

Многочлены от одной переменной: базовые понятия и действия

Ключевые идеи, операции и связь с уравнениями, функциями и графиками



Зачем изучать многочлены в 10 классе

Многочлены лежат в основе алгебры старшей школы и помогают уверенно работать с уравнениями, функциями и графиками. Они встречаются в задачах по физике, геометрии, экономике и информатике, поэтому их преобразование — важный практический навык, а не только теоретическая тема курса алгебры, которую нужно освоить.



Определение многочлена от одной переменной

Сумма одночленов

Многочленом от одной переменной называют сумму одночленов вида $a \cdot x^n$, где n — неотрицательное целое число, а a — коэффициент. Такой вид записи задаёт строгие правила построения выражения.

Коэффициенты

В многочленах допускаются целые, дробные и действительные коэффициенты. Именно они определяют числовые множители при степенях переменной и влияют на значения многочлена при подстановке чисел.

Переменная x

Все слагаемые многочлена содержат одну и ту же переменную x . Если переменная отсутствует, это тоже допустимо: любое число без x рассматривается как многочлен нулевой степени.

Примеры записи

К многочленам относятся, например, $5x^3 - 2x + 7$, x^2 , -4 и $3x^5 - x + 1$. В каждом случае соблюдены правила степеней и отсутствуют недопустимые операции над переменной.

Почему это важно

Понимание определения позволяет быстро отличать многочлены от других алгебраических выражений и правильно выполнять с ними действия, не нарушая структуру записи.



Стандартный вид многочлена и его элементы



Запись	Старший член	Старший коэффициент	Свободный член	Степень
$3x^4 - x^2 + 6$	$3x^4$	3	6	4
$-2x + 1$	$-2x$	-2	1	1
$x^5 - 4x^3 + x$	x^5	1	0	5

Составлено по определениям стандартного вида многочлена из школьного курса алгебры

Стандартный вид упорядочивает многочлен по убыванию степеней и облегчает сравнение его характеристик.

Во всех примерах старший член задаёт наибольшую степень, а свободный член показывает, есть ли в записи постоянное слагаемое.



