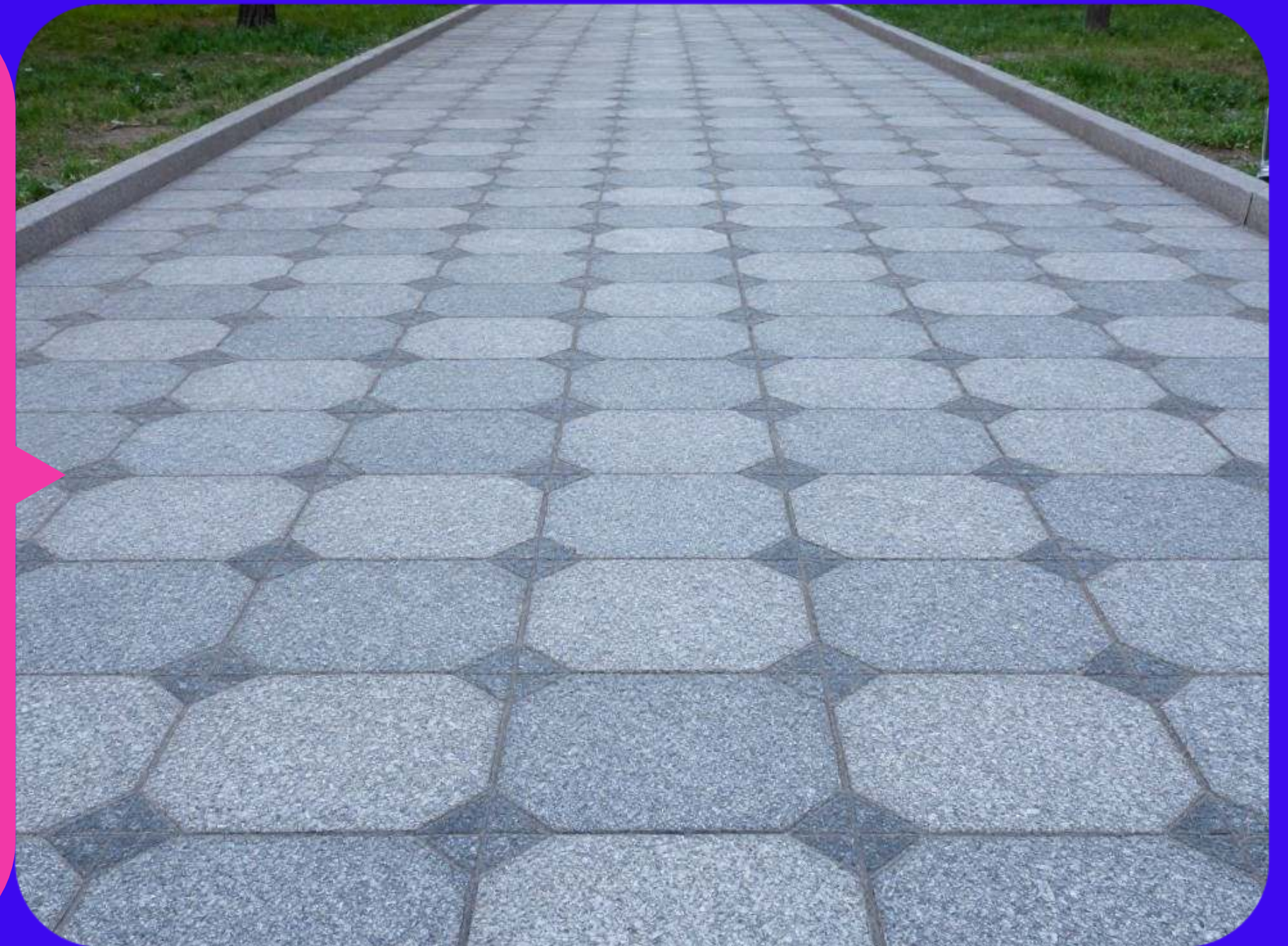


Построение правильных многоугольников и вычисление длины стороны

Как строить правильные фигуры и находить длину их стороны?

