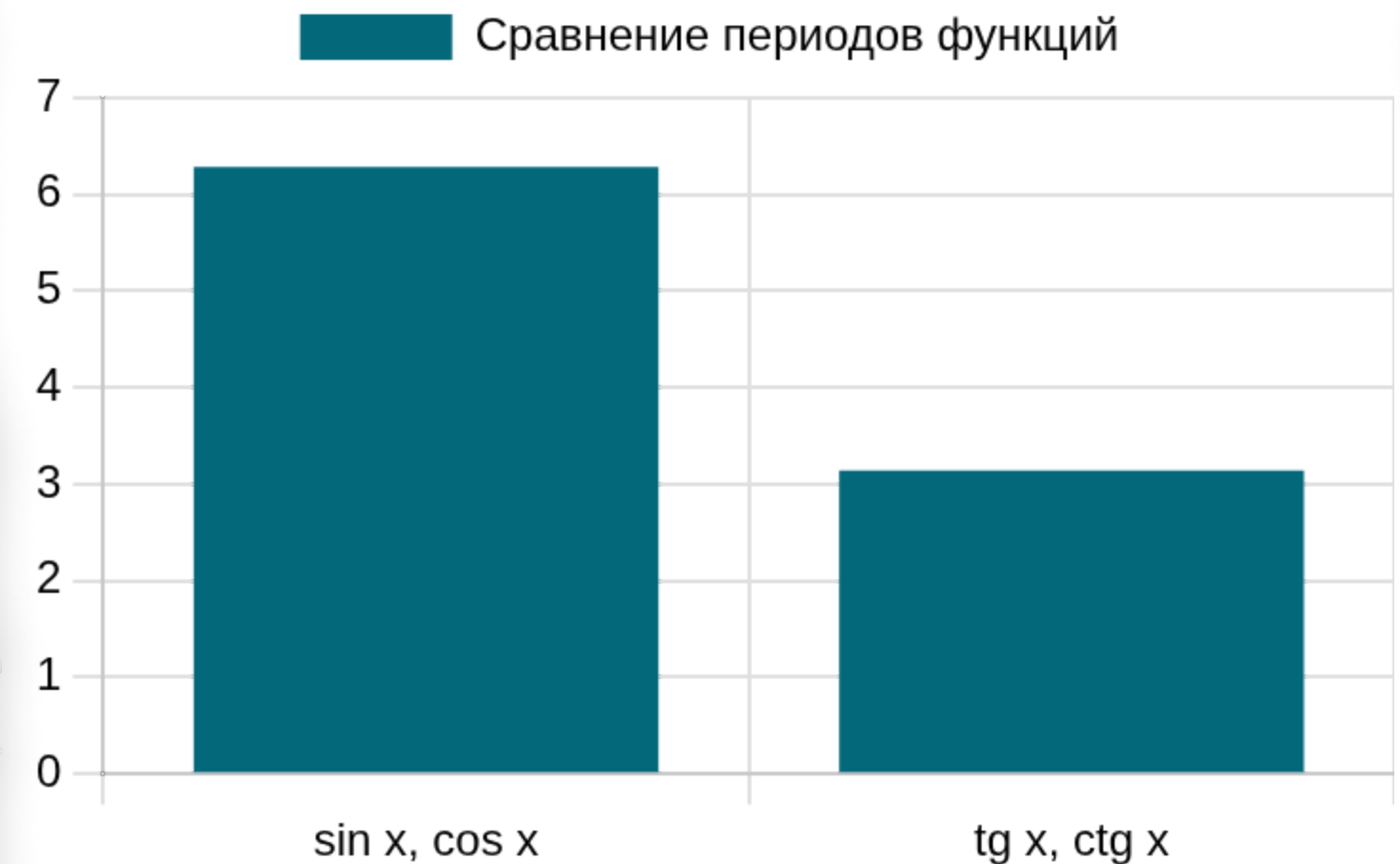


# Периоды тригонометрических функций

---

Так как  $\sin$  и  $\cos$  ограничены, пересечений с горизонтальной прямой на промежутке обычно немного; множество корней расширяется именно из-за периодов.

Период задаёт «повторяемость» решений: где бы ни нашёл один корень, остальные находятся систематически по  $k\pi$ .



