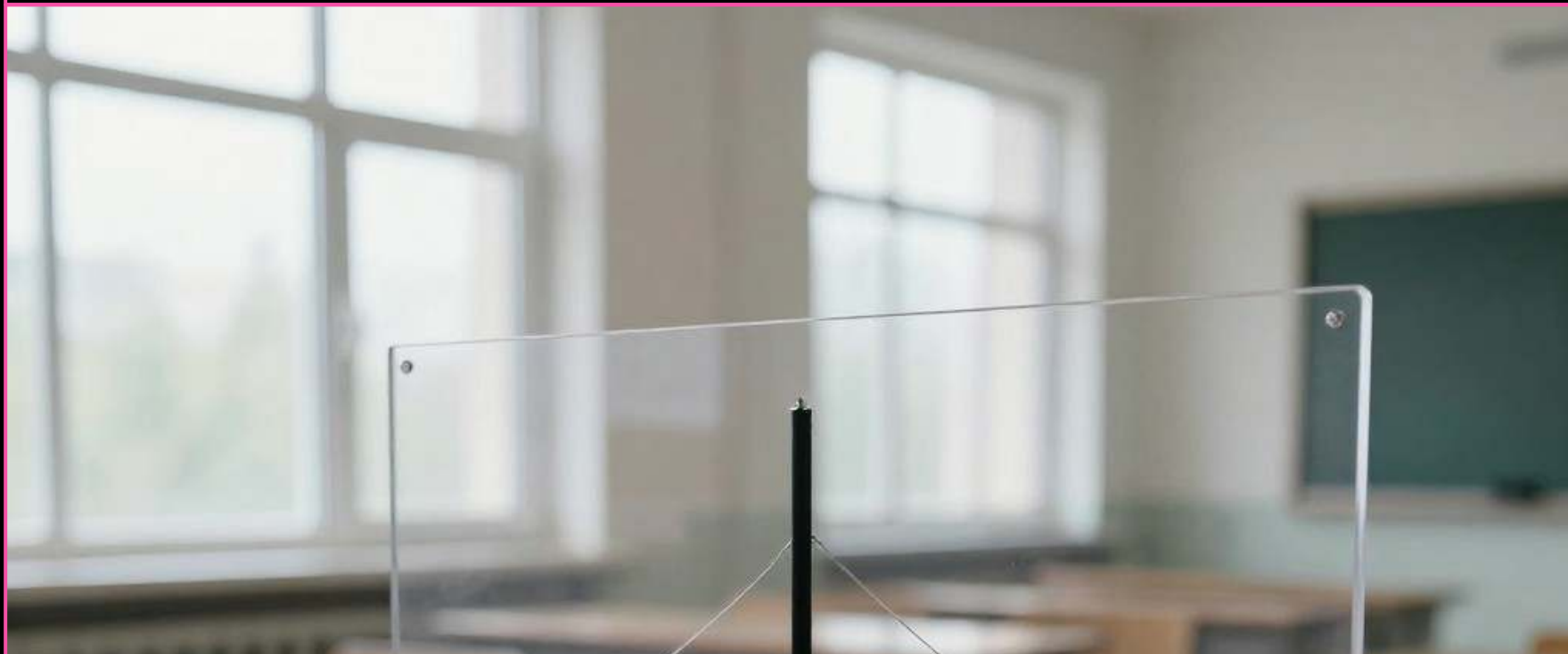


ГРАФИК ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ



Дробно-линейная функция: как увидеть гиперболу по формуле



ЗАЧЕМ ИЗУЧАТЬ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ В 10 КЛАССЕ

Эти функции показывают, как простая формула может задавать график с разрывом, асимптотами и двумя ветвями. Они развивают умение читать уравнение, находить ограничения и понимать поведение зависимости без полного построения по точкам.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНО- ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Общий вид

Дробно-линейная функция задаётся отношением двух линейных выражений: $y = (ax+b)/(cx+d)$. Коэффициенты a , b , c и d – действительные числа, а знаменатель определяет особые точки графика.

Условие на знаменатель

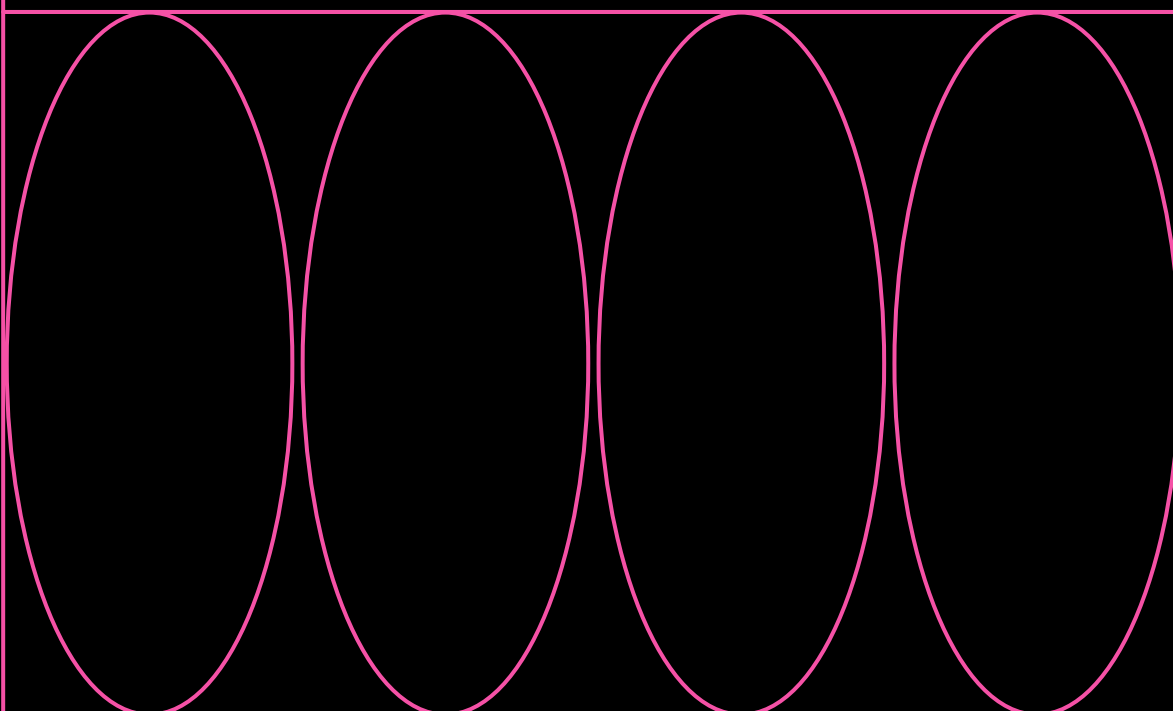
При $c \neq 0$ выражение $cx+d$ может обратиться в ноль при $x = -d/c$. В этой точке функция не определена, поэтому значение $x = -d/c$ считают исключённым из области определения.