Почему правильные многоугольники важны

Правильные многоугольники окружают нас в плитке, орнаментах, сотах и архитектуре. В этой теме геометрия соединяет построение, окружность и вычисления, помогая уверенно решать задачи 9 класса.



Основные признаки правильного многоугольника

01

Равные стороны

У правильного многоугольника все стороны одинаковой длины, поэтому его контур выглядит ровным и симметричным. Именно это свойство позволяет строить фигуру с помощью повторяющихся одинаковых отрезков.

02

Равные углы

Все внутренние углы правильного многоугольника тоже равны. Из-за этого фигура не имеет «выступов» и «впадин», а каждая вершина устроена одинаково относительно соседних.

03

Сумма углов

Для n -угольника сумма внутренних углов равна $(n-2) \cdot 180^\circ$. Эта формула помогает проверять вычисления и понимать, как изменяется фигура при увеличении числа сторон.

04

Центр фигуры

В правильном многоугольнике можно провести центр, из которого все вершины видны под одинаковыми углами. Поэтому фигура удобно связывается с окружностью и радиусом.

05

Симметрия

Если число сторон чётное, правильный многоугольник имеет центр симметрии. Это делает его особенно удобным для построений, чертежей и анализа геометрических свойств.

Связь правильного многоугольника с окружностью

Вписанная фигура

Правильный многоугольник можно вписать в окружность так, чтобы все его вершины лежали на одной линии. Тогда окружность как бы «держит» фигуру и задаёт её размер.

