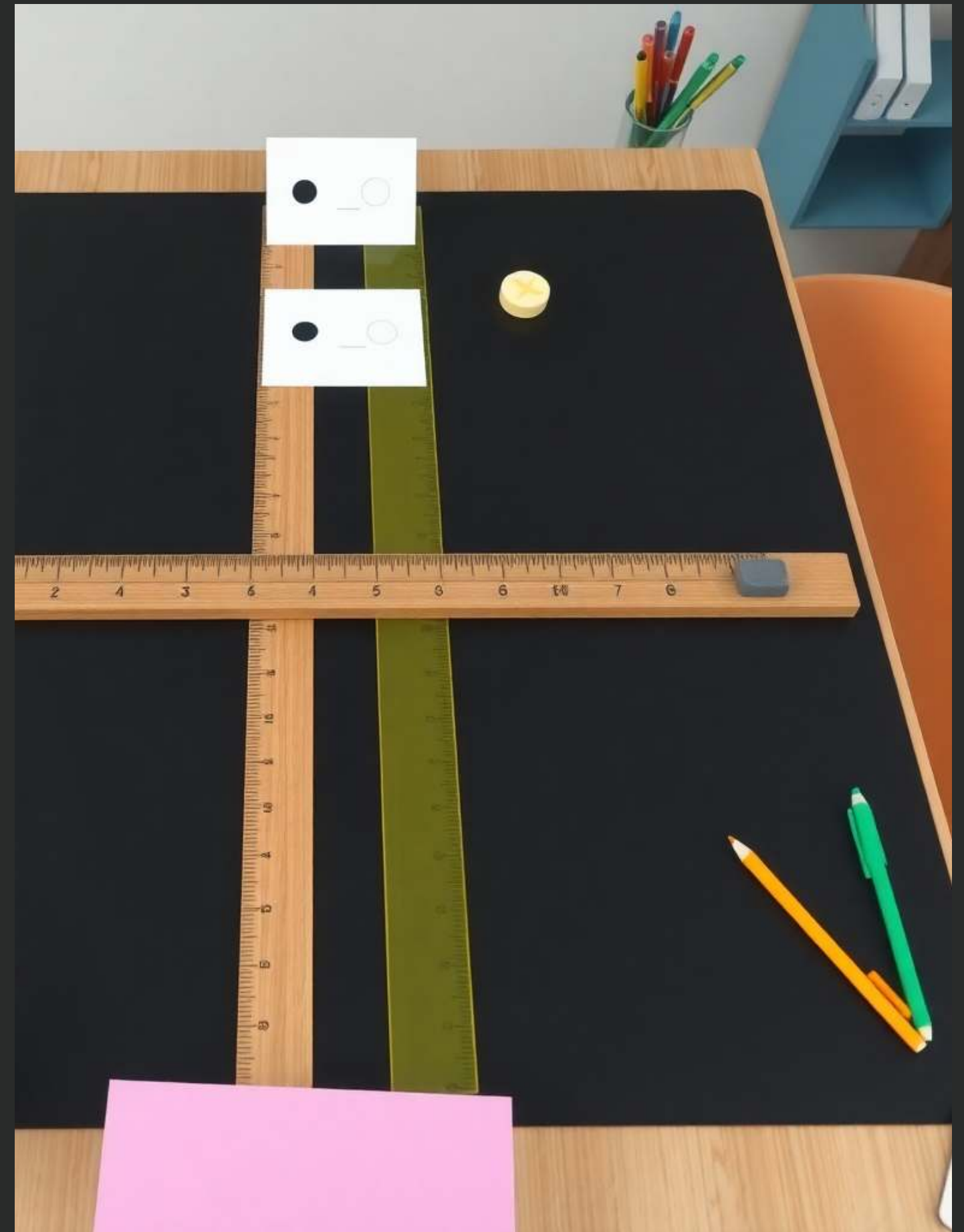


Решение неравенств методом интервалов

Нули, знаки и промежутки помогают
находить ответ без лишних проб.



Почему метод интервалов изучают в 9 классе

Этот способ опирается на уже знакомые темы: разложение на множители, квадратные уравнения, правило знаков и числовую прямую. Он позволяет быстро решать рациональные и квадратные неравенства, не подбирая числа наугад.



Какие неравенства решают методом интервалов



Дробные неравенства

Если выражение записано в виде дроби, отдельно отмечают нули числителя и знаменателя. Это помогает увидеть, где дробь равна нулю, а где она вообще не определена.



Квадратные выражения

Метод подходит, если неравенство можно привести к произведению множителей, например после разложения квадратного трёхчлена. Тогда ищут нули выражения и анализируют знак на получившихся промежутках.



Знаки по промежуткам

Главная идея метода — знак выражения внутри одного промежутка не меняется. Поэтому достаточно проверить одну удобную точку и затем выбрать все части прямой, подходящие по условию неравенства.