Почему это важно

Именно наличие знаменателя отличает такие функции от обычных линейных зависимостей. Из-за него график может иметь разрыв и распадаться на две ветви, расположенные по разные стороны от запрещённого значения.

Школьная терминология

В задачах 10 класса исключённое значение часто называют запрещённым. Это удобный ориентир: оно сразу показывает, где на графике нельзя ставить точку и где проходит разрыв функции.





ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РАЗРЫВ ГРАФИКА

ШАГ 1 — ИСКЛЮЧЁННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Сначала находят значение x , при котором знаменатель обращается в ноль: $x = -d/c$. Все остальные действительные числа входят в область определения функции.

01

ШАГ 2 — СМЫСЛ РАЗРЫВА

В точке, где знаменатель равен нулю, функция не имеет значения, поэтому график не может проходить через неё. На рисунке это выглядит как разрыв между двумя ветвями гиперболы.

02

ШАГ 3 — ПРИМЕР

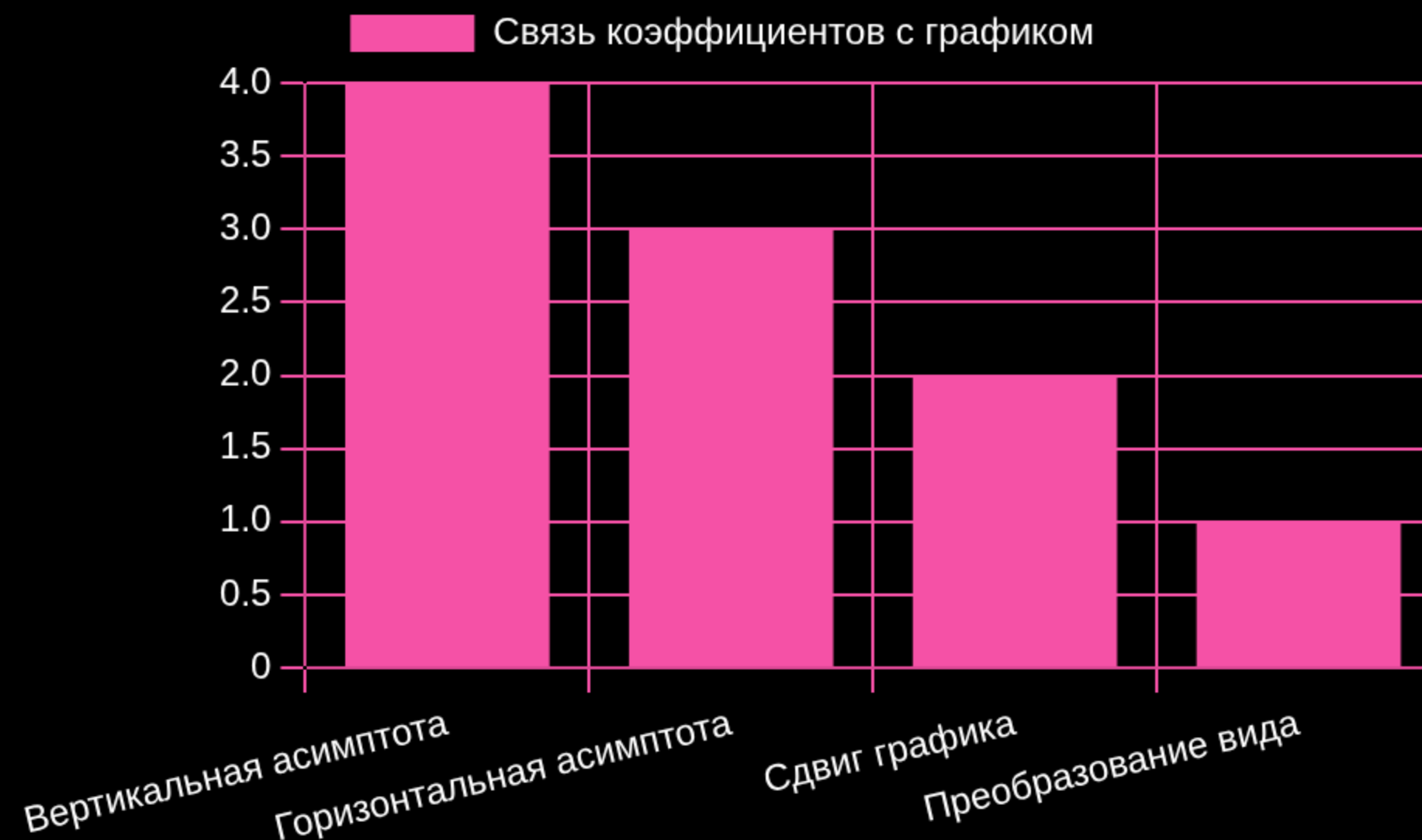
Для функции $y = (2x+3)/(x-1)$ запрещено значение $x=1$. Следовательно, область определения записывается как $x \neq 1$, а график распадается на две части по обе стороны от этой прямой.

