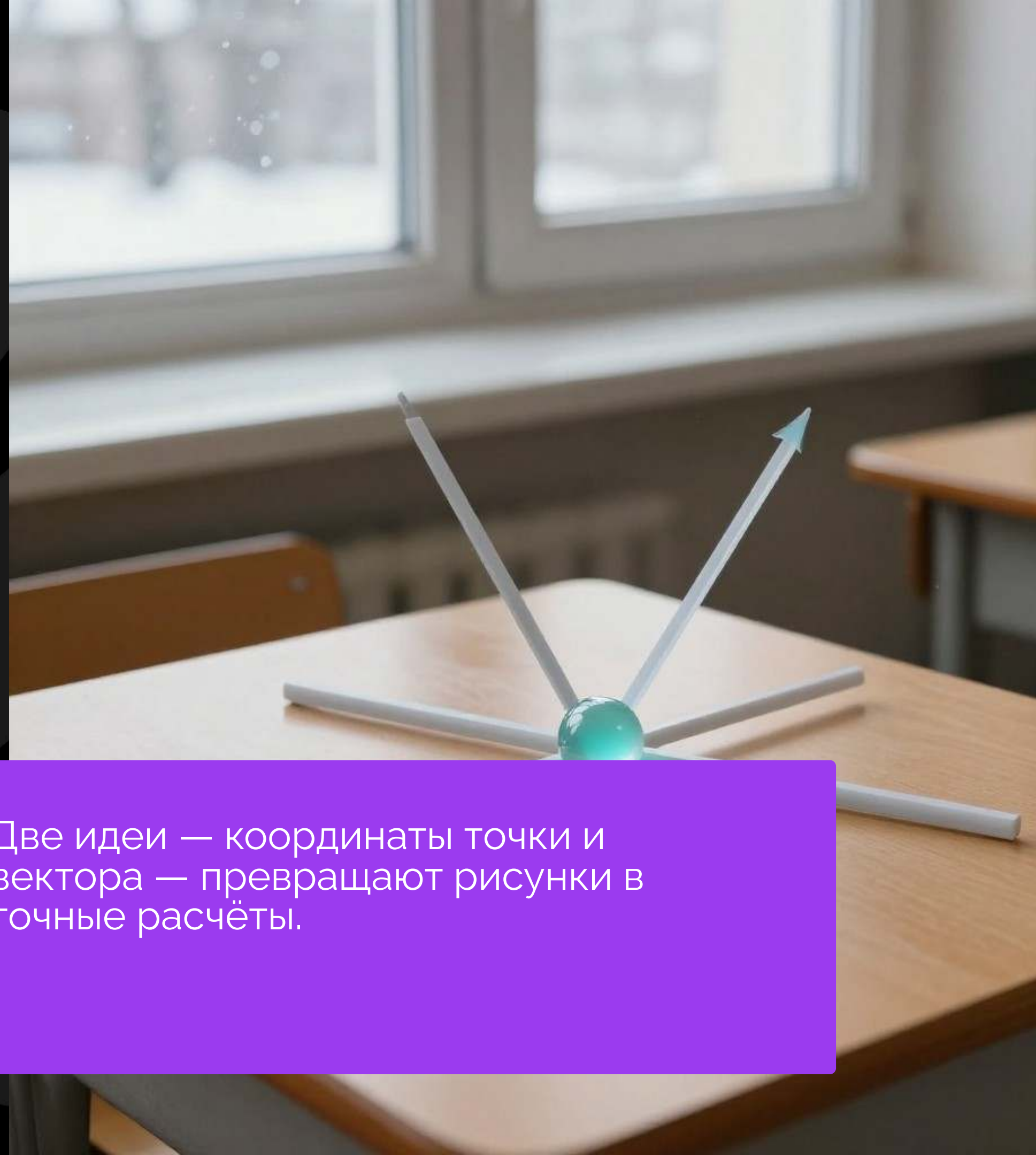
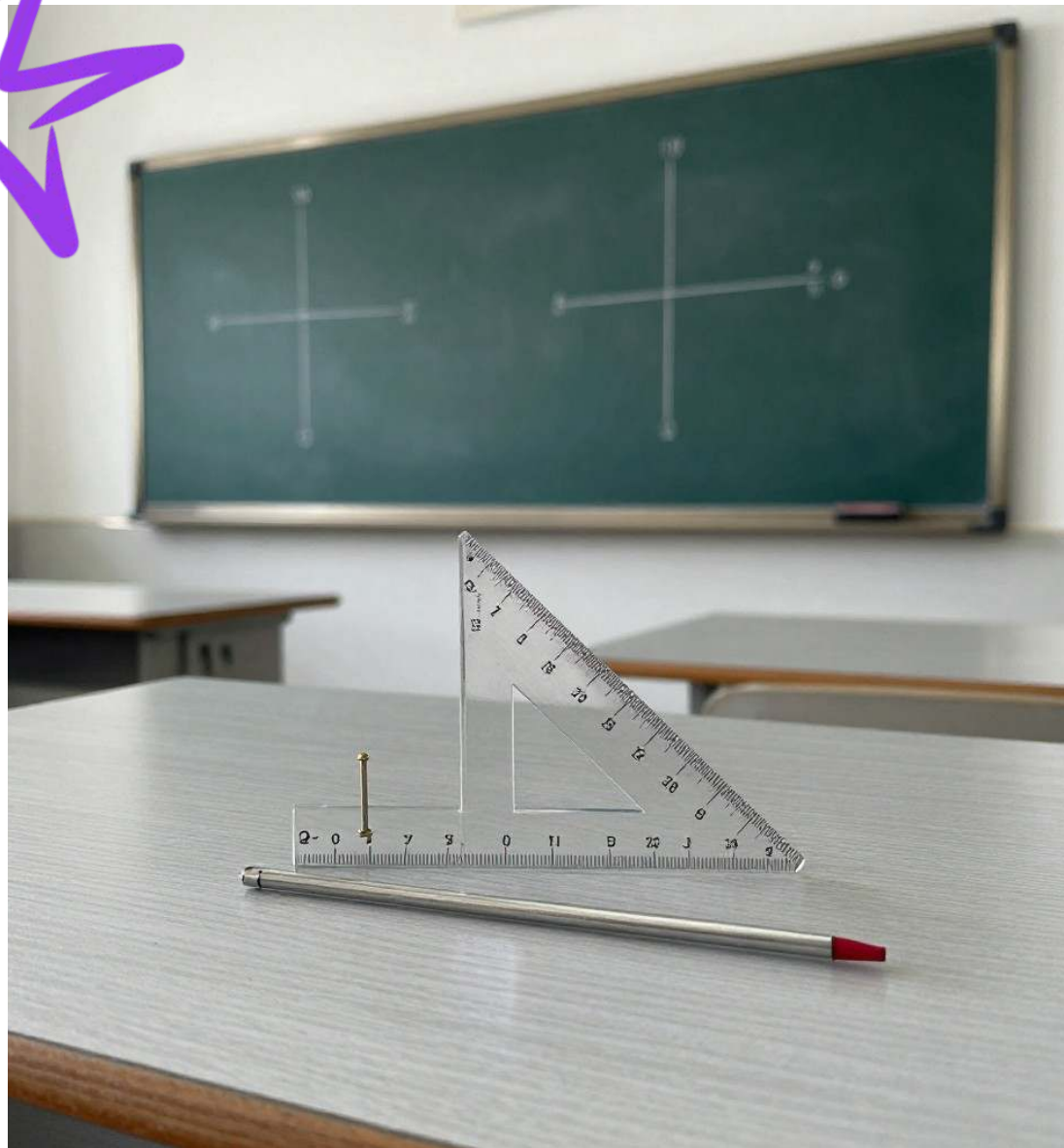


