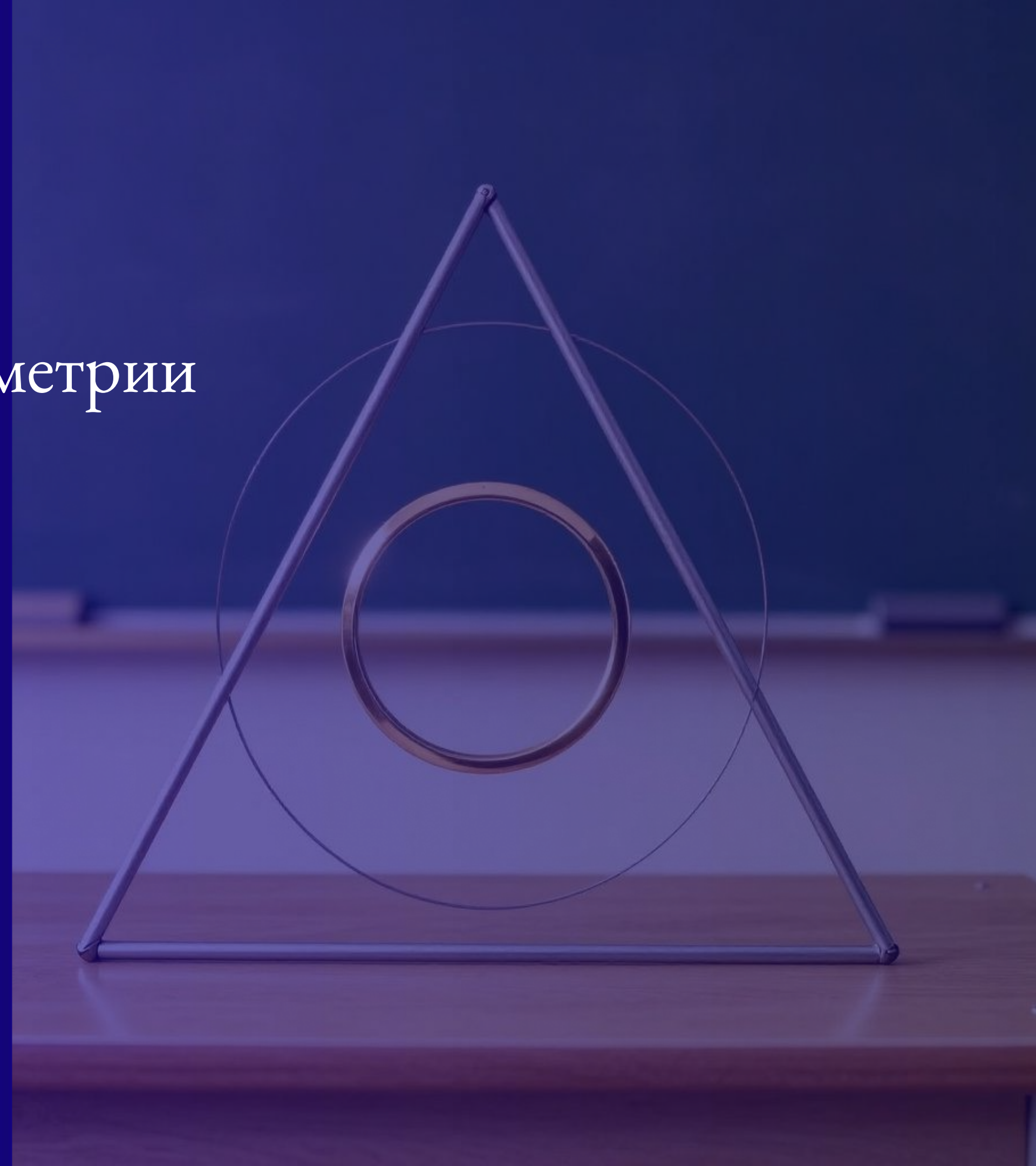


Вписанные и описанные окружности

Разберём, как окружности связаны с треугольником:
центр, радиус, касания и построения.