Числовая прямая как основа метода

Особые точки

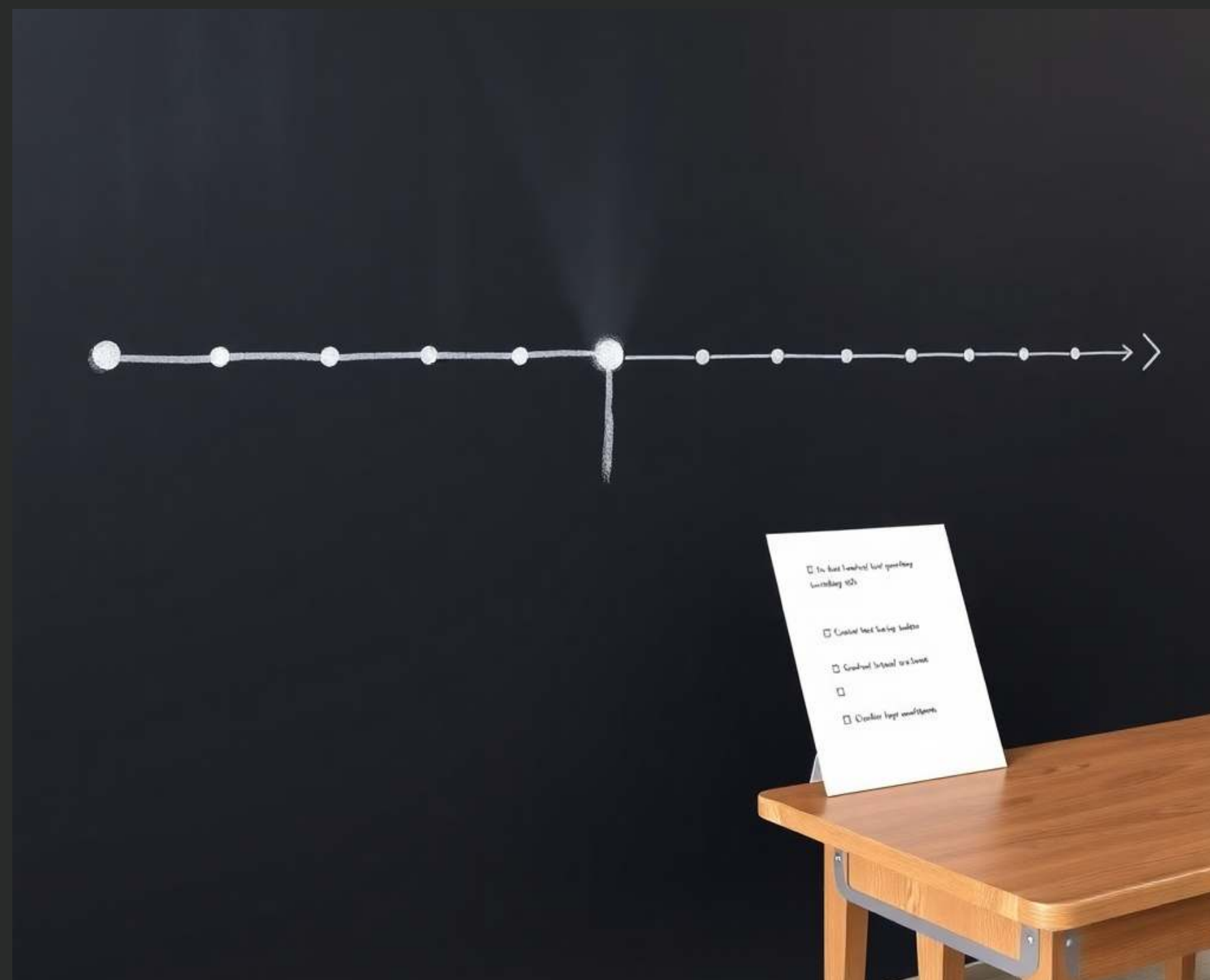
На прямой отмечают все значения, где числитель обращается в ноль, а также точки, в которых знаменатель становится равен нулю. Именно они задают границы будущих промежутков.

Разделение на части

Каждая отмеченная точка разбивает прямую на отдельные интервалы. Внутри одного интервала знак множителей остаётся постоянным, поэтому выражение ведёт себя одинаково на всём промежутке.

Проверка знака

Чтобы понять знак на интервале, достаточно взять одно удобное число из этого промежутка. Если оно подходит по условию, то весь интервал включается в ответ.



Как устроены интервалы и знаки

Интервал	Знак	В ответ?
$(-\infty; a)$	плюс	да
$(a; b)$	минус	нет
$(b; +\infty)$	плюс	да

Схема метода интервалов для выражения с двумя простыми нулями.