03

КАК КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЛИЯЮТ НА ГРАФИК

Схема показывает неравномерность влияния параметров: одни задают асимптоты напрямую, другие отвечают за сдвиги и общий вид ветвей. Это помогает быстрее читать уравнение без полного построения.

Наиболее прямо положение графика определяют c и d , затем отношение a/c . Остальные коэффициенты уточняют сдвиг и форму ветвей.



АСИМПТОТЫ КАК ОРИЕНТИР ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ

ВЕРТИКАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

Её находят из уравнения $cx+d=0$. Получается прямая $x=-d/c$, к которой ветви графика стремятся при приближении аргумента к запрещённому значению.

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

Поскольку числитель и знаменатель имеют одинаковую степень, отношение старших коэффициентов задаёт горизонтальную асимптоту $y=a/c$. Она показывает предельное значение функции при больших по модулю x .

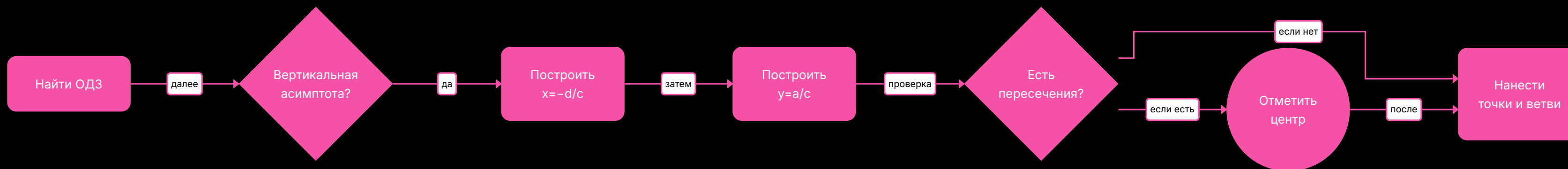
КАК ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПРИ ПОСТРОЕНИИ

Асимптоты служат каркасом рисунка: сначала проводят две направляющие прямые, а затем размещают ветви гиперболы так, чтобы они приближались к ним, но не пересекали в бесконечности.