Собственные вычисления по определениям периодов:  $2\pi$  для  $\sin$  и  $\cos$ ,  $\pi$  для  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ .

Решения существуют только тогда, когда  $a$  принадлежит диапазону значений синуса. При  $|a| < 1$  получается два семейства корней, а при  $a = \pm 1$  — по одному семейству.

Свойства значений синуса на единичной окружности (диапазон  $[-1; 1]$ ).

$$-1 \leq a$$

$$\leq 1$$

**Значение  $a$   
должно лежать  
в области  
возможных  
синусов.**

# Уравнение $\cos x = a$ : симметрия относительно оси $Ox$

$\cos x = a$  имеет смысл только при  $-1 \leq a \leq 1$ , потому что косинус принимает значения на отрезке  $[-1; 1]$ .

Общее решение можно записать как  $x = \pm \arccos a + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; знак « $\pm$ » отражает две позиции точки на окружности с одинаковой абсциссой.

Если  $a = 1$ , то корни имеют вид  $x = 2\pi k$ , а при  $a = -1$  получаем  $x = \pi + 2\pi k$  — точки находятся на крайней оси абсцисс.

Геометрически эти углы соответствуют точкам с одной и той же координатой по оси  $Ox$ , то есть решения симметричны относительно неё.

# Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ и его особенности

---

## 1. Ограничение аргумента

Тангенс определён не везде:  $x \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Поэтому в этих точках уравнение просто не может иметь корней.

## 2. Запись общего решения

Для любого действительного  $a$  уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет бесконечно много решений:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Достаточно учесть период.

## 3. Зачем это в задачах

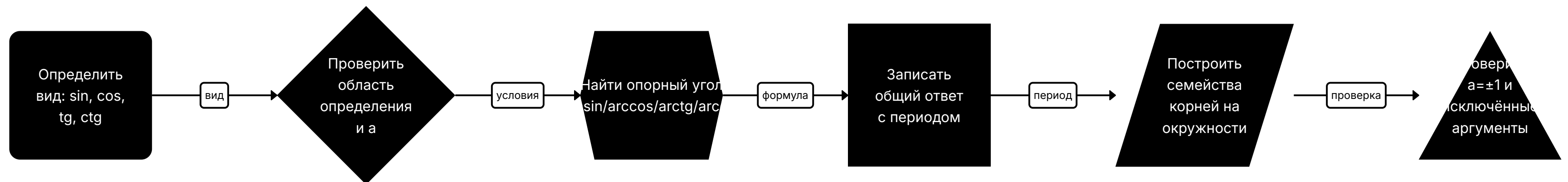
Период  $\pi$  и отсутствие ограничений по  $a$  делают тангенс удобным для решения «по шаблону», особенно когда речь идёт о наклоне и угловом коэффициенте.

# Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ и связь с тангенсом

|                                                                                                            |                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Область определения</b><br><br>Котангенс не определён при $x = \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ , так как в этих точках $\sin x = 0$ , а $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ невозможно. | <b>Общее решение при любом <math>a</math></b><br><br>Для любого действительного $a$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет бесконечно много решений: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ , поскольку котангенс периодичен с периодом $\pi$ . | <b>Связь через дробь</b><br><br>В школьной практике $\operatorname{ctg} x$ часто рассматривают как обратную величину тангенса: $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ . Это помогает использовать уже знакомые свойства $\operatorname{tg}$ . | <b>Почему это полезно</b><br><br>Связь с тангенсом ускоряет проверку ответов: если вы умеете находить $\operatorname{tg}$ -углы, то по формуле обратной связи легче контролировать решения по $\operatorname{ctg}$ . |

# Как решать простейшее тригонометрическое уравнение

Последовательность действий — от распознавания вида до записи полного ответа с параметром  $k \in \mathbb{Z}$ .



# Формулы общих решений и условия существования

Таблица сопоставляет уравнения  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$  с допустимыми значениями правой части, общим видом корней и периодом соответствующей функции.