Координаты точки и координаты вектора: основной язык аналитической геометрии

Две идеи — координаты точки и вектора — превращают рисунки в точные расчёты.



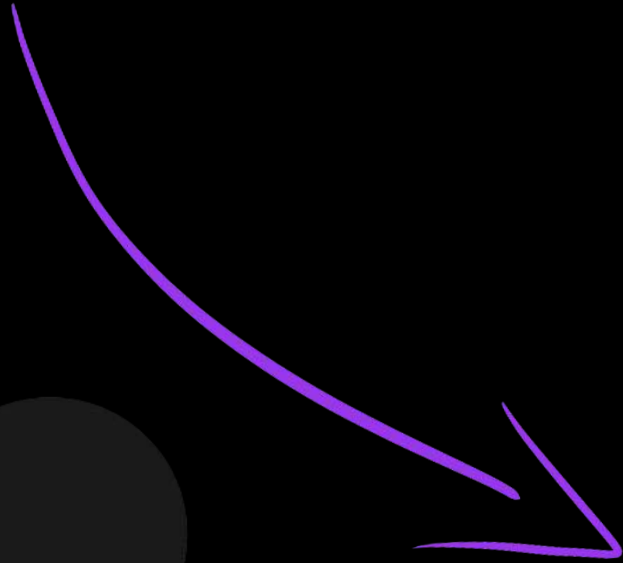
Почему координаты важны в геометрии



Декарт связал геометрию с алгеброй: точку можно описать числами, а не только чертежом. На плоскости нужны две координаты, в пространстве — три, чтобы однозначно задавать точки, отрезки, векторы и расстояния. Метод работает далеко за пределами геометрии.