Степень многочлена, старший коэффициент и свободный член

1. Степень

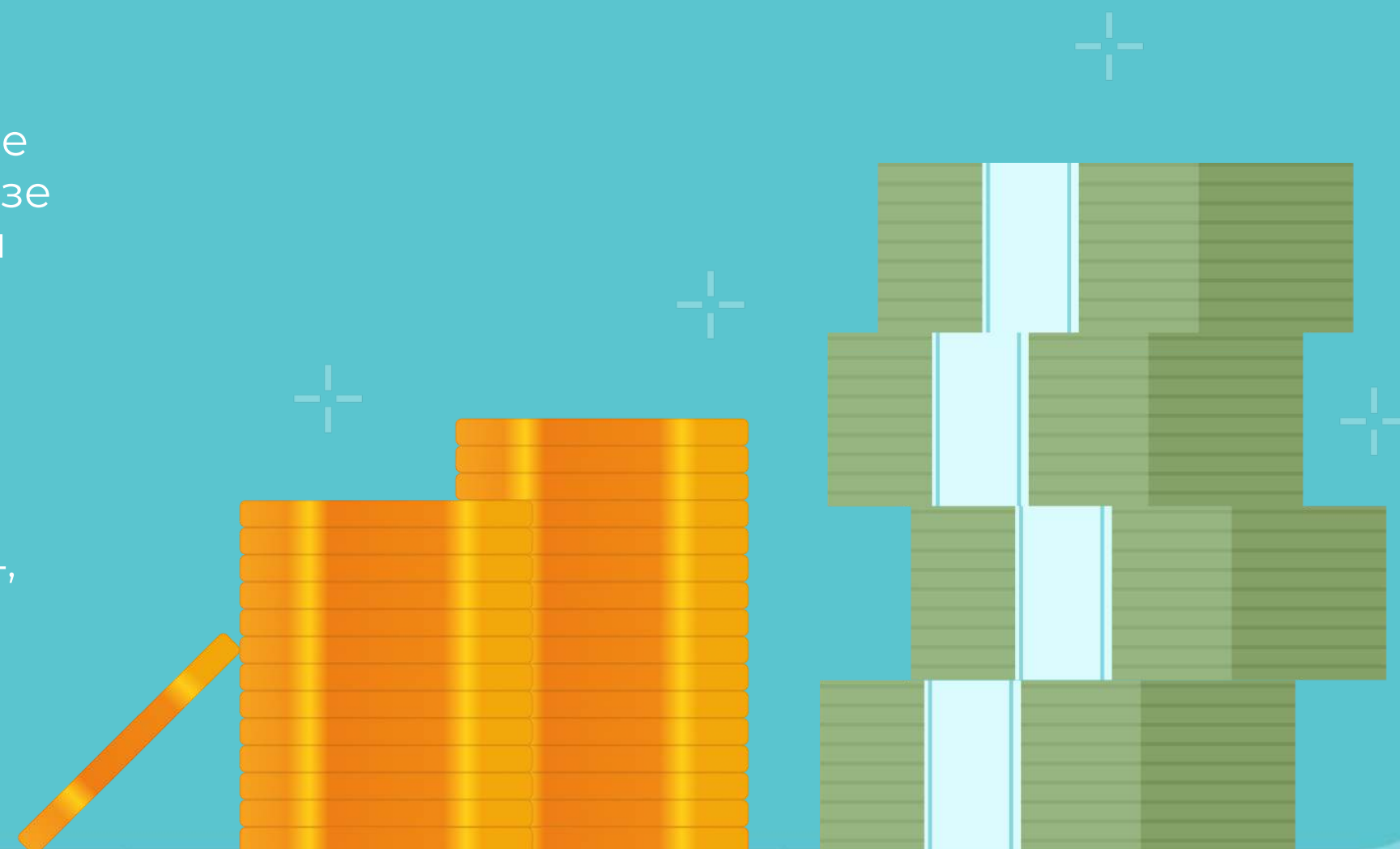
Степень многочлена определяется наибольшей степенью переменной среди всех его ненулевых членов. Она показывает, какой из членов является главным при сравнении и преобразовании записи.

2. Старший коэффициент

Старший коэффициент — это коэффициент при члене наибольшей степени. Он особенно важен при анализе знака и поведения многочлена, а также при делении и разложении.

3. Свободный член

Свободный член не содержит переменной и равен значению многочлена при $x = 0$. Для многочлена $4x^5 - 3x^2 + 8$ степень равна 5, старший коэффициент — 4, свободный член — 8; у нулевого многочлена степень не определяют.



Приведение выражения к стандартному виду

Последовательность преобразований сложного выражения в многочлен с упорядоченными членами



Многочлены и выражения, которые многочленами не являются

Корректные примеры

К многочленам относятся $2x^3 - x + 1$, 7 , $x^4 - 5x^2$ и $-3x + 9$. Во всех случаях переменная входит только в неотрицательных целых степенях, а запись остаётся алгебраически допустимой.

Недопустимые степени

Выражения x^{-2} и $1/x$ не являются многочленами, потому что показатель степени отрицателен. Такая запись нарушает определение, даже если выражение выглядит алгебраически похожим на степень.

Дробные показатели

Запись $x^{1/2}$ и выражение $\sqrt{x}$ также не относятся к многочленам. Для многочлена показатель степени обязан быть целым неотрицательным числом, а не дробью или корнем.

Как распознавать

Проверяйте два признака: есть ли дробные, отрицательные или корневые степени и не используется ли переменная в знаменателе. Если да, перед вами уже не многочлен.

Зачем это различать

Точное распознавание многочленов необходимо для выбора правильных правил преобразования, деления, поиска корней и дальнейшего исследования функций.