Зачем это нужно в школьной геометрии

Вписанная и описанная окружности связывают стороны и углы треугольника с точными построениями. В решениях используются биссектрисы, серединные перпендикуляры, радиусы и перпендикулярность; тема встречается в учебниках и задачах ОГЭ.



Что такое вписанная окружность

Вписанная окружность лежит внутри многоугольника и касается всех его сторон. Для треугольника она существует всегда и единственна — это важный факт для дальнейших построений.

Центр вписанной окружности называют инцентром. Он расположен так, что расстояние от него до каждой стороны одинаковое — значит, точки касания находятся «на равной глубине».

Именно равенство расстояний помогает решать задачи на доказательство: если доказываем равенство расстояний до сторон, получаем существование вписанной окружности.

Инцентр — центр вписанной окружности

Инцентр — это точка пересечения биссектрис треугольника. Биссектриса делит угол пополам, а значит, инцентр одинаково «видит» наклон сторон.

От инцентра до всех трёх сторон проведены перпендикуляры, и их длины равны. Эти перпендикуляры — основа понимания радиуса вписанной окружности.

Длина такого перпендикуляра от инцентра до стороны и есть радиус вписанной окружности. Поэтому инцентр удобно находить через построение биссектрис.

Построение вписанной окружности: шаги

Пошаговый алгоритм опирается на биссектрисы и перпендикуляр к стороне.

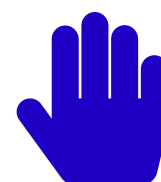


Свойства вписанной окружности



Радиус перпендикулярен стороне

От центра вписанной окружности к точке касания можно провести радиус. Он образует прямой угол с той стороной треугольника, к которой окружность касается.



Касательные из вершины

Из любой вершины к окружности можно провести две касательные. Их длины равны, поэтому в задачах на измерения и доказательства часто используют равенство этих отрезков.



Инцентр внутри треугольника

В любом треугольнике инцентр лежит внутри фигуры. Это верно и для остроугольного, и для прямоугольного, и для тупоугольного треугольника.