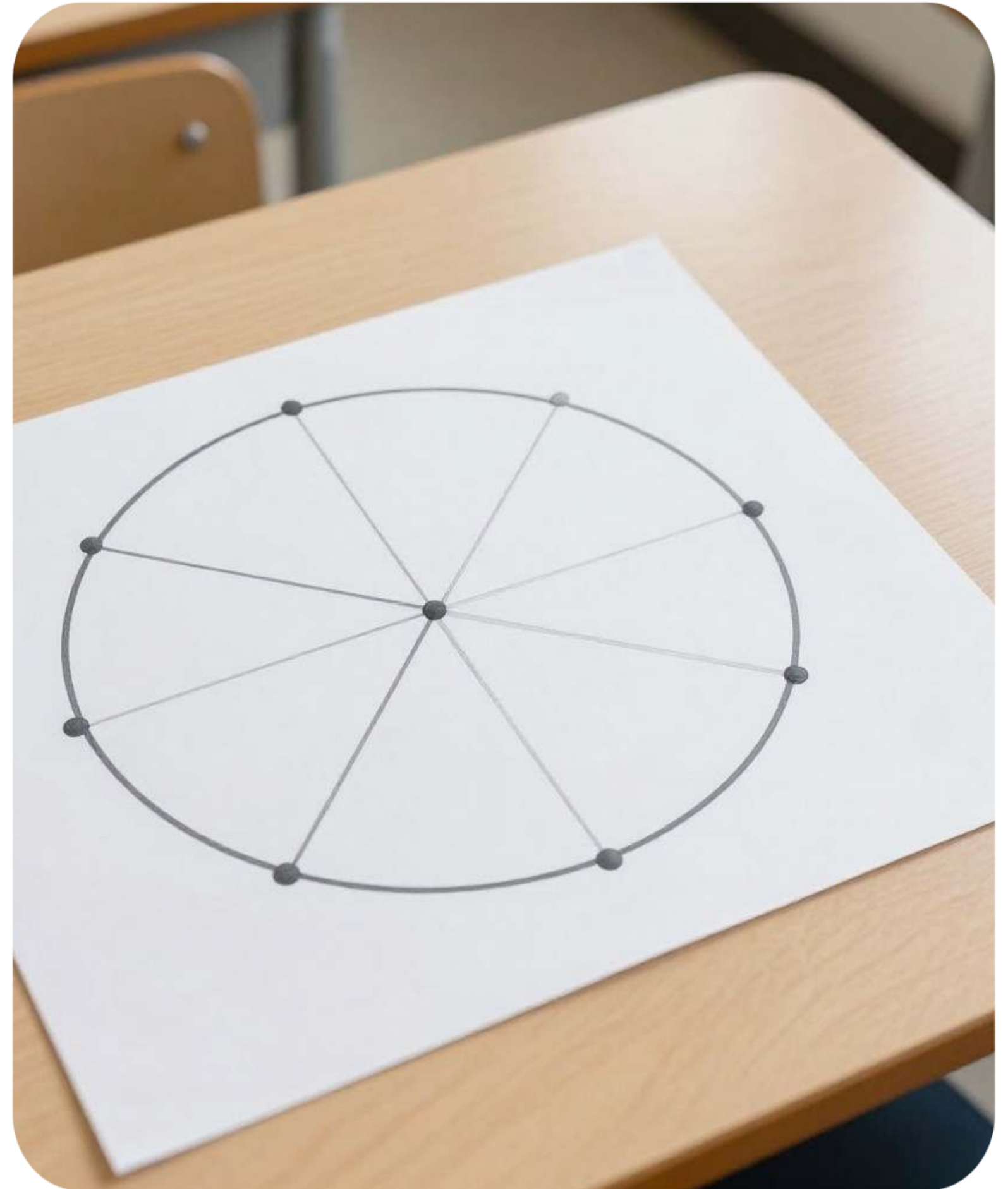
Общий центр

Центр окружности совпадает с центром многоугольника. Это удобно: от центра к вершинам можно проводить равные отрезки, а сама фигура становится легко измеряемой.

Радиус и сторона

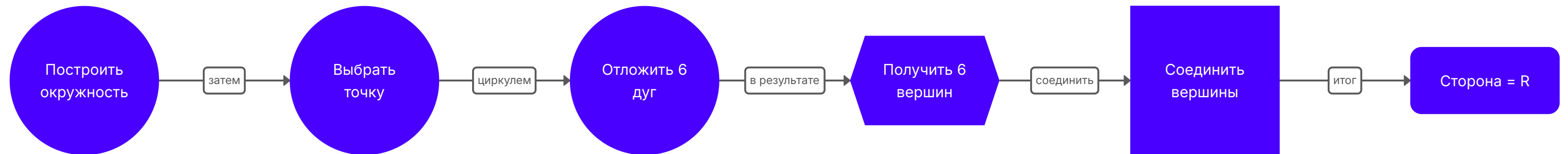
Радиус описанной окружности соединяет центр с вершиной и помогает рассматривать сторону как хорду. Так длина стороны выражается через свойства окружности и центрального угла. **Центральный угол**

Для правильного n -угольника центральный угол равен $360^\circ/n$. Он показывает, на сколько частей делится окружность между соседними вершинами и почему фигура получается равномерной.



Построение правильного шестиугольника

Последовательность построения циркулем и линейкой



Построение квадрата и правильного восьмиугольника

01

Квадрат на окружности

Чтобы построить квадрат, проводят два взаимно перпендикулярных диаметра окружности. Четыре точки пересечения с окружностью становятся вершинами, а соседние точки соединяются отрезками.

02

Угол квадрата

Центральный угол квадрата равен 90° . Это означает, что окружность делится на четыре равные части, а каждая сторона соответствует одной четверти круга.

03

Восьмиугольник

Правильный восьмиугольник получают, деля окружность на восемь равных частей. Его вершины отмечают последовательно, после чего соединяют соседние точки по окружности.

04

Сравнение сторон

При одном и том же радиусе чем больше сторон у правильного многоугольника, тем короче его сторона. Причина в том, что центральный угол между вершинами становится меньше.

Центральный угол правильного многоугольника

➤ Диаграмма показывает, как делится полный круг между вершинами правильной фигуры. Это помогает быстро сравнивать многоугольники разного числа сторон.

➤ Чем больше сторон, тем меньше центральный угол и тем плотнее вершины располагаются на окружности.



Формула центрального угла правильного n-угольника:
 $360^\circ/n$

Формулы длины стороны для частных случаев

Таблица показывает, как найти сторону правильного многоугольника по радиусу описанной окружности или по периметру.

Для частных случаев удобнее всего использовать связь со стороной через радиус, а при известном периметре — формулу $a=P/n$.