На каждом промежутке проверяют знаки множителей и выбирают только подходящие части прямой.

Таблица показывает, что ответ зависит не от отдельных точек, а от знака на каждом промежутке.

Алгоритм решения методом интервалов

Последовательность действий при работе с произведениями и дробями.



Нули числителя и запрещённые значения

Ноль числителя

Если в точке выражение в числителе равно нулю, эта точка может войти в ответ только при знаках $\geq$ или $\leq$. Для строгих неравенств она исключается.

1

Ноль знаменателя

Точки, где знаменатель обращается в ноль, никогда не включаются в ответ. Деление на ноль не имеет смысла, поэтому такие значения сразу вычёркивают.

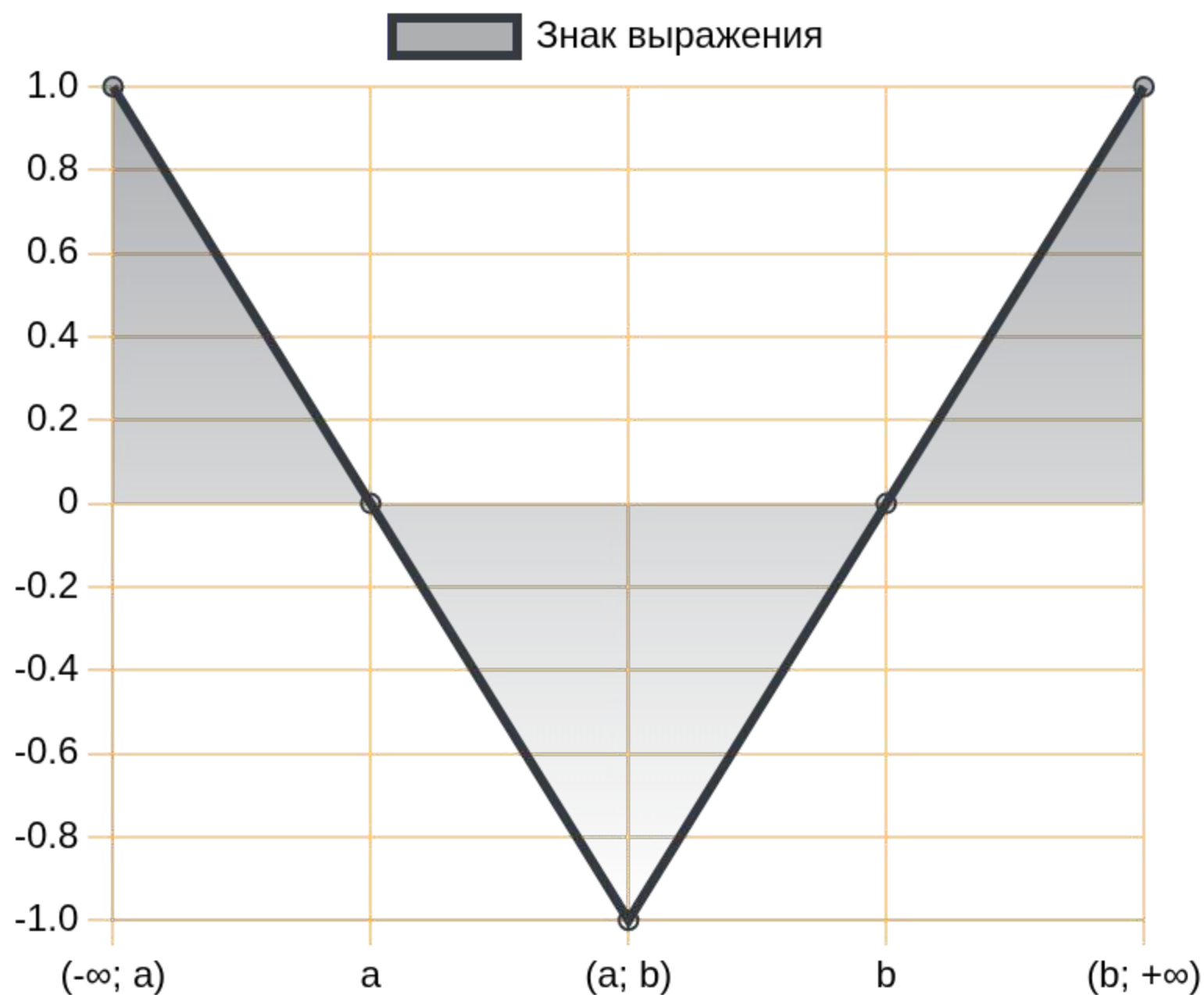
2

Границы промежутков

Эти точки разделяют числовую прямую на отдельные части и помогают правильно определить, где выражение положительно, отрицательно или равно нулю.

3

Как меняется знак на промежутках



Простой корень обычно меняет знак выражения, а корень чётной кратности может его сохранить.