Какие многочлены чаще встречаются в школьных заданиях



Квадратные многочлены особенно важны: они связаны с параболой, квадратными уравнениями и неравенствами, поэтому встречаются чаще других типов.

Распределение показывает доминирование квадратных многочленов; именно они чаще становятся базой для первых серьёзных исследований функций и уравнений.

■ Линейные ■ Квадратные ■ Кубические
■ Выше третьей степени



Учебная статистическая схема для школьного курса алгебры



Сложение и вычитание многочленов

1. Подобные члены

При сложении и вычитании объединяют только одночлены с одинаковой степенью. Сначала удобно расположить слагаемые по порядку, чтобы не пропустить соответствующие пары и не перепутать знаки.

2. Сложение многочленов

Например, $(3x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 4x - 1) = 4x^2 + 2x + 4$. Здесь складываются коэффициенты при x^2 , при x и свободные члены, а степень каждого слагаемого сохраняется.

3. Вычитание многочленов

При вычитании второй многочлен сначала заключают в скобки, затем меняют знаки у всех его членов. Поэтому $(5x^2 - x + 3) - (2x^2 + 4x - 6) = 3x^2 - 5x + 9$.



Умножение многочленов и раскрытие скобок

1. Перемножение членов

Каждый член первого многочлена умножают на каждый член второго. Это обеспечивает появление всех промежуточных слагаемых и исключает пропуск важных членов.

2. Сведение подобных

После раскрытия скобок полученную сумму упрощают, приводя подобные члены. Так, $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$, а более длинные записи требуют особенно внимательной проверки знаков.

3. Контроль результата

При многочленах высокой степени количество слагаемых быстро растёт, поэтому важны аккуратность и порядок действий. Именно поэтому умножение часто завершают повторной проверкой полученного выражения.



Формулы сокращённого умножения

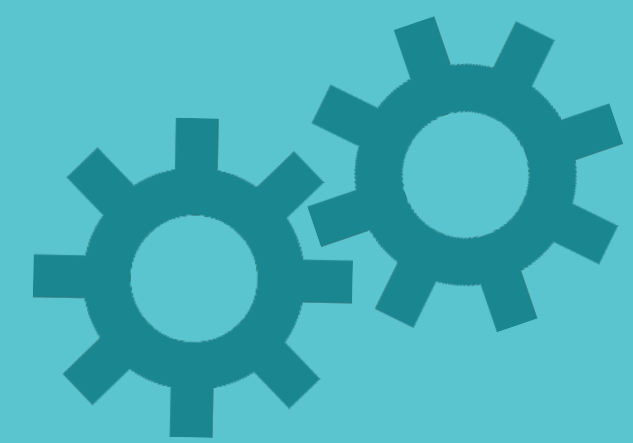


Формула	Результат	Применение
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	Квадрат суммы
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$	Квадрат разности
$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2	Разность квадратов

Основные формулы, которые позволяют быстрее раскрывать скобки и упрощать многочлены.

Формулы сокращают число промежуточных действий и помогают выполнять преобразования точнее и быстрее.

Школьный курс алгебры, 10 класс



Деление многочлена на двучлен

1. Сравнить старшие члены

Сначала многочлен записывают по убыванию степеней и определяют первый член частного. Это позволяет сразу начать деление со старшего члена и последовательно уменьшать степень выражения.