На плоскости оси Ox и Oy пересекаются в начале координат $O(0;0)$. Точки получают координаты $A(x;y)$, а четверти задают знаки координат по выбранному масштабу.

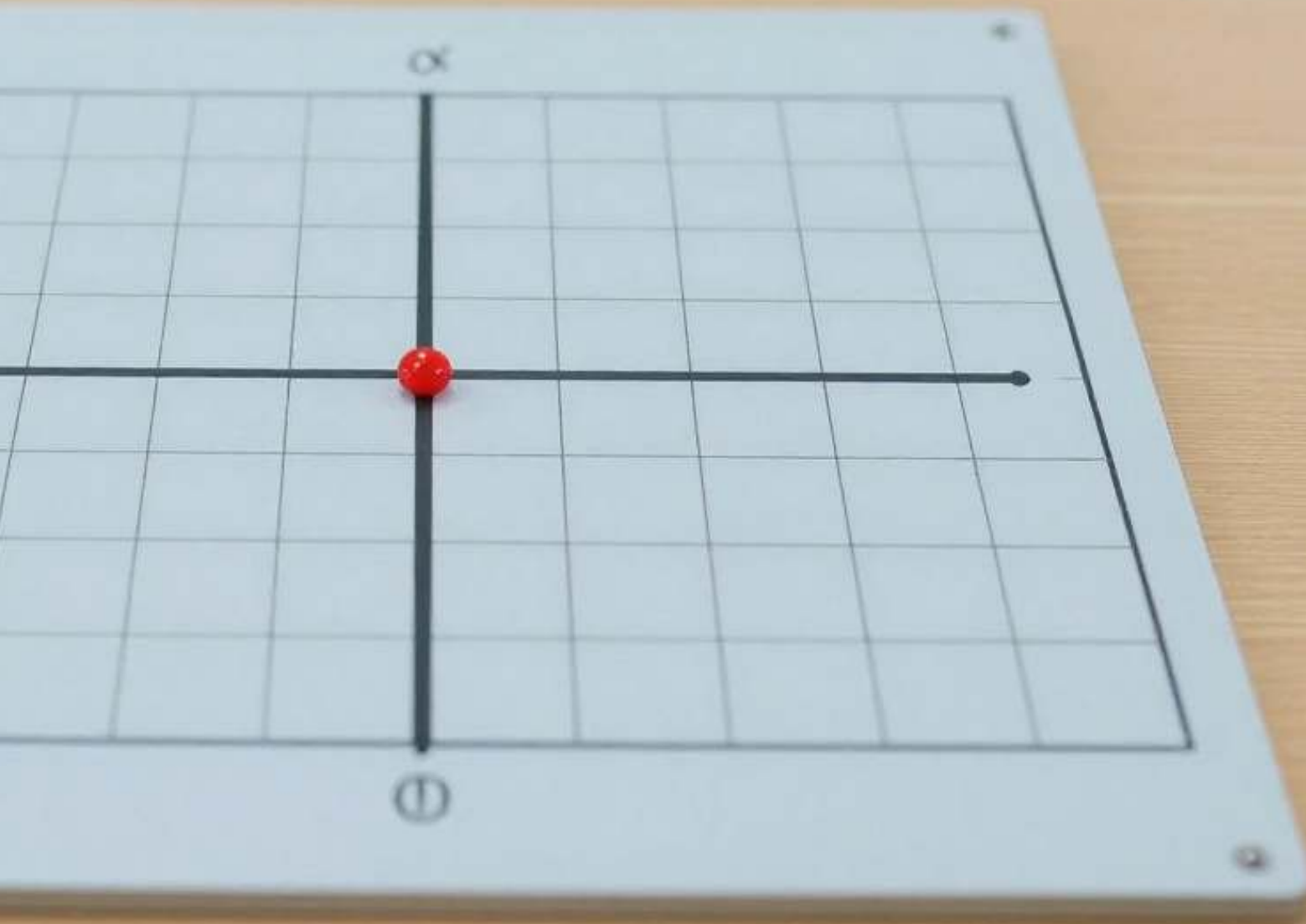


XVII век

Именно с него начинается переход от рисунка к вычислениям.