Чередование знаков помогает быстро проверить решение и не пропустить ошибку в разложении.

Схематическое правило знаков для метода интервалов.

Пример: квадратное неравенство

01 Разложение

Неравенство $x^2 - 5x + 6 > 0$ сначала преобразуем: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Теперь видно, что нужно исследовать знак произведения двух линейных множителей.

02 Особые точки

Нули выражения: $x = 2$ и $x = 3$. Эти значения делят числовую прямую на три промежутка, на каждом из которых знак произведения постоянен.

03 Проверка промежутков

Подставляем удобные числа: слева от 2 произведение положительно, между 2 и 3 — отрицательно, справа от 3 снова положительно. Значит, подходят крайние промежутки.

04 Ответ

Так как неравенство строгое, точки 2 и 3 не входят в решение. Ответ: $(-\infty; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Пример: дробное неравенство

Записываем дробь

Рассматриваем неравенство $(x-1)/(x+2) \leq 0$. Здесь сразу видны две особые точки: $x=1$ и $x=-2$, и каждая из них влияет на ответ по-своему.

Запрещённая точка

Значение $x=-2$ исключается автоматически, потому что в этой точке знаменатель равен нулю. Такая точка не может попасть ни в один ответ, даже если знак подходит.

Проверяем знаки

На промежутках вычисляем знак дроби по одному удобному числу. Получается, что неположительные значения находятся только между -2 и 1 , где дробь меняет знак.

Записываем ответ

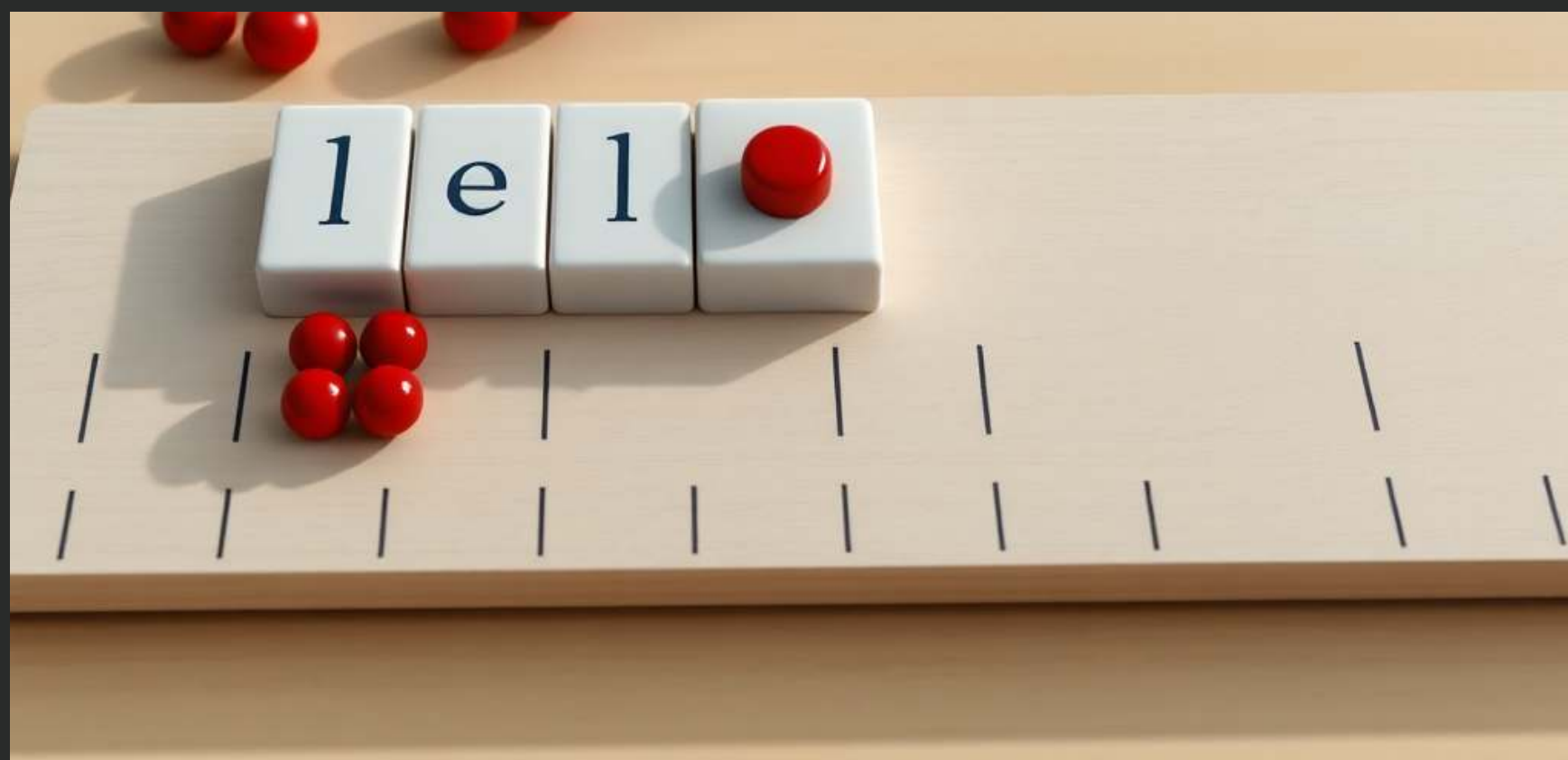
Точка 1 входит в решение, потому что при ней дробь равна нулю, а неравенство нестрогое. Итог: $(-2; 1]$.