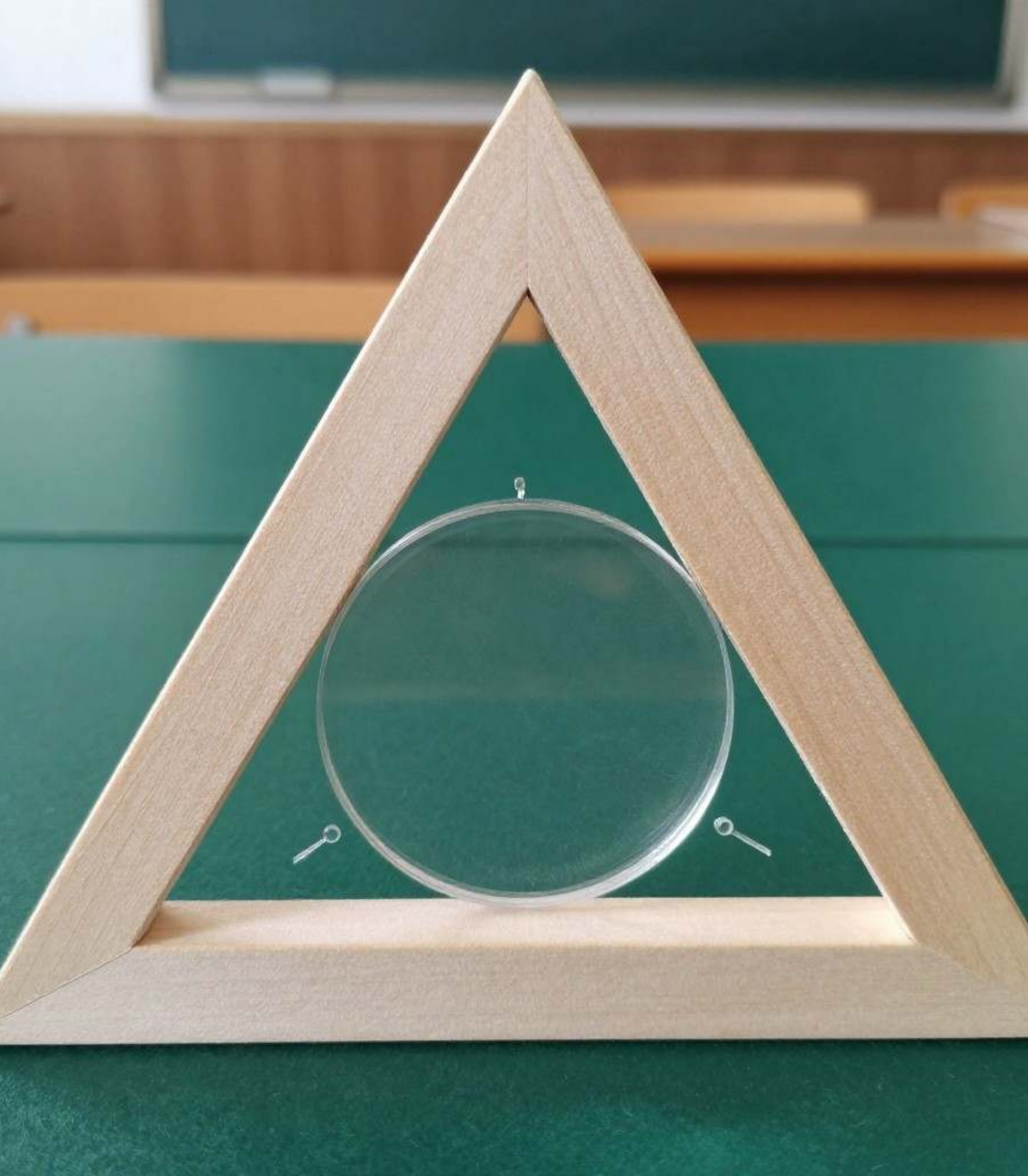
Когда вписанная окружность возможна

Фигура	Вписанная окружность
Треугольник	Есть всегда
Правильный многоугольник	Есть всегда
Четырёхугольник	Не у всех
Произвольный многоугольник	Может отсутствовать

Сравнение типов фигур по наличию вписанной окружности и ключевым условиям.

Наличие вписанной окружности связано с тем, что до всех сторон можно сохранить одинаковое расстояние и провести касательные ко всем сторонам.

Школьный курс геометрии (обобщённые признаки из учебных тем о касательных и равноудалённости).