Образовательный курс по аналитической геометрии (школьная традиция)

Координаты точки на плоскости



- Точка $A(x; y)$ задаётся двумя числами: x — абсциссой по оси Ox , y — ординатой по оси Oy . Координатная сетка помогает визуализировать путь: сначала вправо/влево, затем вверх/вниз.
- Особое внимание уделяется координатным осям: если $y = 0$, точка лежит на Ox ; если $x = 0$ — на Oy . Такие случаи упрощают построение и предотвращают ошибки со знаками при отсчёте.

Примеры координат точек и их положение на плоскости



Точка	x	y	Положение
A(2;5)	+	+	I четверть
B(-4;1)	-	+	II четверть
C(-3;-6)	-	-	III четверть
D(6;-2)	+	-	IV четверть
E(0;4)	0	+	на Oy
F(-5;0)	-	0	на Ox

В таблице для каждой точки указаны знак координат и где она находится: в четверти или на оси. Это помогает быстро проверять правильность построения.

По знакам x и y легко определить четверть; случаи с нулём сразу указывают на принадлежность оси.

Данные приведены в условии слайда (точки A–F)

Как построить точку по её координатам

01

Шаг 1: отметка x

На оси Ox отметьте значение x . Затем проведите через эту отмеченную точку прямую, параллельную оси Oy : так вы зафиксируете «высоту» по ординате.

02

Шаг 2: перенос по y

На проведённой прямой отложите значение y (с учётом знака). Точка пересечения и будет искомой точкой $A(x; y)$.

03

Шаг 3: проверка осей

Если $x = 0$, точка лежит на оси Oy ; если $y = 0$ — на оси Ox ; при $x = 0$ и $y = 0$ это начало координат. Всегда сверяйте знак чисел.

Координаты точки в пространстве

В пространстве точка задаётся тройкой $A(x; y; z)$. Координата x показывает положение относительно оси Ox , y — относительно Oy , z — относительно Oz , а все три оси взаимно перпендикулярны.

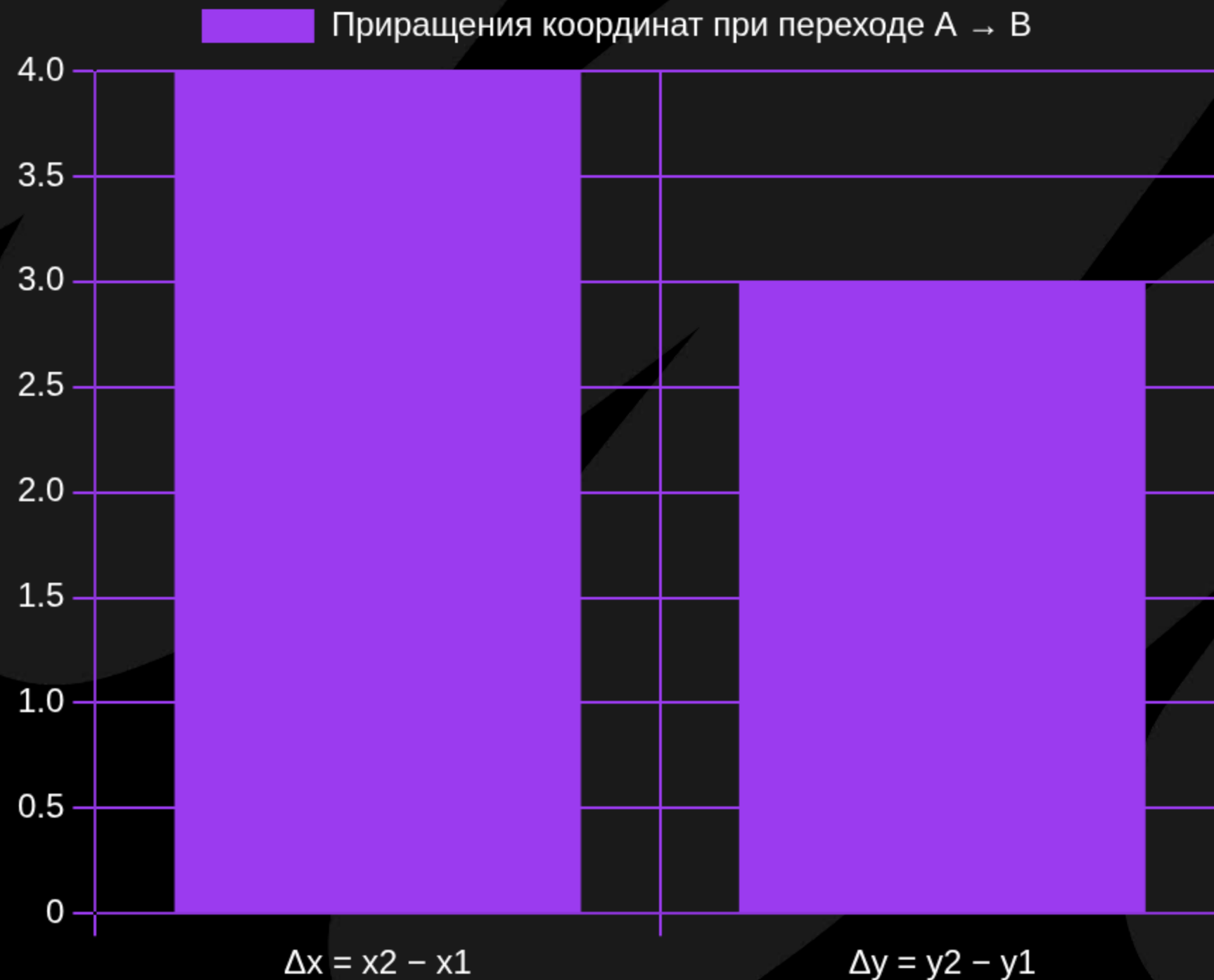
Начало координат O задаётся как точка пересечения осей, поэтому каждая тройка чисел описывает единственное положение. Такой способ удобен, когда нужно точно фиксировать объект в 3D-среде.