2

типа знаков определяют, включать ли граничные точки в ответ.

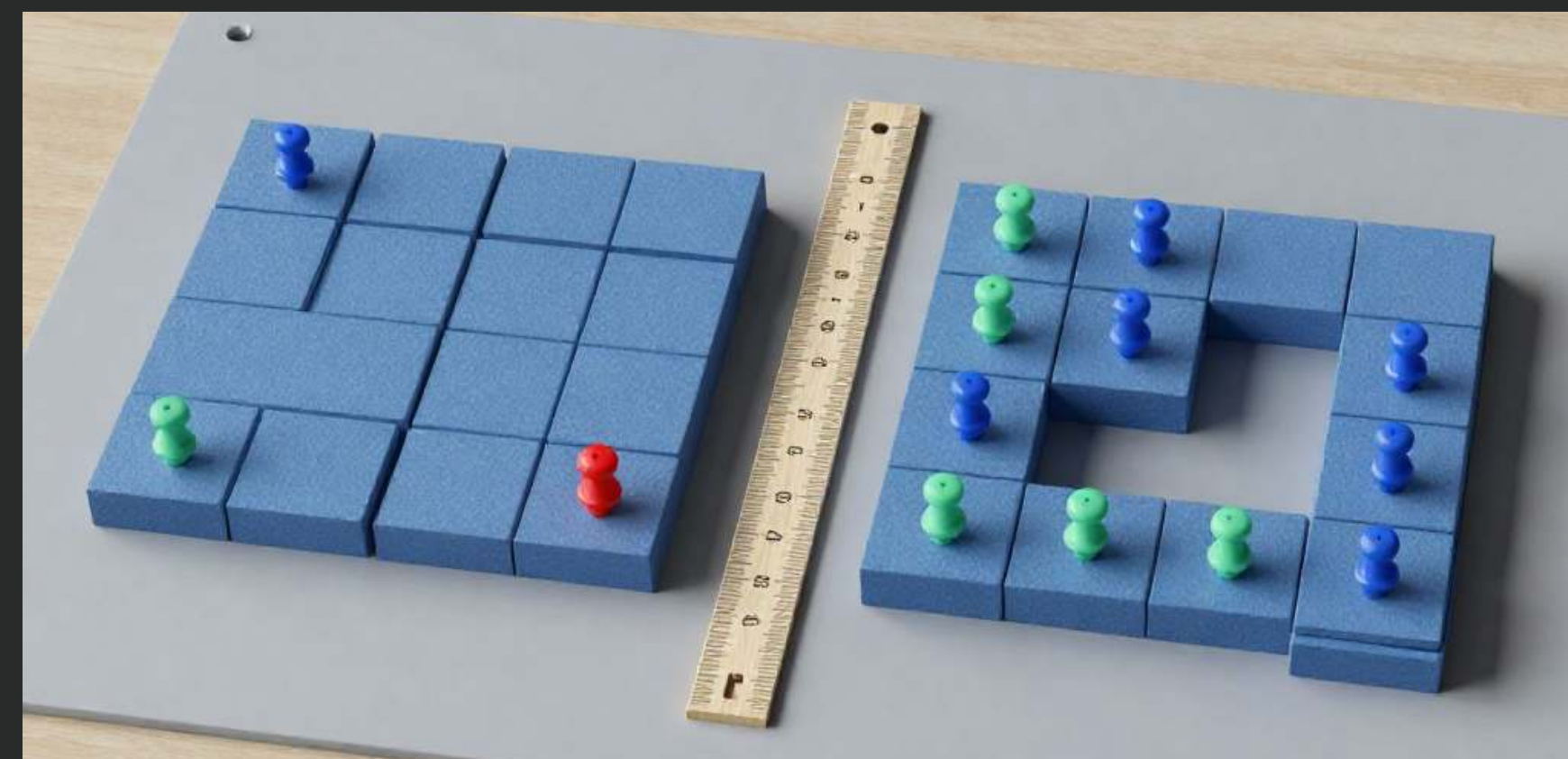
Разница между строгими и нестрогими неравенствами сразу задаёт границы решения.