2. Выполнить шаги деления

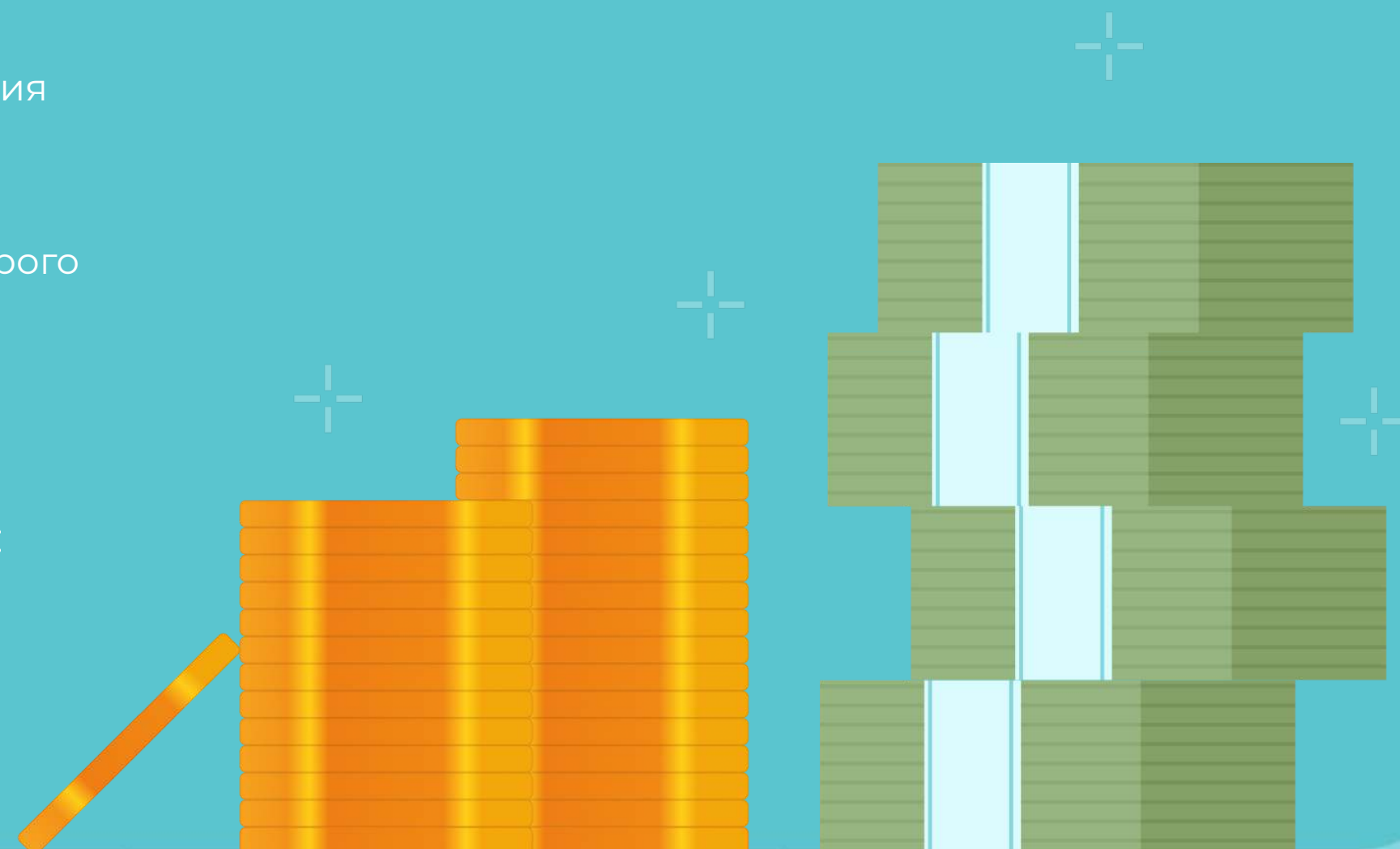
Затем делитель умножают на найденный член частного, полученный результат вычитают из делимого и переносят следующий член. Эти действия повторяют до полного окончания записи.

3. Получить остаток

Если деление не делится нацело, остаётся остаток, степень которого меньше степени двучлена. Именно он показывает, насколько деление оказалось неполным, и его обязательно записывают отдельно.