Вписанная окружность в равнобедренном треугольнике

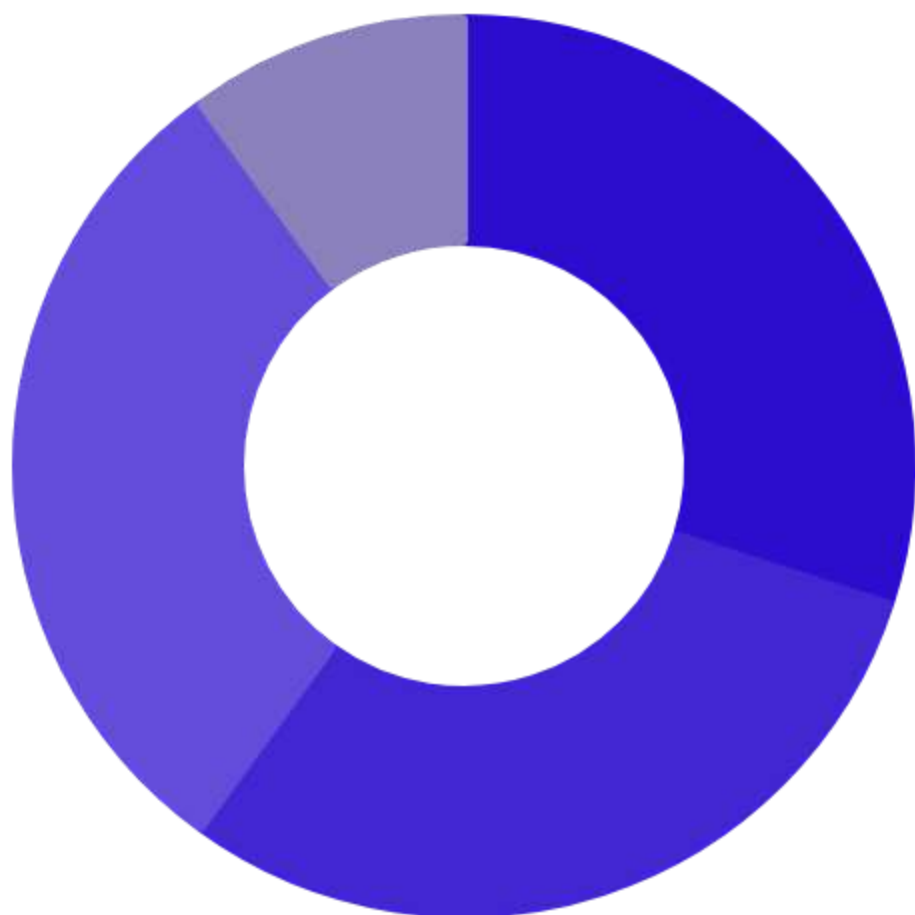
Симметрия помогает инцентру

В равнобедренном треугольнике биссектриса из вершины одновременно является медианой и высотой. Поэтому центр вписанной окружности лежит на оси симметрии треугольника.

Равные расстояния до боковых сторон

На схеме видно, что инцентр одинаково удалён от двух боковых сторон. Кроме того, при основании углы равны, а значит, биссектрисы задают согласованное положение центра.

Элементы, связанные с инцентром



Три угловые биссектрисы пересекаются в одной точке, и именно она становится центром вписанной окружности.

Диаграмма показывает: инцентр объединяет информацию об углах и сторонах — через биссектрисы появляется единый центр касания.

Схема-сводка к теме вписанной окружности и инцентра (без числовых измерений).

Что такое описанная окружность

Описанная окружность проходит через все вершины треугольника и располагается вокруг фигуры. Для треугольника она существует всегда и единственна — по вершинам можно однозначно восстановить окружность.

Центр описанной окружности называют центром окружности. Он равноудалён от всех трёх вершин, то есть расстояния от центра до каждого угла треугольника одинаковы.

Эта связь помогает решать задачи: если удаётся доказать равенство расстояний от некоторой точки до вершин, то точка является центром описанной окружности.

Центр описанной окружности

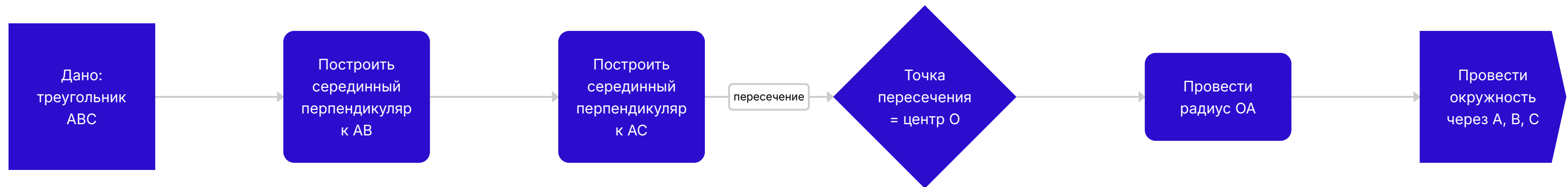
Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника: каждая точка такого перпендикуляра одинаково удалена от концов соответствующего отрезка.