Ошибки при разложении на множители



Когда теряется общий множитель

Иногда ученик видит только часть выражения и забывает вынести общий множитель за скобки. Тогда нули находятся неверно, а на числовой прямой появляются лишние интервалы. Из-за этого весь ответ строится на ошибочном разложении.



Неправильная формула меняет всё

Особенно опасна путаница в формулах сокращённого умножения. Например, вместо разности квадратов можно ошибочно написать квадрат разности и получить другие корни. На схеме это выглядит как два разных набора точек разбиения и разные ответы.

Частые ошибки и верные действия

Ошибка	Почему	Верно
Не отметить ноль знаменателя	Точка запрещена	Исключить из ответа
Проверять все точки	Лишняя работа	Взять одну точку
Игнорировать знак	Ответ не совпадёт	Учесть условие

Сопоставление типичных промахов с правильными шагами помогает быстрее проверять решение и не терять точки, которые влияют на ответ.

Основные ошибки связаны не с вычислениями, а с невниманием к особым точкам и знаку неравенства. Правильный порядок действий уменьшает риск неверного ответа.

Правила решения неравенств методом интервалов

Когда знак не меняется

Простой корень

Когда множитель встречается один раз, переход через его ноль обычно меняет знак выражения. Поэтому соседние промежутки часто оказываются с разными знаками.

Чётная степень

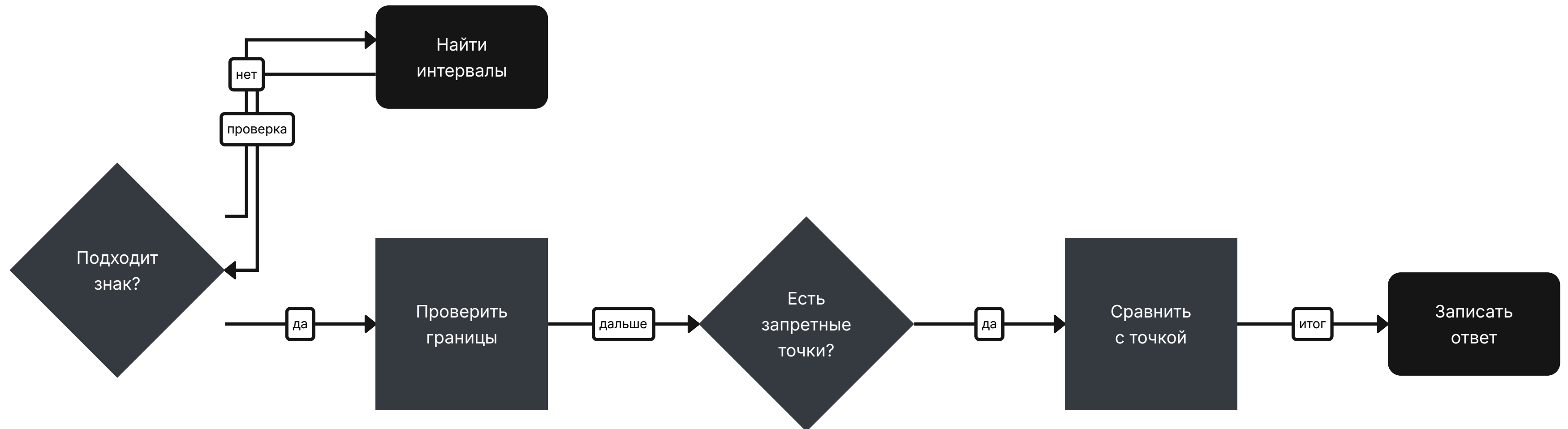
Если множитель стоит в чётной степени, выражение не меняет знак при переходе через корень. Такой корень ведёт себя как «двойная граница» на прямой.