Чтобы ответ был полным, сначала проверяют существование (ограничения  $a$ ), затем выбирают формулу семейства и обязательно добавляют параметр  $k \in \mathbb{Z}$  с периодом.

| Функция                | Допустимые $a$     | Общее решение                                             | Период |
|------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------|--------|
| $\sin x$               | $-1 \leq a \leq 1$ | $x = \arcsin a + 2\pi k$ ; $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$ | $2\pi$ |
| $\cos x$               | $-1 \leq a \leq 1$ | $x = \pm \arccos a + 2\pi k$                              | $2\pi$ |
| $\operatorname{tg} x$  | $a$                | $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$                      | $\pi$  |
| $\operatorname{ctg} x$ | $a$                | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$                     | $\pi$  |

Школьный курс тригонометрии (единичная окружность и периодичность функций).

# Типичные ошибки при записи корней

---

## Проблемы с семействами решений и обратными функциями

При  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$  нередко записывают только одно семейство корней, теряя вторую ветвь симметричных углов. Другая распространённая причина — неверно выбранная обратная тригонометрическая функция вместо нужной формы решения.

## Ошибки в проверке допустимости $a$ и в периодичности

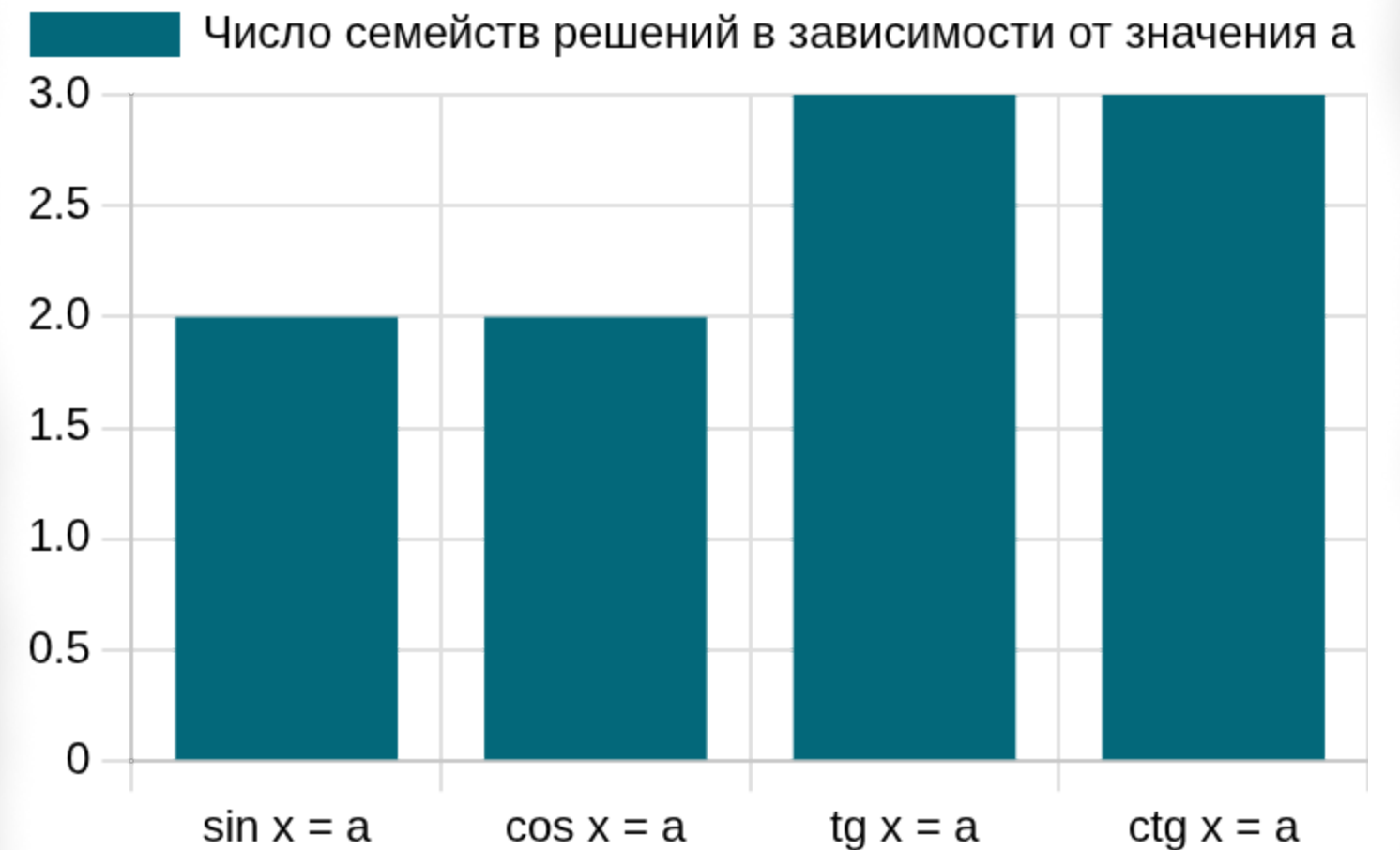
Для  $\sin x$  и  $\cos x$  также ошибочно получают ответы при  $a > 1$  или  $a < -1$ : такие значения не достигаются функцией. Ещё один сбой — игнорирование периода и потеря параметра  $k \in \mathbb{Z}$ , из-за чего решение оказывается неполным.