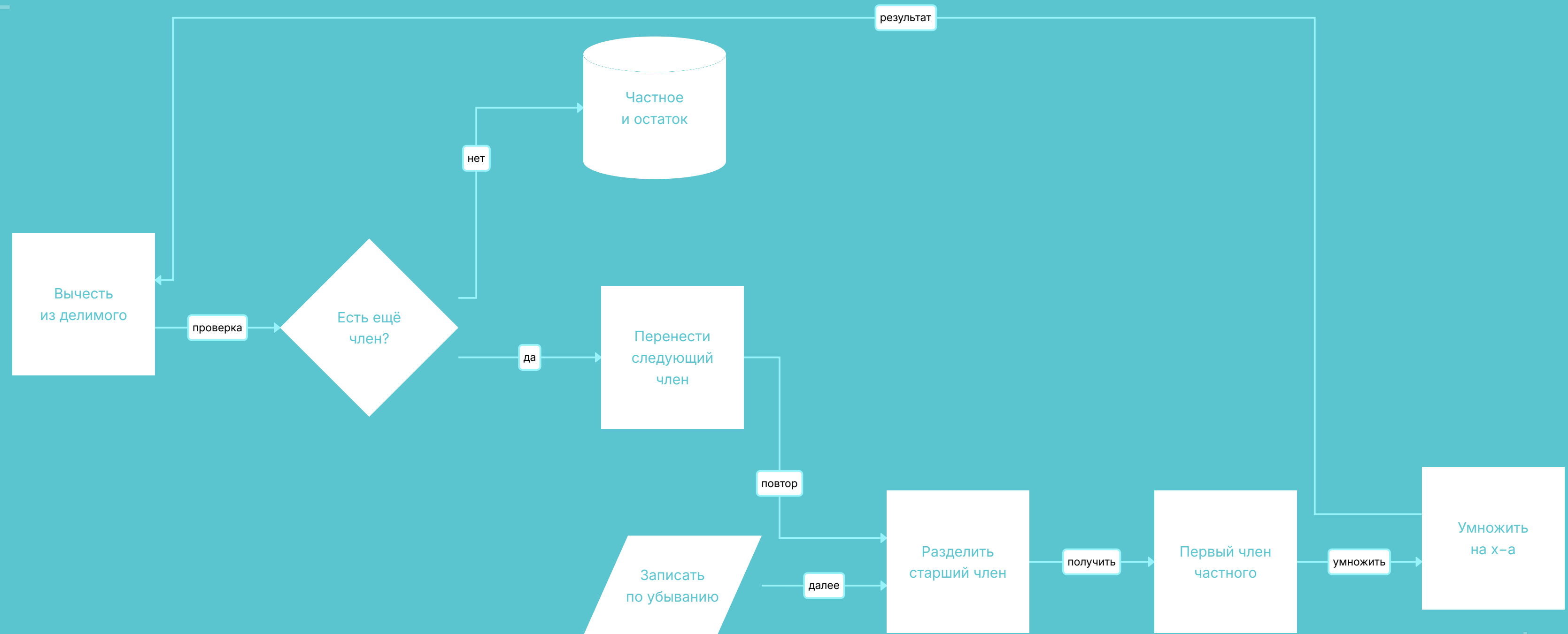
4. Использовать проверку

Для двучлена вида $x - a$ такой способ особенно удобен: он помогает быстро находить значение многочлена в точке a и проверять, является ли это число корнем.



Алгоритм деления многочлена на $x-a$

Последовательность шагов при делении с выделением частного и остатка.



Корень многочлена и значение $P(a)$

1. Проверка значения

Число a называют корнем многочлена $P(x)$, если при подстановке получается ноль: $P(a)=0$. Это самый прямой способ проверить, обращается ли многочлен в нуль в заданной точке.

2. Связь с делителем

Если $P(a)=0$, то выражение $x-a$ делит многочлен без остатка. Такая связь помогает не только решать уравнения, но и находить скрытые множители в записи многочлена.

3. Если не ноль

Когда $P(a) \neq 0$, число a не является корнем. Тогда точка не даёт пересечения с осью Ox , а деление на $x-a$ обязательно оставляет ненулевой остаток.