Поэтому координаты активно используют в черчении, моделировании и физике: они позволяют переходить от изображения объёма к расчётам перемещений, расстояний и положения деталей.

Вектор как направленный отрезок

- Вектор — это направленный отрезок с началом, концом, длиной и направлением. Его обозначают стрелкой над буквой или двумя буквами: $\vec{AB}$. Он «задаёт движение» без привязки к конкретному месту.
- Ключевое свойство — перенос: вектор можно перемещать параллельно самому себе, сохраняя длину и направление. Равные векторы имеют одинаковые числовые параметры направления, где бы они ни были нарисованы.

Как координаты вектора связаны с перемещением



Приращения Δx и Δy показывают, на сколько «сдвигается» точка от начала до конца вектора по каждой оси.

Когда одно из приращений равно нулю, движение идёт вдоль одной оси; разные знаки приращений соответствуют разным направлениям вектора.

Объяснение связи координат вектора с перемещением по двум точкам $(\Delta x, \Delta y)$

Формула координат вектора по двум точкам

01 Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то координаты вектора $\vec{AB}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Здесь вычитание выполняется по правилу: берём конец минус начало.

02 В пространстве аналогично: для $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ получают $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Формула отражает разность координат конца и начала.

03 Именно эта «разность» делает вектор удобным для описания перемещений: он отвечает не месту, а изменению положения точки по осям.

04 Порядок точек критичен: если поменять A и B местами, получатся противоположные координаты, а значит — противоположный вектор.

Координаты вектора по двум точкам: примеры

Пара точек	Вектор	Разности (Δx ; Δy)
A(1; 2), B(5; 7)	$\rightarrow AB=(4; 5)$	$\Delta x=5-1; \Delta y=7-2$
C(-2; 3), D(1; -1)	$\rightarrow CD=(3; -4)$	$\Delta x=1-(-2); \Delta y=-1-3$
E(0; 0), F(-6; 2)	$\rightarrow EF=(-6; 2)$	$\Delta x=-6-0; \Delta y=2-0$

Для пары точек вектор $\overrightarrow{AB}$ определяется разностью координат конца и начала: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$. По знакам $\overrightarrow{AB}x=x_2-x_1$ и $\overrightarrow{AB}y=y_2-y_1$ видно направление перемещения по осям.

Задание по формулам координат вектора:
 $(x_2-x_1; y_2-y_1)$.