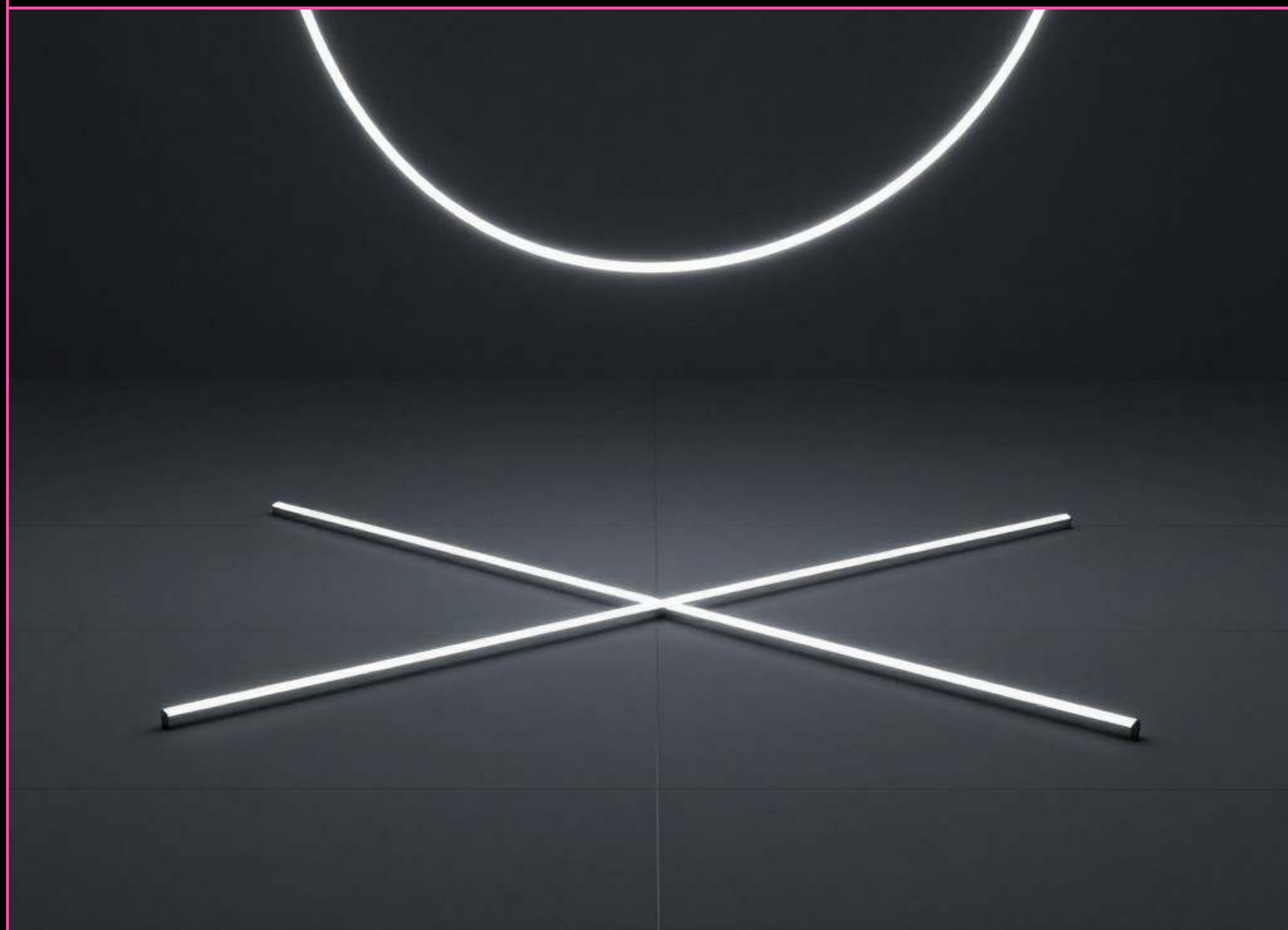


АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Последовательность действий при анализе функции по формуле



БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ: ГРАФИК $y=1/x$



Две ветви

График $y=1/x$ состоит из двух ветвей, расположенных в I и III четвертях. Он наглядно показывает, как функция ведёт себя по разные стороны от нуля.

Оси как асимптоты

Для этой функции асимптотами служат оси координат: $x=0$ и $y=0$. Они образуют базовый ориентир, к которому стремится график, не касаясь его в пределе.

Модель для преобразований

Именно от графика $y=1/x$ удобно переходить к общему виду дробно-линейных функций. Сдвиги, растяжения и отражения меняют расположение ветвей, но сохраняют их гиперболический характер.

ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

ВЫДЕЛИТЬ СДВИГ

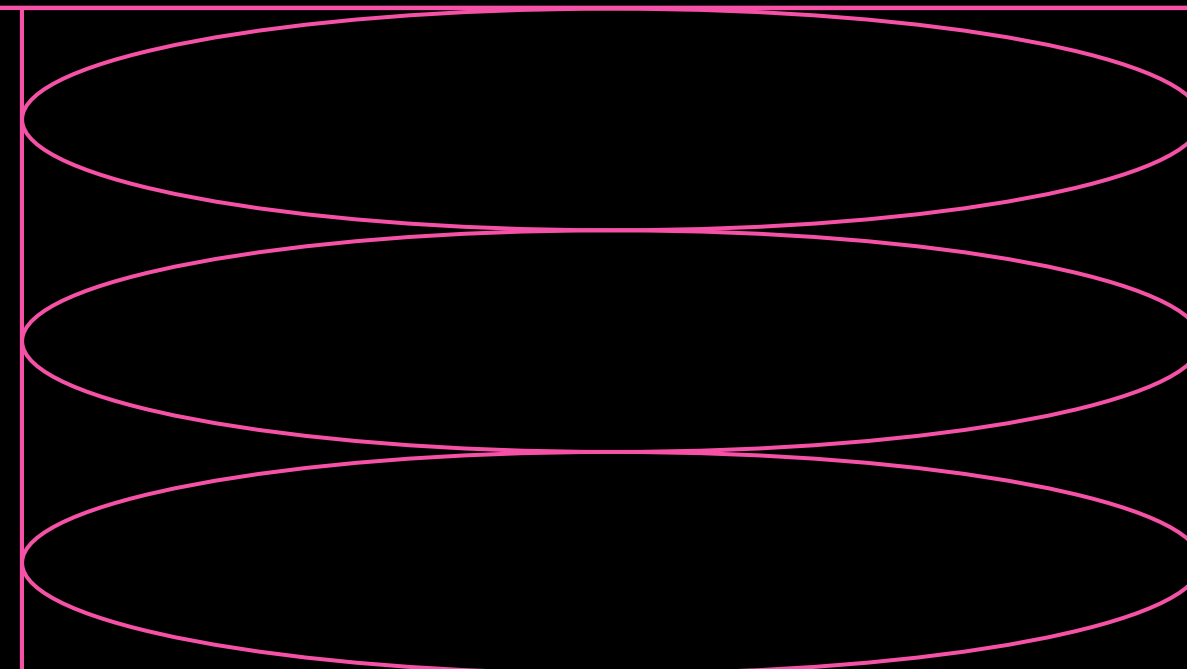
Любую дробно-линейную функцию при $c \neq 0$ можно преобразовать так, чтобы в знаменателе остался выраженный сдвиг по оси x . Это сразу делает видимой вертикальную асимптоту.

01

ЗАПИСАТЬ СТАНДАРТНУЮ ФОРМУ

Удобная запись имеет вид $y = k / (x - p) + q$. В ней параметры p и q показывают положение асимптот, а коэффициент k отвечает за масштаб и расположение ветвей относительно них.

02



УПРОСТИТЬ АНАЛИЗ

Канонический вид позволяет быстро читать свойства графика без длинных вычислений. Достаточно посмотреть на p , q и k , чтобы восстановить основную геометрию гиперболы.

03



ПАРАМЕТРЫ КАНОНИЧЕСКОГО ВИДА И ИХ СМЫСЛ

Канонический вид позволяет сразу увидеть положение асимптот и характер ветвей.

Параметры канонической формы напрямую связаны с ключевыми элементами графика, поэтому по записи функции можно быстро восстановить её вид.

Параметр	Смысл	Что задаёт
p	смещение по x	$x=p$
q	смещение по y	$y=q$
k	масштаб ветвей	их расположение

У ГИПЕРБОЛЫ ОДНА ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТОЧКА СИММЕТРИИ: ЧЕРЕЗ НЕЕ УДОБНО СВЕРЯТЬ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕТВЕЙ И АСИМПТОТ.