Теорема Безу как связь остатка и значения многочлена

1. Главное утверждение

При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ остаток равен значению $P(a)$. Это позволяет вместо полного деления сразу вычислить нужный остаток, подставив число a в многочлен.

2. Частный случай нуля

Если $P(a)=0$, остаток отсутствует, а деление выполняется без остатка. В этом случае $x-a$ становится множителем многочлена, что особенно удобно при разложении на множители.

3. Практическая проверка

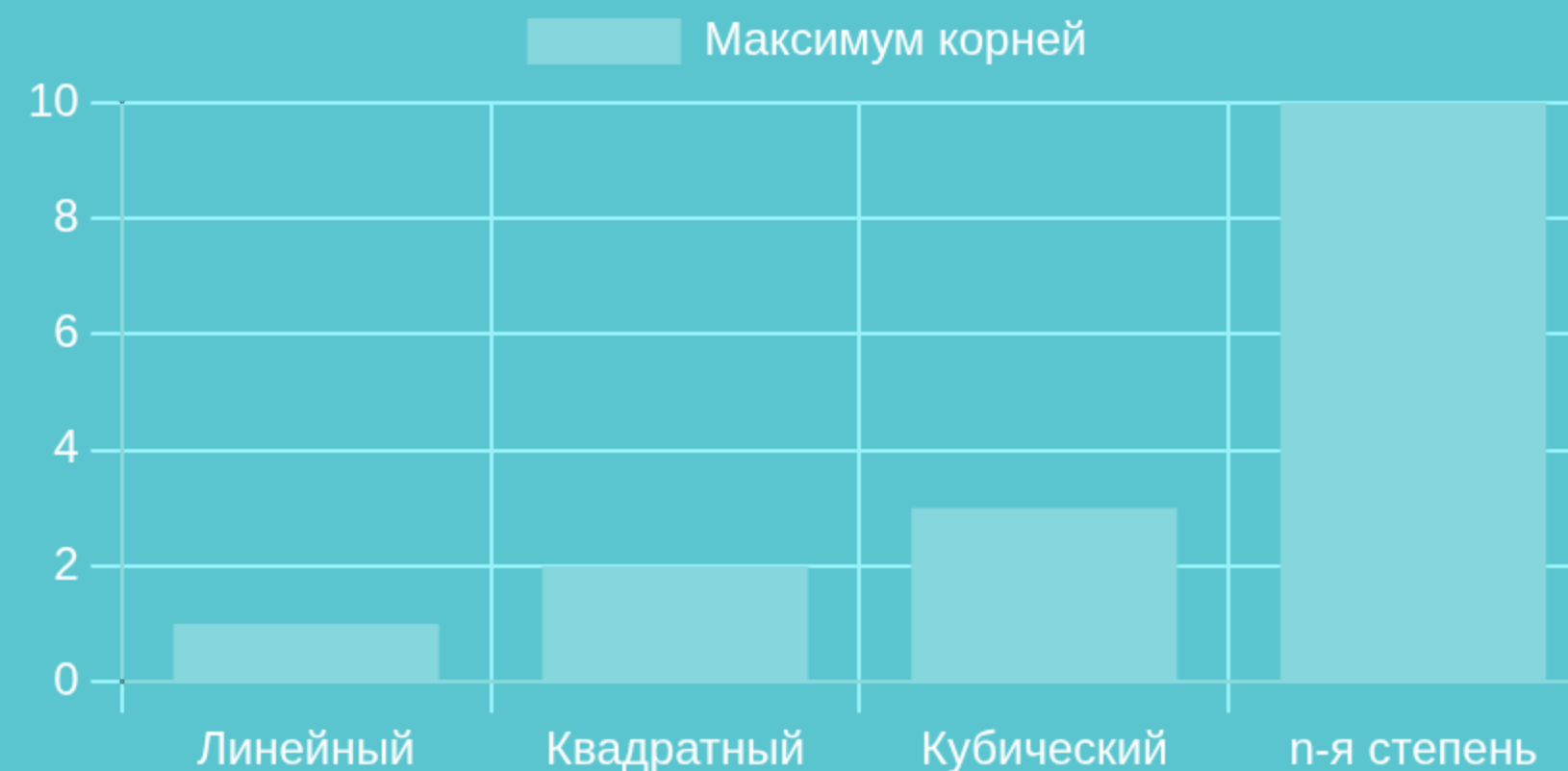
Например, при делении на $x-2$ остаток равен $P(2)$. Такой приём быстро проверяет, является ли 2 корнем, и помогает находить неверные или верные предположения о разложении.