Формулы для правильных многоугольников

Фигура	Формула	Связь
Квадрат	$a=R\sqrt{2}$	R
Треугольник	$a=R\sqrt{3}$	R
Шестиугольник	$a=R$	R
Восьмиугольник	$a=2R \sin 22,5^\circ$	R

$$a = 2R \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

позволяет найти сторону правильного многоугольника по радиусу и числу сторон.

Геометрическая формула для правильного n-угольника

Формула показывает, что сторона зависит не только от размера окружности, но и от количества вершин. При большем n сторона становится короче.



$$a = 2r \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

используют, когда известна апофема
правильного многоугольника.

Геометрическая формула для правильного n-угольника через апофему

Апофема — это расстояние от центра до середины стороны. Такая формула удобна в задачах, где дано внутреннее измерение фигуры.



Связь стороны с периметром



Формула периметра

У правильного многоугольника все стороны равны, поэтому периметр легко записывается как произведение числа сторон на длину одной стороны: $P = n \cdot a$. Это основа для многих задач.



Как найти сторону

Если известен периметр, длину одной стороны находят делением: $a = P/n$. Такой способ особенно удобен, когда фигура дана целиком, а не по отдельным элементам.



Проверка результата

Периметр должен делиться на число сторон без остатка, потому что все стороны одинаковы. Если ответ выглядит странно, стоит ещё раз проверить единицы измерения и вычисления.

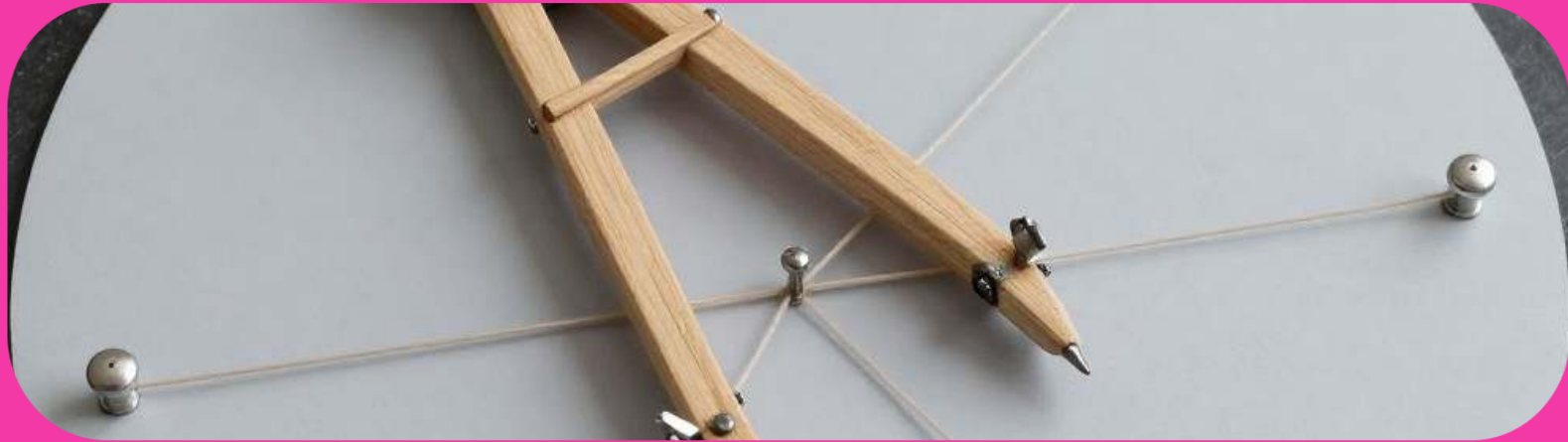
Сравнение длины стороны при одинаковом радиусе

- При одинаковом радиусе фигуры с большим числом сторон имеют более короткую сторону, потому что точки на окружности расположены чаще.
- Наибольшая сторона у треугольника, наименьшая — у восьмиугольника; значение уменьшается по мере роста числа сторон.



Вычислено по формуле $a = 2R \cdot \sin(180^\circ/n)$, при $R = 10$ см.

Пример: длина стороны правильного шестиугольника



Шесть равных сторон

Когда окружность разбита на шесть равных дуг, соседние вершины соединяются отрезками одинаковой длины. Поэтому правильный шестиугольник выглядит особенно аккуратно и легко строится циркулем без дополнительных вычислений. Его сторона совпадает с радиусом описанной окружности.