1

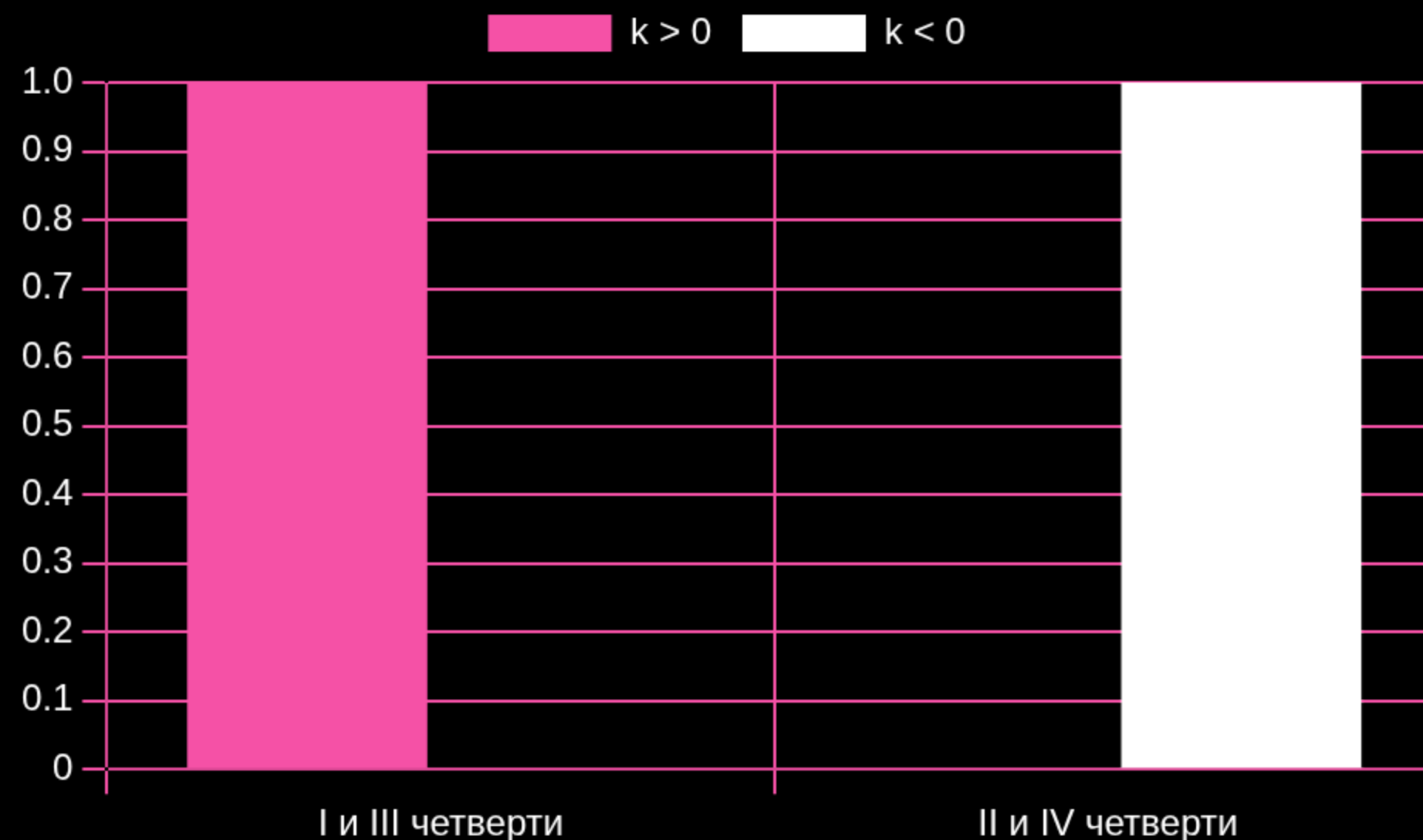
точка является центром симметрии графика и помогает проверить, правильно ли построены обе ветви.

Школьный курс алгебры 10 класса;
формула $y = k/(x-p) + q$

ЗНАК КОЭФФИЦИЕНТА k И РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕТВЕЙ

Знак коэффициента меняет не асимптоты, а только то, по какую сторону от них лежат ветви.

Положительный k дает одну ориентацию гиперболы, отрицательный – противоположную; это быстрый признак при построении.



ПЕРЕСЕЧЕНИЯ С ОСЯМИ КООРДИНАТ

НУЛЬ ФУНКЦИИ

Чтобы найти пересечение с осью Ox , приравнивают числитель к нулю и обязательно проверяют, не обращается ли при этом знаменатель в ноль.

01

ТОЧКА НА ОСИ Oy

Пересечение с осью Oy ищут при $x=0$: если это значение допустимо, подставляют его в формулу и получают координаты точки графика.