Если центр найден как пересечение двух серединных перпендикуляров, он автоматически лежит и на третьем: значит, расстояния до всех вершин равны.

Радиус описанной окружности равен этому общему расстоянию от центра до любой вершины; именно поэтому окружность проходит через все три вершины треугольника.

Построение описанной окружности: от серединных перпендикуляров к центру

Шаги построения основаны на том, что любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка.



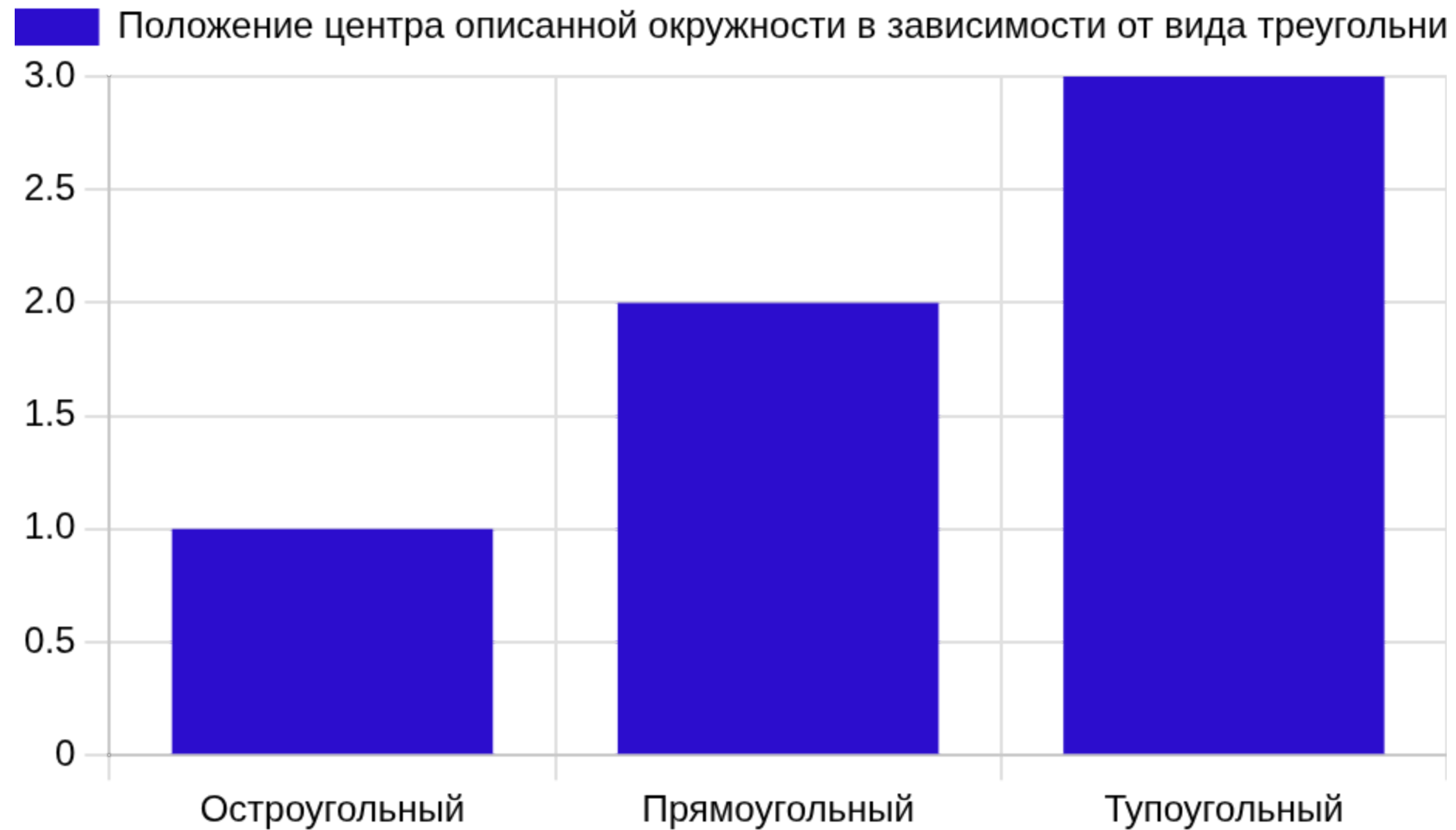
Как вид треугольника влияет на положение центра