Проверка по схеме

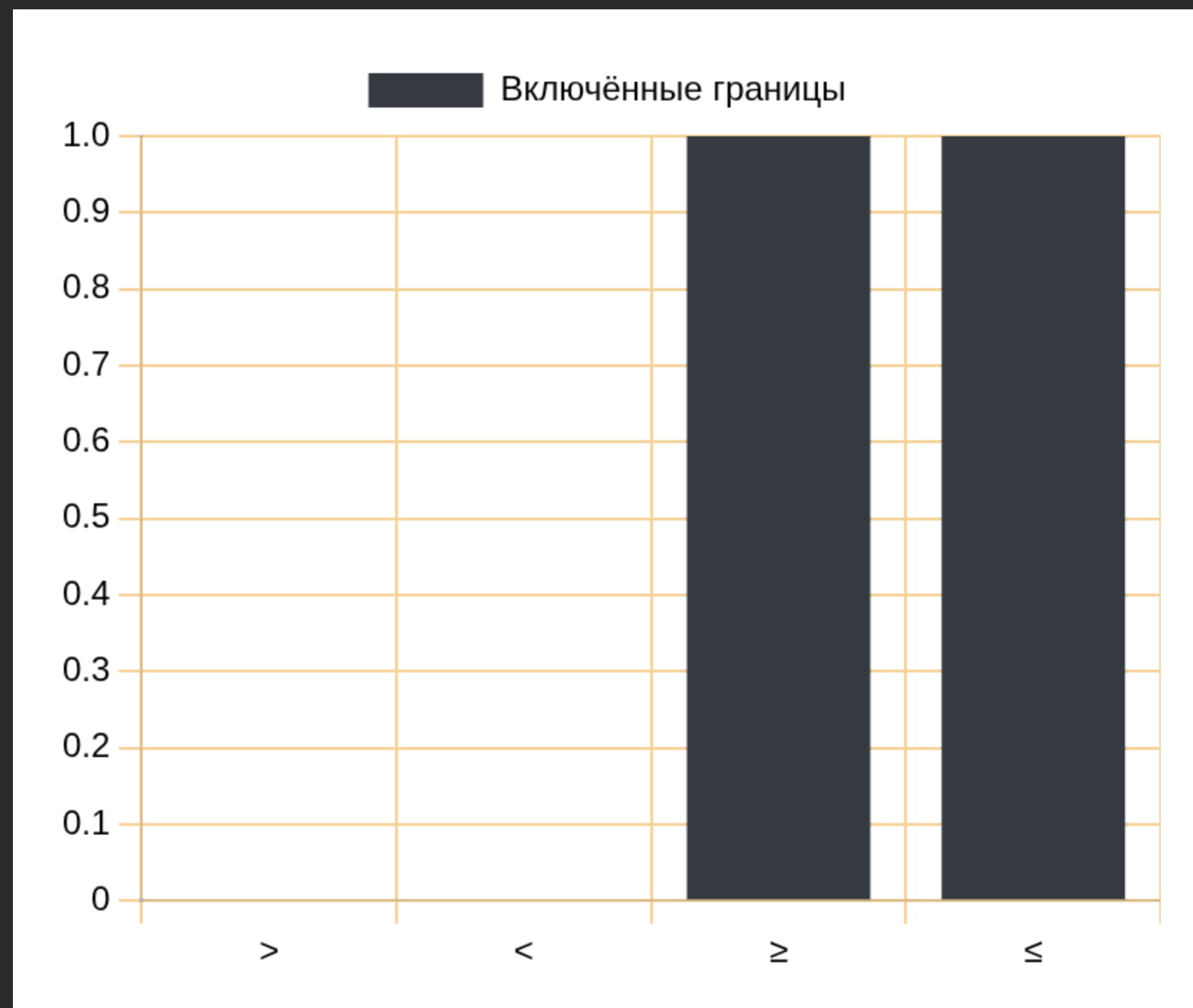
Сравнение кратности корней помогает заранее понять, где знак должен сохраниться, а где — смениться. Это ускоряет проверку решения и делает запись ответа надёжнее.

Проверка полученного ответа

Последовательность шагов показывает, как убедиться, что найденные интервалы действительно подходят под условие неравенства.



Как знак неравенства влияет на ответ



Один и тот же пример может дать разные множества решений: строгие знаки отсекают нули, а нестрогие допускают их, если нет деления на ноль.

Знак неравенства определяет, какие границы остаются в ответе. Поэтому после анализа знаков всегда нужно отдельно проверять нули числителя и знаменателя.