Почему это удобно

Если радиус равен 8 см, то и сторона шестиугольника тоже равна 8 см. На рисунке это видно сразу: одна и та же длина отмечает и радиус, и каждую сторону, что делает шестиугольник удобным примером для проверки понимания темы.

$\approx 9,18$ см

**такова длина стороны правильного
восьмиугольника при радиусе 12 см.**

Вычисление по формуле $a = 2R \cdot \sin(180^\circ/8)$ при $R = 12$ см.

Полученное значение показывает, как синус помогает вычислять сторону многоугольника, если известен радиус описанной окружности и число его сторон.



Практические данные для решения задач

n	Угол	a при R=10
4	90°	14,14
6	60°	10
8	45°	7,65



Сравнение помогает быстро увидеть связь между числом сторон, центральным углом и длиной стороны при одном и том же радиусе.

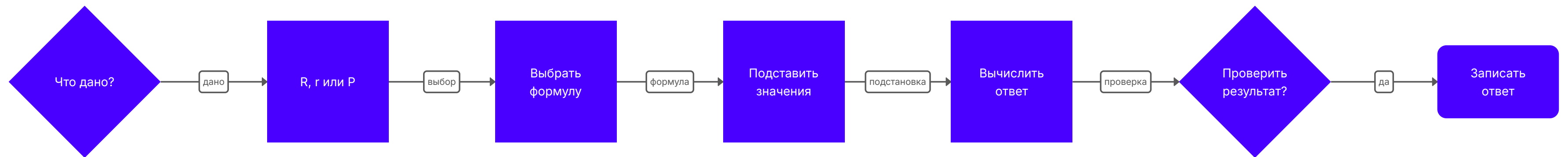


При фиксированном радиусе увеличение числа сторон уменьшает длину стороны, потому что центральный угол становится меньше.

Вычислено по формуле $a = 2R \cdot \sin(180^\circ/n)$, $R = 10$ см.

Алгоритм нахождения длины стороны

Пошаговая схема выбора формулы в зависимости от того, что известно в задаче.



Типичные ошибки в задачах



Путают величины

Часто радиус описанной окружности принимают за апофему. Из-за этого подставляют неверное значение в формулу и получают ответ, который не соответствует реальной фигуре.



Забывают про периметр

Иногда периметр подставляют вместо длины стороны и не делят его на число сторон. Для правильного многоугольника это недопустимо, потому что все стороны одинаковы.



Берут не тот угол

В формулах для синуса и тангенса нужен не весь центральный угол, а его половина. Если взять неправильный угол, длина стороны получится заметно ошибочной.



Ошибаются в шестиугольнике

Для правильного шестиугольника сторона равна радиусу описанной окружности. Эту особенность важно помнить, иначе можно усложнить решение и прийти к неверному результату.



Правильные многоугольники в окружающем мире



Плитка и мозаика

Повторяющиеся правильные фигуры часто используют в покрытии пола и настенных узорах. Они создают аккуратный ритм и помогают равномерно заполнить поверхность без случайных промежутков.



Соты и сетки

Шестиугольники особенно удобны в природе и технике, потому что плотно прилегают друг к другу. Такая форма делает структуру устойчивой и экономит место на плоскости.



Декор и орнамент

В декоративных решётках, панно и орнаментах правильные многоугольники помогают строить симметричные рисунки. Повторяемость одинаковых элементов делает изображение спокойным