# Сколько решений имеют простейшие уравнения

Для  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$  число решений меняется: при подходящем  $a$  бывают два семейства, одно (краевой случай) или ни одного.

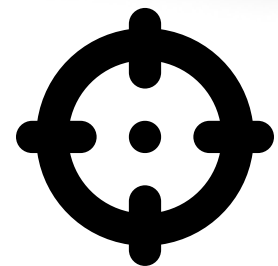
Объединяющий принцип: область значений функции задаёт возможность решений, а период определяет регулярное повторение корней и их бесконечность для  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ .



Обобщение свойств функций  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  на единичной окружности и их периодов (учебный материал).

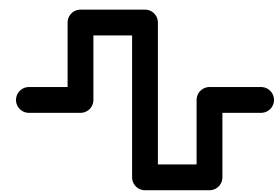
# Графический способ проверки числа корней

---



## Пересечения с прямой $y=a$

Ищем точки пересечения графика  $y=f(x)$  с горизонтальной линией  $y=a$ . Для  $\sin x$  и  $\cos x$  это сразу показывает, где пересечений две, одно или нет на выбранном промежутке.



## Синус и косинус: симметрия на участке

По форме графиков видно, что  $\sin x$  и  $\cos x$  могут давать два угла с одинаковым значением функции, причём они связаны симметрией относительно соответствующей оси на окружности.



## Тангенс и котангенс: ветви и асимптоты

Для  $\tan x$  и  $\cot x$  графический метод дополнительно выявляет вертикальные асимптоты и то, что ветви повторяются каждые  $\pi$ . Поэтому корни идут цепочкой бесконечно.

# Примеры с точными значениями

---

Уравнение  $\sin x = 1/2$  имеет корни  $x = \pi/6 + 2\pi k$  и  $x = 5\pi/6 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Значения берутся из стандартной таблицы и дополняются периодом  $2\pi$ .

---

Уравнение  $\cos x = -1/2$  имеет корни  $x = 2\pi/3 + 2\pi k$  и  $x = 4\pi/3 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Здесь используется период  $2\pi$  и знак для углов с заданной абсциссой.