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности расположен на середине гипотенузы: он равноудалён от вершин прямого угла и от третьей вершины.

В остроугольном треугольнике центр находится внутри фигуры, потому что все серединные перпендикуляры пересекаются «изнутри».

В тупоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит вне треугольника; при этом равенство расстояний до вершин сохраняется, просто центр оказывается снаружи.

Положение центра описанной окружности в разных треугольниках



Для запоминания достаточно помнить: центр — это пересечение серединных перпендикуляров, а их геометрическое положение меняется при смене вида треугольника.

По схеме видно: чем «больше» угол отклоняется к тупому, тем сильнее центр уходит наружу; в прямоугольном случае он оказывается ровно посередине гипотенузы.

Сводное школьное правило по положению пересечения серединных перпендикуляров (учебный материал по геометрии 7–9 классов).

Вписанная и описанная окружности: главное отличие

Сравнение ключевых признаков помогает быстро выбирать правильную окружность и центр для решения задач.

Различие в опоре (стороны против вершин) и в том, как найден центр, обычно решает, какую конструкцию применять в задаче.

Признак	Вписанная окружность	Описанная окружность
Касание/прохождение	Касается сторон	Проходит через вершины
Связь центра	С биссектрисами	С серединными перпендикулярами
Радиус	До стороны (по перпендикуляру)	До вершины
Расположение	Всегда внутри треугольника	Может быть внутри или вне

Задачи, где используются обе окружности

В заданиях на окружности часто находят неизвестные углы, стороны и радиусы; при этом используют равенство расстояний от центра до соответствующих объектов.

Для вписанной окружности ключевы биссектрисы и перпендикулярность радиуса к точке касания стороне треугольника.

Для описанной окружности важны серединные перпендикуляры и факт, что центр равноудалён от всех вершин, а значит окружность проходит через каждую из них.

Обычно решения строятся как цепочка: сначала находят центр или доказывают равенство отрезков, затем применяют свойства касательной/радиуса либо равенства расстояний до вершин.