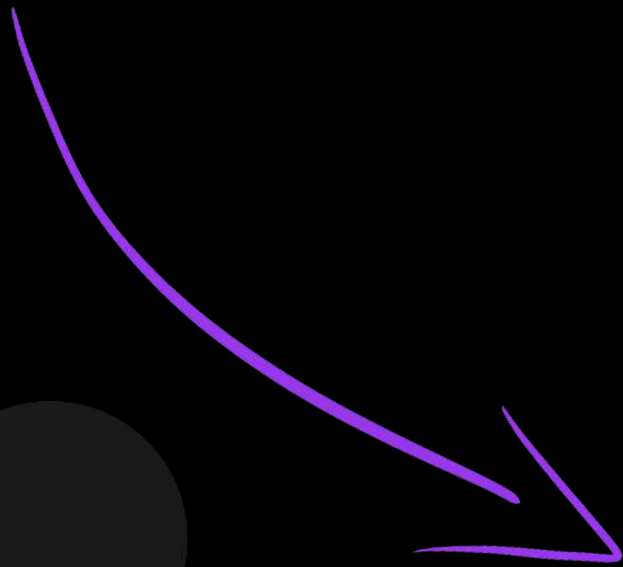
Координаты вектора могут быть положительными, отрицательными и смешанными; их знаки сразу показывают направление движения вдоль Ox и Oy

Алгоритм нахождения координат вектора

Последовательность вычислений для вектора $\vec{AB}$ по двум точкам (на плоскости и в пространстве).



Длину $\|\vec{AB}\|$ находят по формуле: в плоскости это $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, в пространстве добавляется $\sqrt{(z_2-z_1)^2}$. Та же запись даёт расстояние между точками.



O

Длина вектора неотрицательна, потому что корень из суммы квадратов всегда даёт неотрицательный результат. Определение длины вектора и формула расстояния между точками в аналитической геометрии.

Сравнение векторов по координатам



По знаку x-координаты видно, вправо или влево направлен вектор; одновременно y-координата задаёт движение вверх или вниз.

Даже при разных координатах векторы могут иметь близкую «геометрию» по длине, а противоположные векторы всегда дают разный знак каждой координаты.

Исходные данные: векторы (2; 1), (-3; 4), (5; -2), (-1; -1).