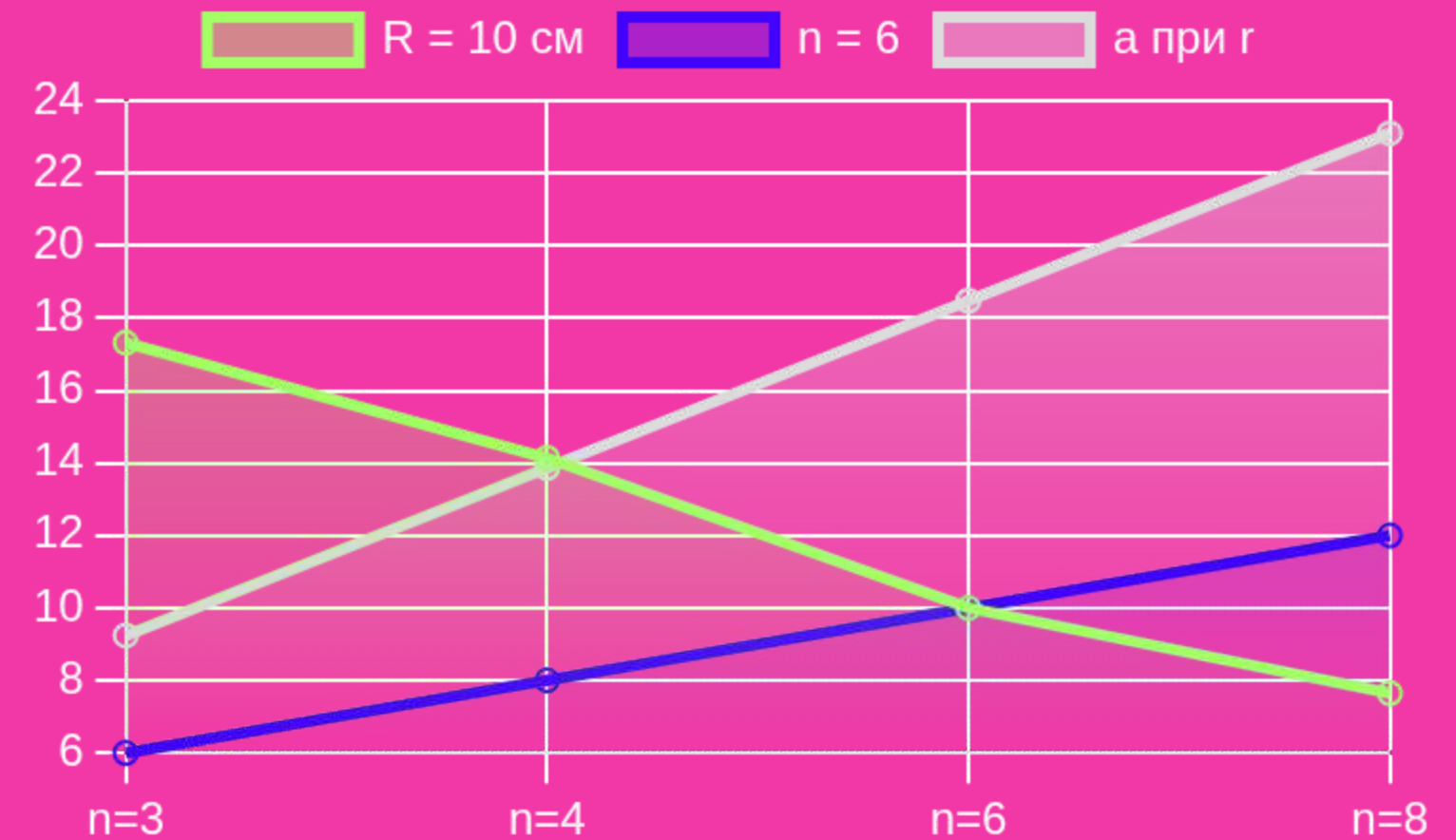
Знаки и детали

Некоторые дорожные знаки и технические элементы тоже опираются на правильные формы. Их легко узнавать, а одинаковые стороны и углы упрощают изготовление и измерение.

От чего зависит длина стороны правильного многоугольника

➤ График объединяет три разные ситуации, чтобы показать, как меняется сторона при изменении радиуса, числа сторон и апофемы.

➤ Сторона уменьшается при росте n , но увеличивается при большем R или r ; значит, важны сразу два вида данных.



Расчёты по формулам $a = 2R \cdot \sin(180^\circ/n)$, $a = 2r \cdot \operatorname{tg}(180^\circ/n)$ и $a = P/n$.

Итоги темы

Правильные многоугольники связаны с окружностью, а длину их стороны можно находить разными способами. Главное — правильно выбрать формулу и учитывать число сторон, радиус или апофему.