Как степень многочлена связана с числом корней

Чем выше степень, тем больше возможных корней, но число действительных решений всё равно ограничено степенью многочлена.

Степень задаёт верхнюю границу числа корней: у многочленов нет бесконечного множества нулей.



Школьная алгебра: свойства многочленов и теорема о числе корней



Основные способы разложения многочлена на множители

Общий множитель

Начинают с поиска общего числового или буквенного множителя во всех слагаемых. Его выносят за скобки, чтобы получить более простую запись и упростить дальнейшие преобразования.

Группировка

Если общий множитель сразу не виден, слагаемые объединяют в группы. После этого в каждой группе ищут общий множитель и затем выносят его, приводя выражение к произведению.

Формулы сокращённого умножения

Некоторые многочлены удобно распознавать как квадрат суммы, квадрат разности или разность квадратов. Например, $x^2 - 9$ сразу раскладывается на $(x-3)(x+3)$ без громоздких вычислений.

Подбор корней

Если многочлен имеет целые или простые корни, их можно подобрать и проверить. После нахождения корня используют деление на $x-a$, чтобы выделить оставшиеся множители.

Зачем это нужно

Разложение на множители упрощает решение уравнений, поиск корней и исследование знаков многочлена. Чем удачнее выбрано представление, тем короче и понятнее решение задачи.



График многочлена от одной переменной

1. Непрерывная линия

График многочлена не имеет разрывов и скачков, поэтому его можно провести одной плавной линией. Это свойство удобно при визуальном анализе поведения функции на всей числовой прямой.

2. Нули функции

Точки, в которых $P(x)=0$, лежат на оси Ox . Именно в этих местах график пересекает или касается оси, а сами значения x называют нулями многочлена.

3. Поведение на концах

Для нечётной степени концы графика направлены в разные стороны, а для чётной — в одну. Направление зависит и от знака старшего коэффициента, который задаёт общий «разворот» кривой.

4. Связь с исследованием

По графику можно быстро оценить количество корней, знак функции на промежутках и общую форму зависимости. Поэтому графическое представление дополняет алгебраические преобразования и проверки.



Применение многочленов в школьных и прикладных задачах



Геометрические расчёты

Многочлены возникают при вычислении площадей, периметров и объёмов, когда размеры фигур выражаются через переменную. Это позволяет записывать геометрические зависимости в удобной алгебраической форме.



Алгебраические преобразования

В уравнениях и тождественных преобразованиях многочлены помогают раскрывать скобки, сокращать выражения и находить корни. Без уверенной работы с ними решение многих задач заметно усложняется.



Моделирование зависимостей

Полиномиальная запись часто используется как простое приближение реальной зависимости. Она удобна там, где нужна вычисляемая формула без чрезмерно сложного описания явления.



Практические вычисления

При работе с формулами движения, экономическими оценками и прикладными задачами многочлены делают расчёты последовательными и обозримыми. Это особенно важно, когда требуется быстро получить результат.



Многочлены: основа алгебры и вычислений



Многочлены от одной переменной объединяют запись, преобразование и исследование функций. Умение работать с ними помогает уверенно решать уравнения, находить корни и готовит к дальнейшему изучению алгебры.