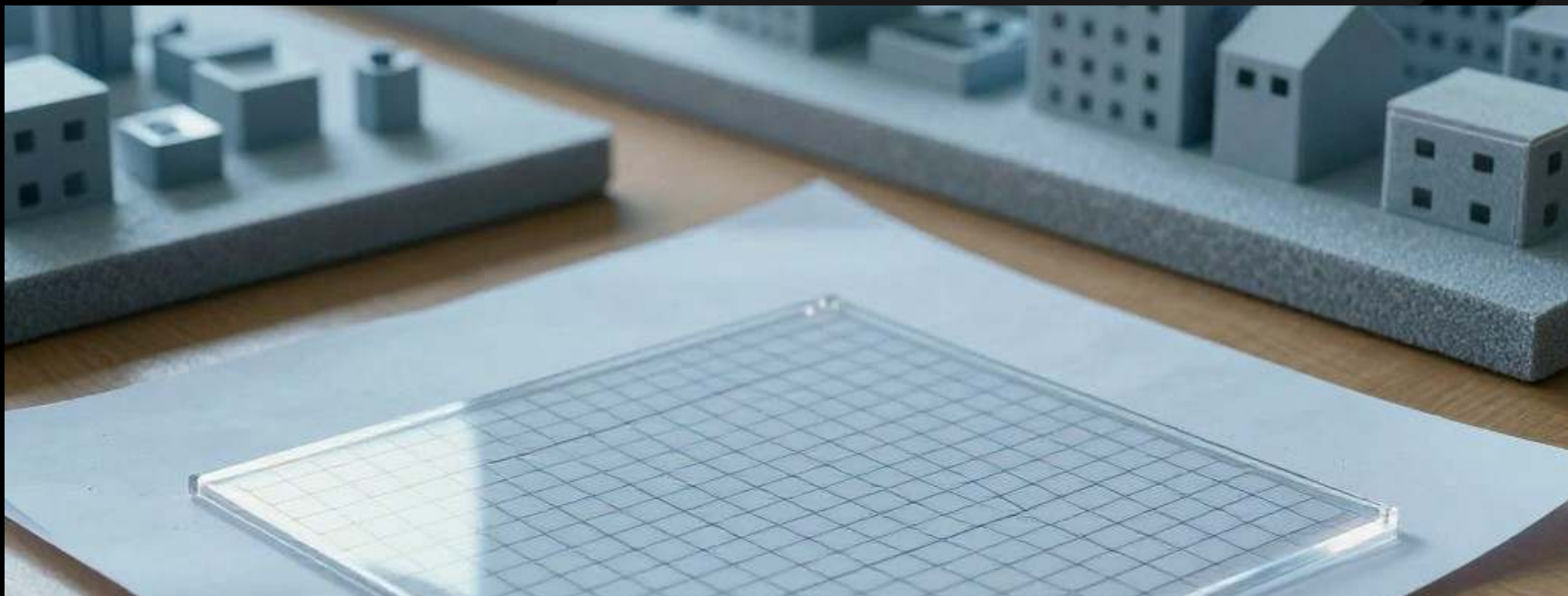
Середина отрезка и её координаты

Пусть M — середина отрезка AB . Тогда её координаты получаются как среднее арифметическое координат концов:
 $M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$.

В пространстве формула дополняется третьей координатой: $M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2; (z_1+z_2)/2)$. Идея та же — «делим пополам» по каждой оси.

Эта формула помогает находить центр отрезка, проверять симметрию фигур и решать задачи на деление отрезка на равные части, не прибегая только к рисунку.

Практическое применение координат



01 Карта маршрута и метки на сетке

На экране навигатора расстояния и направления связываются с координатами точек: старт, поворот, финиш. Координатная сетка помогает точно описывать путь и оценивать перемещения, даже когда ориентиры на местности меняются.



02 Робот и траектория движения

В робототехнике координаты используют, чтобы задать положение и направление движения. Проводя вычисления на плоскости (или в 3D), можно заранее планировать траекторию, сравнивать варианты и контролировать путь по заданным точкам.

Типичные ошибки при работе с координатами

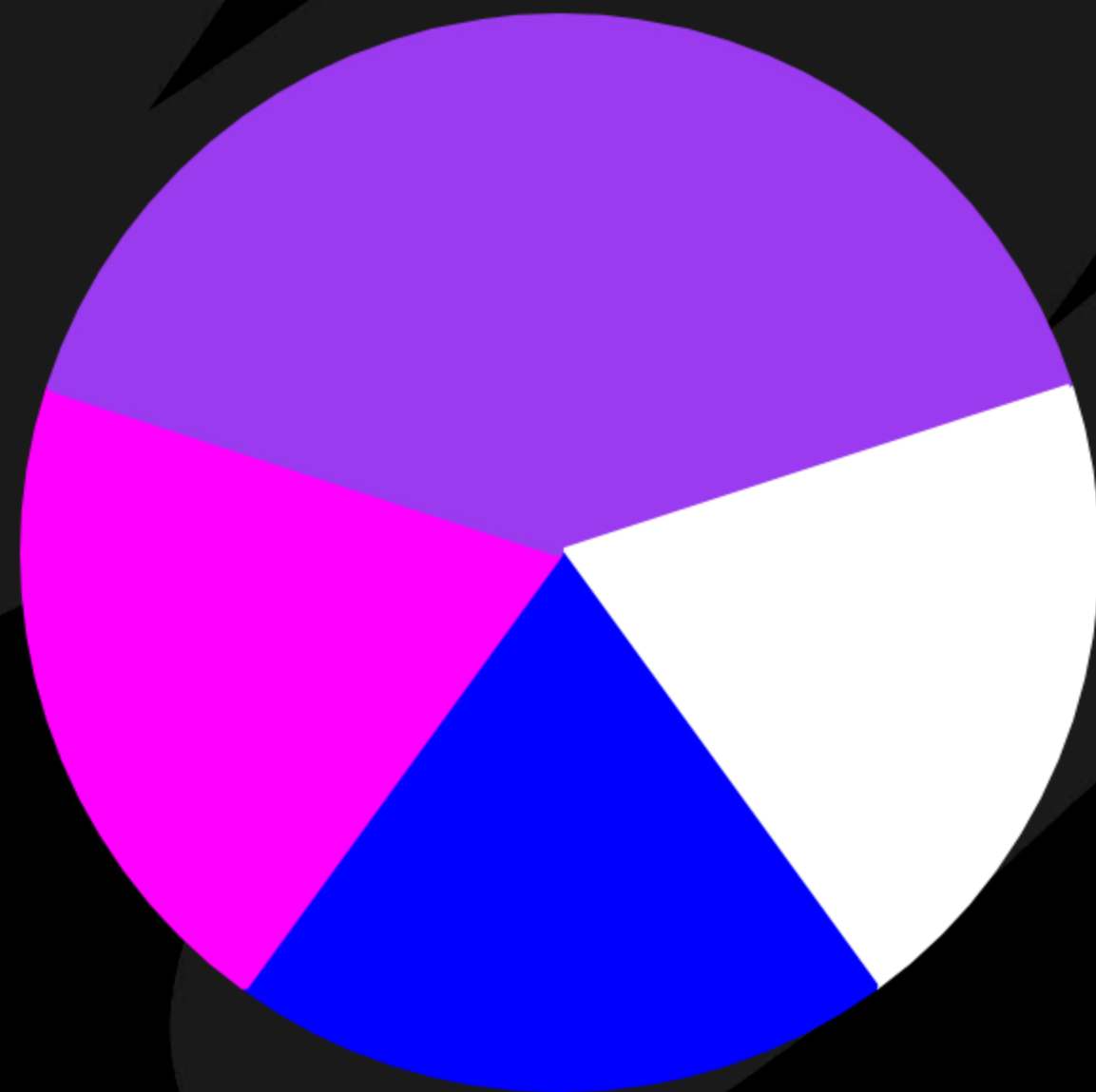
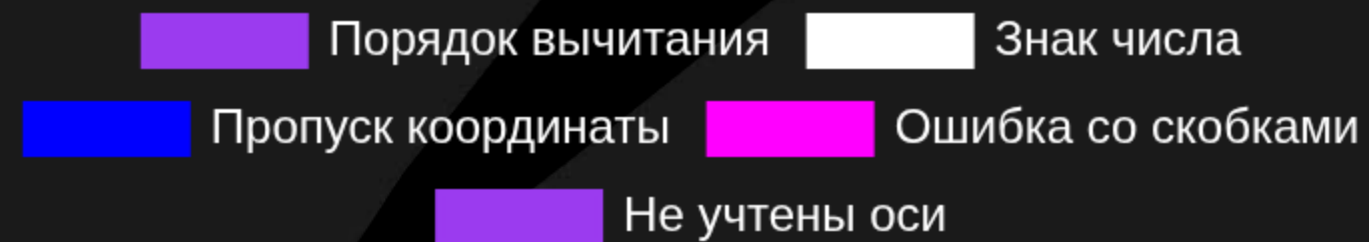