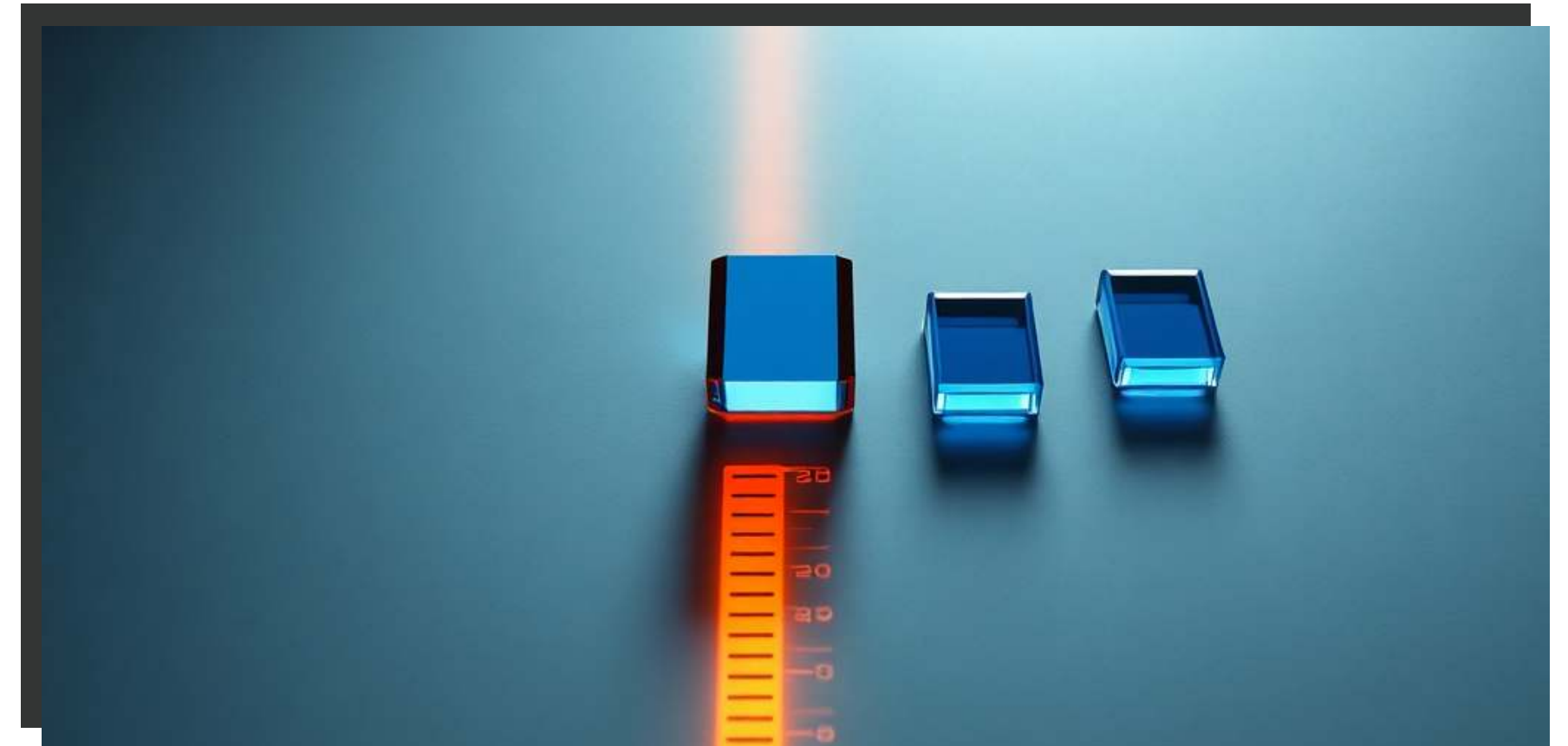
Иллюстративная схема по правилам включения границ

Геометрический смысл ответа



Ответ как участок прямой

Решение неравенства удобно видеть на координатной прямой: подходящие числа образуют один или несколько промежутков. Закрашенные точки показывают включённые границы, а пустые — значения, которые исключены из ответа. Такая запись сразу делает результат наглядным.



Почему это удобно

Когда ответ записан как лучи и отрезки, легко увидеть, где выражение положительно, а где отрицательно. Это особенно полезно в задачах с несколькими корнями, потому что промежутки можно сравнить без длинных вычислений.

Где применяется метод интервалов

Квадратные неравенства

Метод помогает быстро решать неравенства, которые после разложения превращаются в произведение множителей. Он особенно полезен там, где нужно определить, на каких промежутках выражение положительно или отрицательно.

Дробные выражения

Если в неравенстве есть дробь, метод интервалов позволяет отдельно учесть нули числителя и запрещённые значения знаменателя. Это делает ответ точным и исключает деление на ноль.

Допустимые значения

Способ используют для поиска тех значений переменной, при которых выражение имеет смысл. Это важно в заданиях, где нельзя подставлять любые числа из-за ограничений в знаменателе или подкоренном выражении.

Проверка знака

Метод удобен, когда нужно понять, где выражение больше нуля или меньше нуля. Он опирается на числовую прямую и помогает выбрать только те промежутки, которые подходят по условию.

Краткая памятка по решению

1. Привести к одной части

Перенесите все слагаемые в одну сторону, чтобы неравенство стало удобным для дальнейшего разложения и анализа.

2. Разложить на множители

Представьте выражение в виде произведения или дроби. Так проще найти нули и особые точки.

3. Найти особые точки

Определите нули числителя и знаменателя, затем отметьте их на числовой прямой как границы промежутков.

4. Проверить знаки

Возьмите по одной удобной точке в каждом интервале и выясните знак выражения на всём промежутке.

5. Записать ответ

Выберите только подходящие промежутки, исключите запрещённые значения и оформите результат в виде объединения интервалов.

Метод интервалов: точный и удобный

Метод интервалов превращает неравенство в понятную работу с корнями, знаками и промежутками. Если аккуратно разложить выражение, отметить особые точки и выбрать нужные интервалы, ответ получится быстро и без лишних ошибок.