Вписанные и описанные окружности в окружающих предметах

Кнопка-мишень и точность окружностей

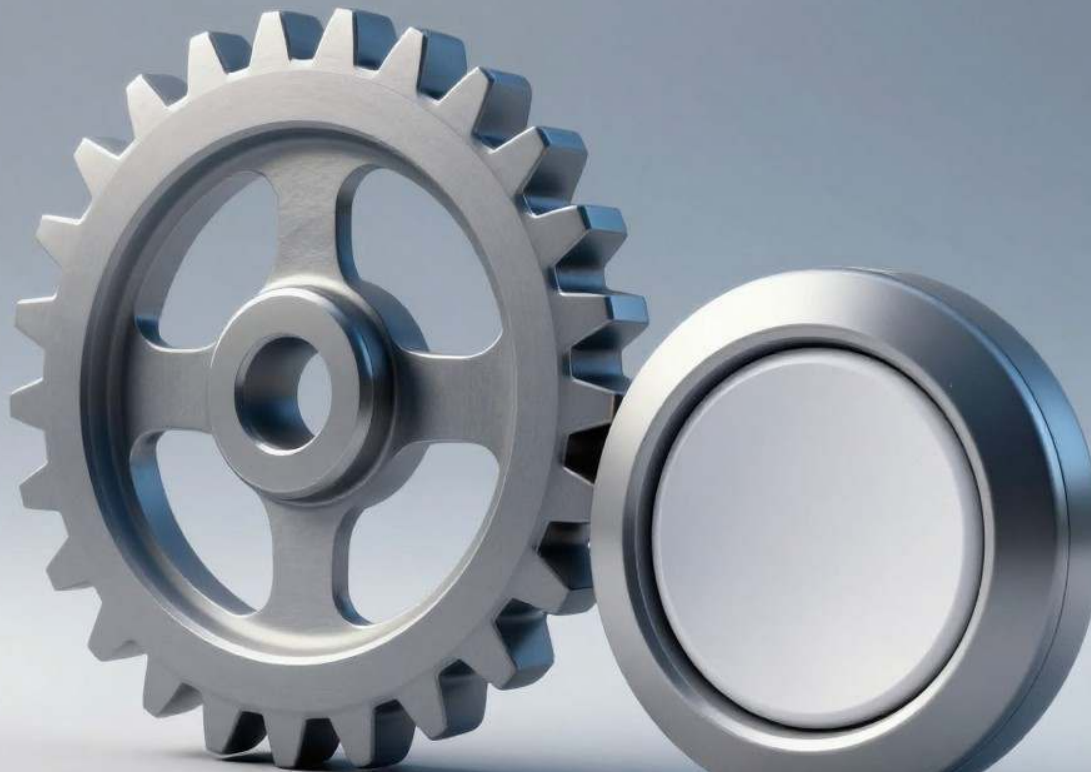
Мишень часто выглядит как набор кругов внутри рамки или на плоскости. Внутренние «кольца» напоминают идею касания и равных расстояний до сторон, а внешний обод — окружность, охватывающую фигуру снаружи. На рисунке легко подчеркнуть геометрическую связь с треугольником-основой.

Шестерёнки и колёса: окружности «рядом с рамкой»