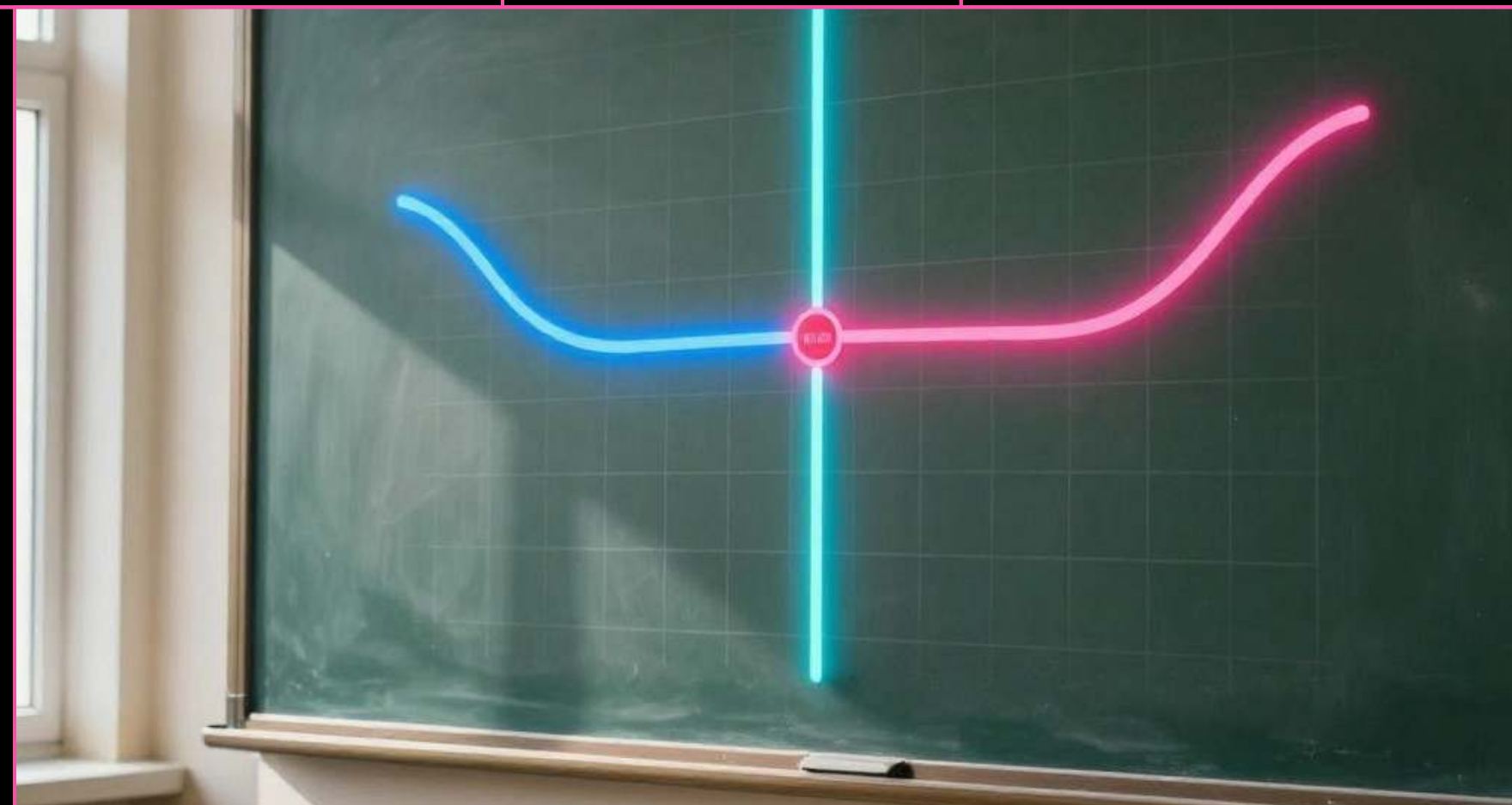
02

ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТА

Если найденная точка не принадлежит области определения, пересечение отсутствует. Такая проверка защищает от ошибок и помогает точнее построить эскиз.

03

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ РАБОТЕ С ГРАФΙΚОМ



ПУТАЮТ РАЗНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Нуль функции – это значение аргумента, при котором $y=0$, а запрещенное значение связано с обращением знаменателя в ноль. Эти понятия нельзя смешивать.

НЕВЕРНО НАХОДЯТ АСИМПТОТЫ

Ошибка в коэффициентах ведет к неправильным прямым-ориентирам. В итоге график выглядит правдоподобно, но не соответствует уравнению и его свойствам.

ИГНОРИРУЮТ ЗНАК k

Если не учитывать знак коэффициента k , ветви могут оказаться по неверную сторону от асимптот. Это одна из самых частых причин неправильного чертежа.

ПРОВОДЯТ ГРАФΙΚ ЧЕРЕЗ РАЗРЫВ

Точка разрыва не принадлежит графику, поэтому нельзя соединять ветви через вертикальную асимптоту. На эскизе это должно быть хорошо видно.

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = (2x+1)/(x-3)$

По таблице видно, что основные свойства функции можно получить сразу из формулы, не строя длинную таблицу значений.

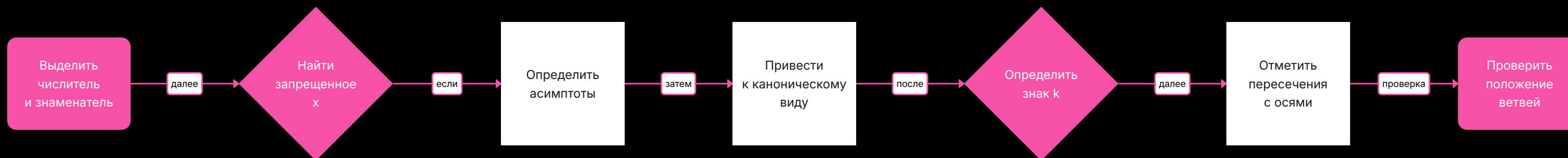
Формула сразу дает область определения, асимптоты и опорные точки; это ускоряет построение и уменьшает риск ошибок.