Диаграмма не задаёт доли в процентах, а группирует частые причины ошибок. Самые «дорогие» — неверный порядок точек при нахождении координат вектора.

Любая из ошибок меняет полученные знаки и числовые значения, из-за чего ответ либо станет противоположным вектору, либо не будет соответствовать положению точки.

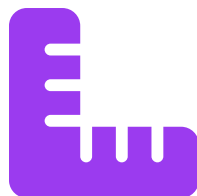
Типология ошибок, формируемая по разбору учебных задач и проверочных работ; доли не приведены.

Связь точки, вектора и отрезка

Как координатный метод соединяет геометрические объекты в вычислительную цепочку.

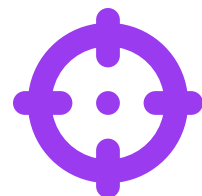


Задачи, которые решаются с помощью координат



Расстояния между точками

Координаты позволяют вычислять длину отрезка между двумя точками по формуле расстояния. Так проще получать числовой ответ, чем оценивать величины только по чертежу.



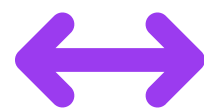
Четверть и положение на осях

По знакам координат можно определить, в какой четверти находится точка, или лежит ли она на одной из осей. Это помогает быстро проверять чертёж и обосновывать ответ.



Середина отрезка

Формула середины даёт координаты центра без дополнительных построений. Её используют в задачах на симметрию и в условиях, где требуется точное определение точки.



Векторы и направление перемещения

Координаты вектора выражают изменение координат при переходе от точки к точке. По ним сравнивают векторы, определяют противоположные направления и проверяют правильность построения.



Движение по плоскости

Координатный метод описывает путь как последовательность перемещений. Это удобно при задачах с «шагами» по осям: сразу видно, как меняются координаты после каждого действия.

Координаты — универсальный инструмент аналитической геометрии

Координаты точки задают её положение, а координаты вектора описывают перемещение и направление. Разность координат двух точек даёт вектор, а формулы расстояния и середины связывают геометрию с вычислениями.