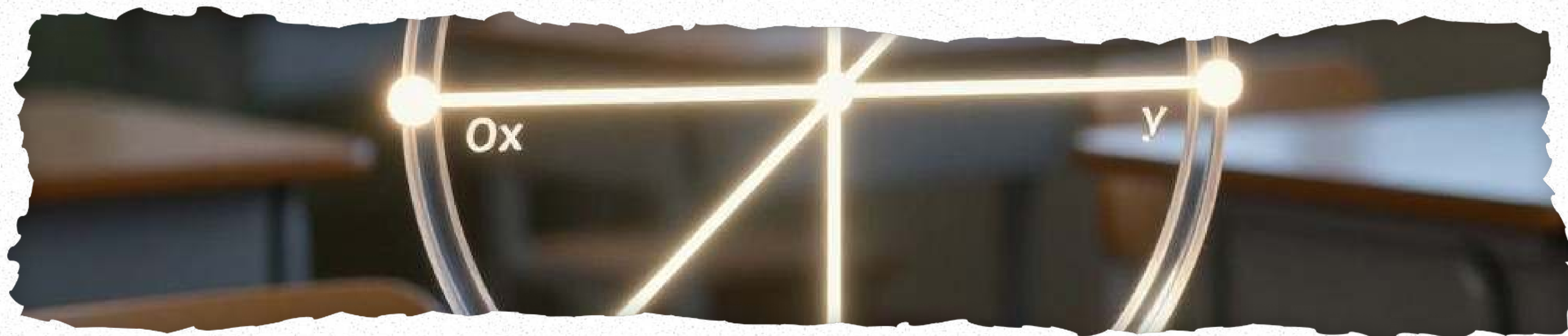
---

Уравнение  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  имеет корни  $x = \pi/3 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Поскольку период тангенса равен  $\pi$ , семейство повторяется через каждые поворота.

# Геометрический смысл каждого корня

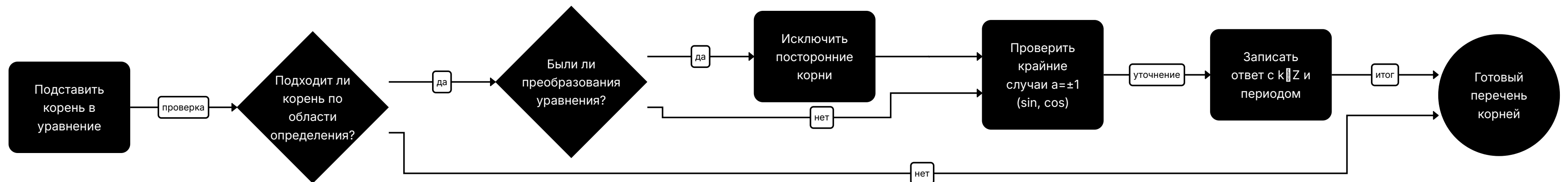
---

- Каждый корень соответствует углу поворота на единичной окружности, при котором абсцисса, ордината или их отношение совпадают с заданным числом. Поэтому одинаковые значения функций появляются в заранее предсказанных местах окружности.
- Для синуса корни идут парно: одной и той же ординате соответствуют точки, симметричные относительно оси  $Oy$ . Для косинуса аналогичная симметрия относится к оси  $Ox$ , а затем всё повторяется с периодом.



# Проверка и уточнение найденных корней

Логика контроля применима к любым простейшим тригонометрическим уравнениям



# Сводная таблица свойств простейших уравнений

| Функция                | Аргумент $x$           | Значения функции | Семейства | Период |
|------------------------|------------------------|------------------|-----------|--------|
| $\sin x$               | все $x$                | $[-1;1]$         | 0–2       | $2\pi$ |
| $\cos x$               | все $x$                | $[-1;1]$         | 0–2       | $2\pi$ |
| $\operatorname{tg} x$  | $x \neq \pi/2 + \pi k$ |                  | 1         | $\pi$  |
| $\operatorname{ctg} x$ | $x \neq \pi k$         |                  | 1         | $\pi$  |

Свойства тригонометрических функций и их периодичность из школьного курса.

Таблица помогает быстро выбрать формулу ответа: сначала учитывают область значений функции и область допустимых аргументов, затем определяют число семейств корней и период повторения.

Ключевой вывод: один и тот же общий принцип (область значений + период + семейства) определяет, будут ли решения и сколько их, особенно для  $\sin$  и  $\cos$ .

# Зачем тема нужна в геометрических задачах

Простейшие тригонометрические уравнения помогают находить углы в прямоугольных и произвольных треугольниках, когда в условии появляются длины, координаты или известные отношения между сторонами.

Они также удобны при работе с периодическими углами поворота: после одного «удачного» угла можно системно продолжить решение, учитывая, что конфигурация повторяется через период.

Наконец, тема ускоряет переход от рисунка к точной записи ответа: вы учитесь формулировать все возможные углы сразу, а не «угадывать» отдельные значения, что критично в задачах на полный ответ.

# Итоги: как искать корни без потерь

---

Корни простейших тригонометрических уравнений определяются периодичностью функций, их областью значений и симметрией единичной окружности. Для  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$  нужна проверка  $-1 \leq a \leq 1$ , для  $\operatorname{tg} x = a$  и  $\operatorname{ctg} x = a$  корни существуют при любом действительном  $a$ .