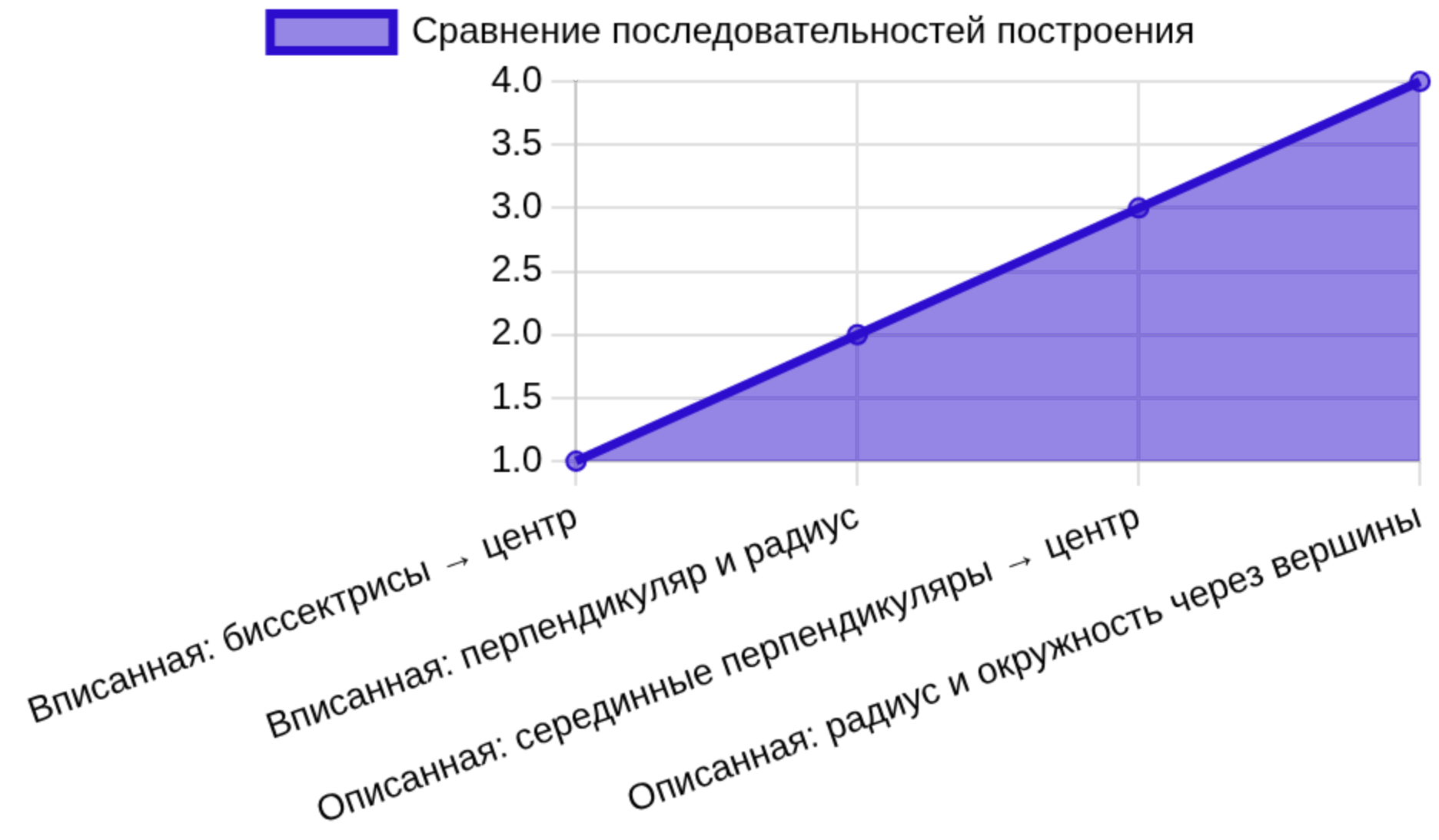
У колеса и шестерёнки заметно, как один круг задаёт положение центра, а другой — границу, через которую «проходят» элементы формы. Если представить, что внутрь вписывается фигура, становится понятнее, почему вписанная окружность связана со сторонами, а описанная — с вершинами.

Циферблаты и дорожные знаки с «внешней» окружностью

Круглые циферблаты и дорожные знаки задают наружную границу формы, которая как бы описывает объект вокруг. Если мысленно выделить треугольник внутри, можно показать: центр описанной окружности определяется по равенству расстояний до вершин.



Сравнение шагов построения двух окружностей



В обоих случаях сначала находим центр, но опорные линии разные: для вписанной — биссектрисы и перпендикуляр к стороне, для описанной — серединные перпендикуляры.

Диаграмма подчеркивает главную мысль: в задаче нужно понять, «что задано опорой» — стороны или вершины — и выбрать соответствующий путь построения.

Сравнение школьных алгоритмов построения (вписанная и описанная окружности треугольника).

Типичные ошибки в задачах на окружности

Частая ошибка — путать биссектрису с медианой. Напоминание: биссектриса делит угол, а медиана — отрезок между вершиной и серединой противоположной стороны.

Другая ошибка — считать, что любой центр треугольника подходит для описанной или вписанной окружности. Центр определяется строго пересечением соответствующих линий: биссектрис или серединных перпендикуляров.

При работе с вписанной окружностью забывают про перпендикулярность: радиус к точке касания всегда образует прямой угол со стороной.

Также важно не перепутать положение центра описанной окружности для тупоугольного треугольника и не строить окружность без проверки, что центр найден по двум независимым перпендикулярам.

Главная мысль темы

Вписанная окружность связывает стороны треугольника, точки касания и инцентр, а описанная — вершины, серединные перпендикуляры и центр, равноудалённый от всех вершин. Обе окружности помогают решать задачи увереннее.