Характеристика	Значение
Область определения	$x \neq 3$
Вертикальная асимптота	$x = 3$
Горизонтальная асимптота	$y = 2$
Ноль функции	$x = -\frac{1}{2}$
Пересечение с Oy	$(0, -1/3)$

Вычисления по правилам преобразования дробно-рациональных выражений

КАК РАСПОЗНАТЬ ГРАФИК ПО УРАВНЕНИЮ

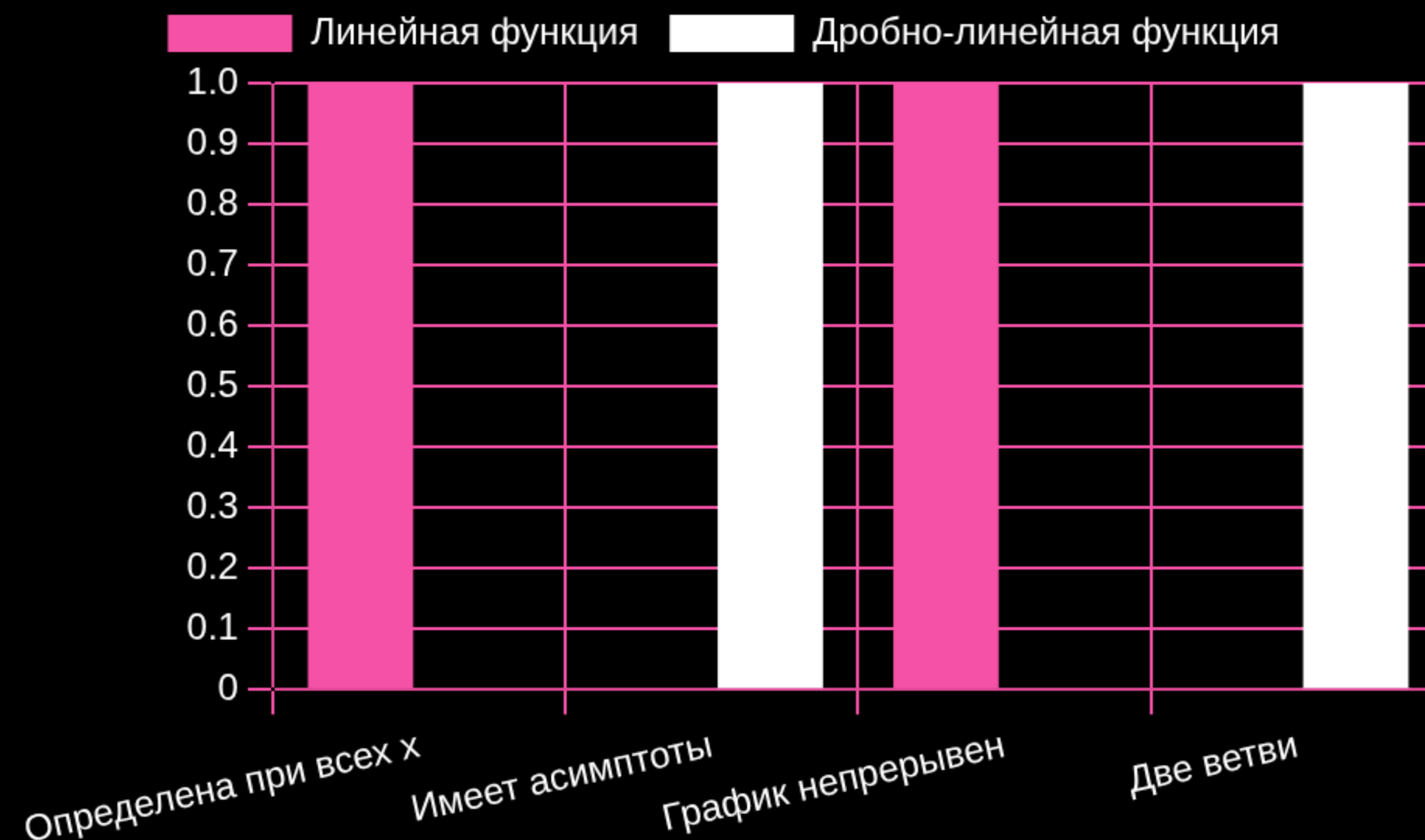
Последовательность действий при анализе дробно-линейной функции



СРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЙ

Наличие знаменателя меняет не только вид графика, но и способ его анализа: появляются разрыв, асимптоты и ограничение области определения.

Дробно-линейная функция существенно сложнее линейной: она требует учета разрыва и асимптот, а не только наклона прямой.



ГДЕ ВСТРЕЧАЮТСЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ



СКОРОСТЬ И ВРЕМЯ

Такие зависимости помогают описывать ситуации, где одна величина изменяется обратно по отношению к другой, но с учетом постоянного сдвига или ограничения диапазона.



РАСТВОРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ

В задачах на смеси и растворы дробно-линейная форма появляется, когда итоговая концентрация зависит от отношения величин и не может принимать любые значения.



ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ

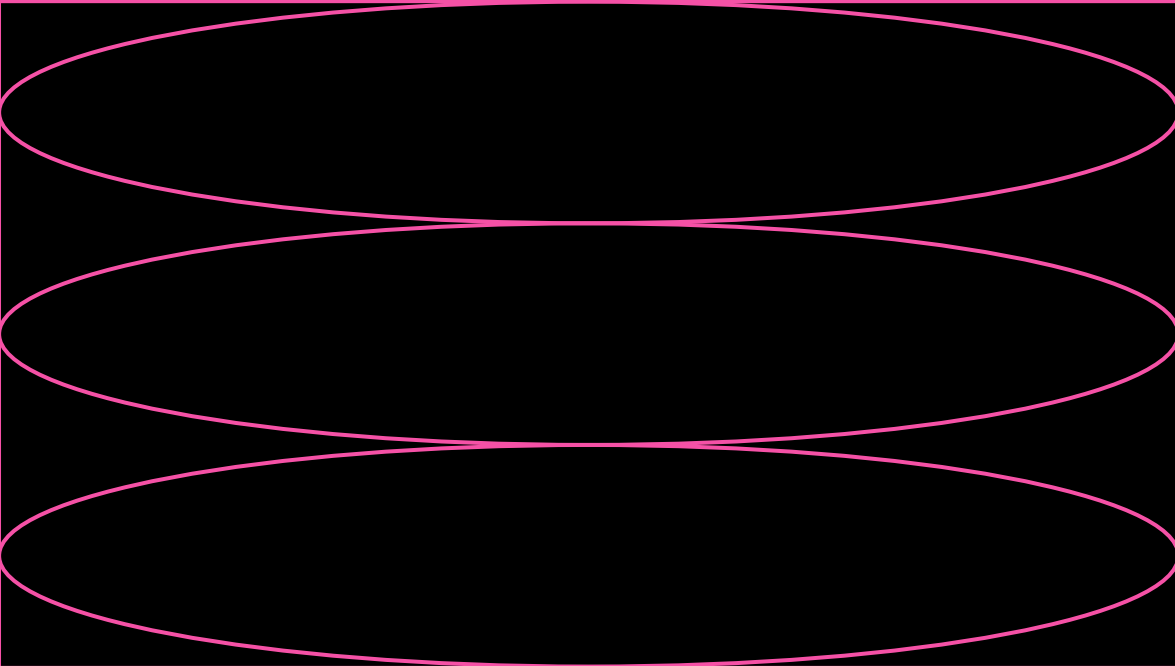
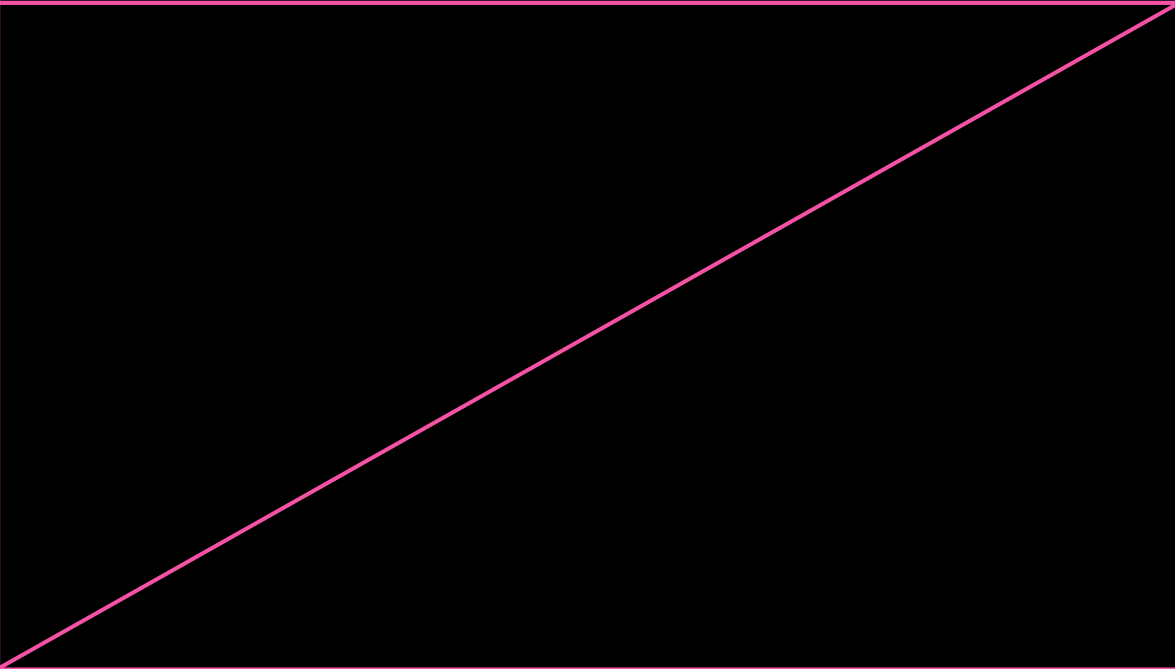
При анализе работы механизмов и процессов иногда нужно учитывать предельный эффект: значение функции приближается к границе, но не достигает ее.



ОГРАНИЧЕННЫЕ МОДЕЛИ

В прикладных ситуациях дробно-линейный график удобно показывает разрыв и асимптоту, если модель не определена при некотором значении аргумента.

ПРИЗНАКИ ПРАВИЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА

АСИМПТОТЫ ПОДПИСАНЫ На чертеже должны быть четко отмечены вертикальная и горизонтальная асимптоты. Они задают границы, к которым ветви приближаются, но не пересекают их в точке разрыва. 01	ЦЕНТР СИММЕТРИИ НАЙДЕН Если график записан в каноническом виде, точка (p, q) должна быть указана как центр симметрии. Она помогает проверить взаимное расположение двух ветвей. 02	
	ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОВЕРЕНЫ Ноль функции и точка пересечения с осью Oy должны соответствовать формуле и области определения. Если $x=0$ запрещен, пересечение с Oy отсутствует. 03	ВЕТВИ РАСПОЛОЖЕНЫ ВЕРНО Расположение ветвей должно согласоваться со знаком k: при одной ориентации они лежат по одну пару сторон от асимптот, при другой – по противоположную. 04

ГРАФИК, КОТОРЫЙ МОЖНО ЧИТАТЬ ПО ФОРМУЛЕ



Теперь дробно-линейную функцию можно анализировать без лишних построений: достаточно найти область определения, асимптоты, центр симметрии и несколько опорных точек. Эти шаги делают график понятным и предсказуемым.