

Тригонометрические функции: связь углов, сторон и графиков

Угол, треугольник и график — одна математическая история.





Тригонометрия помогает измерять стороны и углы, описывать графики и понимать периодические процессы. В 9 классе она связывает геометрию, алгебру и практические задачи, поэтому становится важной основой курса.

Зачем нужна тригонометрия в 9 классе

Угол как основа тригонометрии

Измерение углов

Углы обычно измеряют в градусах: полный оборот равен 360° , а прямой угол — 90° . Именно от величины угла зависит значение тригонометрической функции.

Острые углы

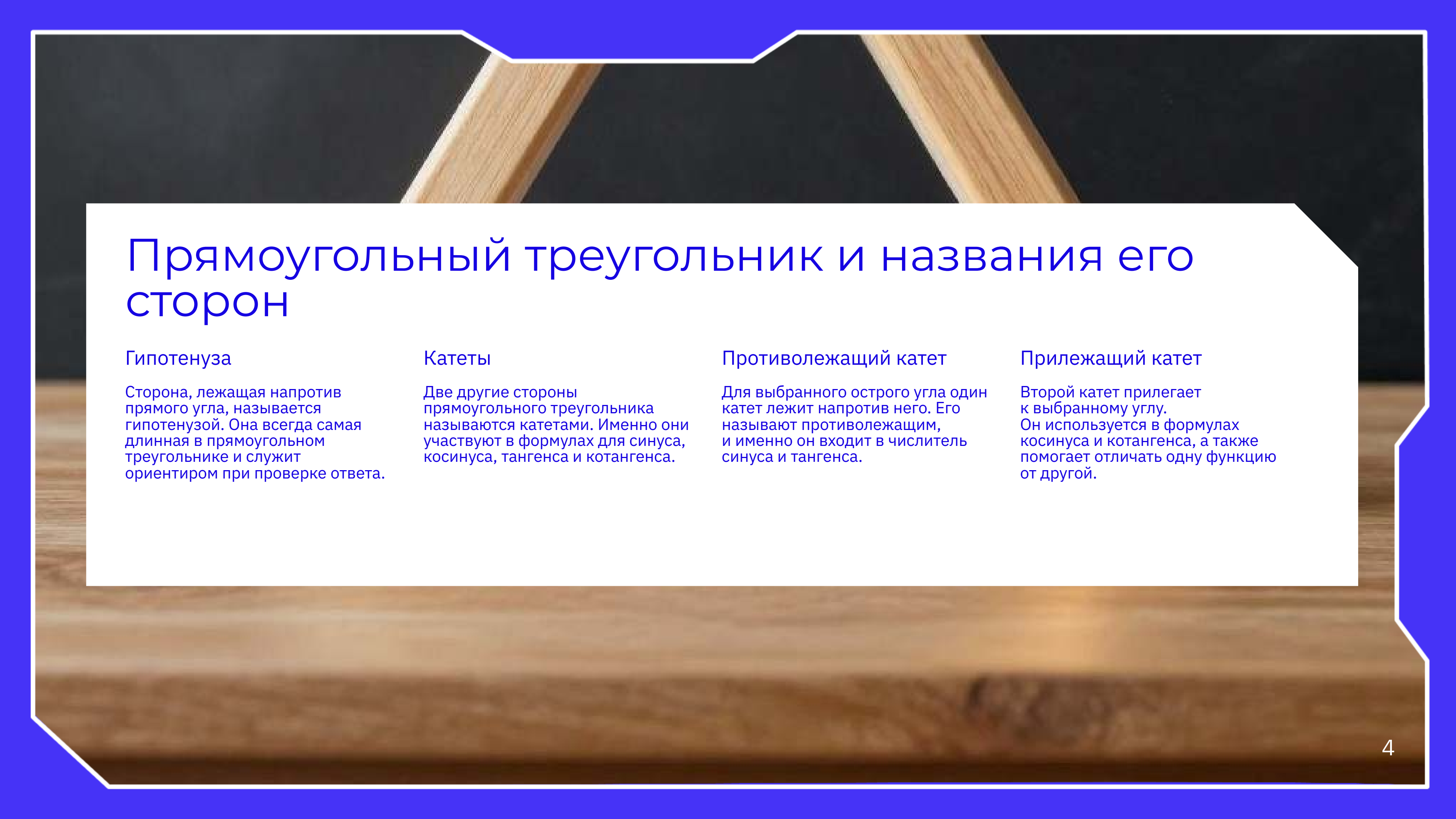
В задачах с прямоугольным треугольником чаще всего рассматривают острые углы, то есть меньше 90° . Для каждого из них можно найти соответствующие значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Связь с функцией

Один и тот же угол всегда даёт одно и то же значение функции. Это делает тригонометрические функции удобным инструментом для вычислений, сравнения и построения графиков.

Практический смысл

Углы встречаются не только в геометрии, но и в наклонах, поворотах, движении и измерениях. Поэтому понимание угла — первый шаг к решению тригонометрических задач.



Прямоугольный треугольник и названия его сторон

Гипотенуза

Сторона, лежащая напротив прямого угла, называется гипотенузой. Она всегда самая длинная в прямоугольном треугольнике и служит ориентиром при проверке ответа.

Катеты

Две другие стороны прямоугольного треугольника называются катетами. Именно они участвуют в формулах для синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Противолежащий катет

Для выбранного острого угла один катет лежит напротив него. Его называют противолежащим, и именно он входит в числитель синуса и тангенса.

Прилежащий катет

Второй катет прилегает к выбранному углу. Он используется в формулах косинуса и котангенса, а также помогает отличать одну функцию от другой.

Определения основных тригонометрических функций

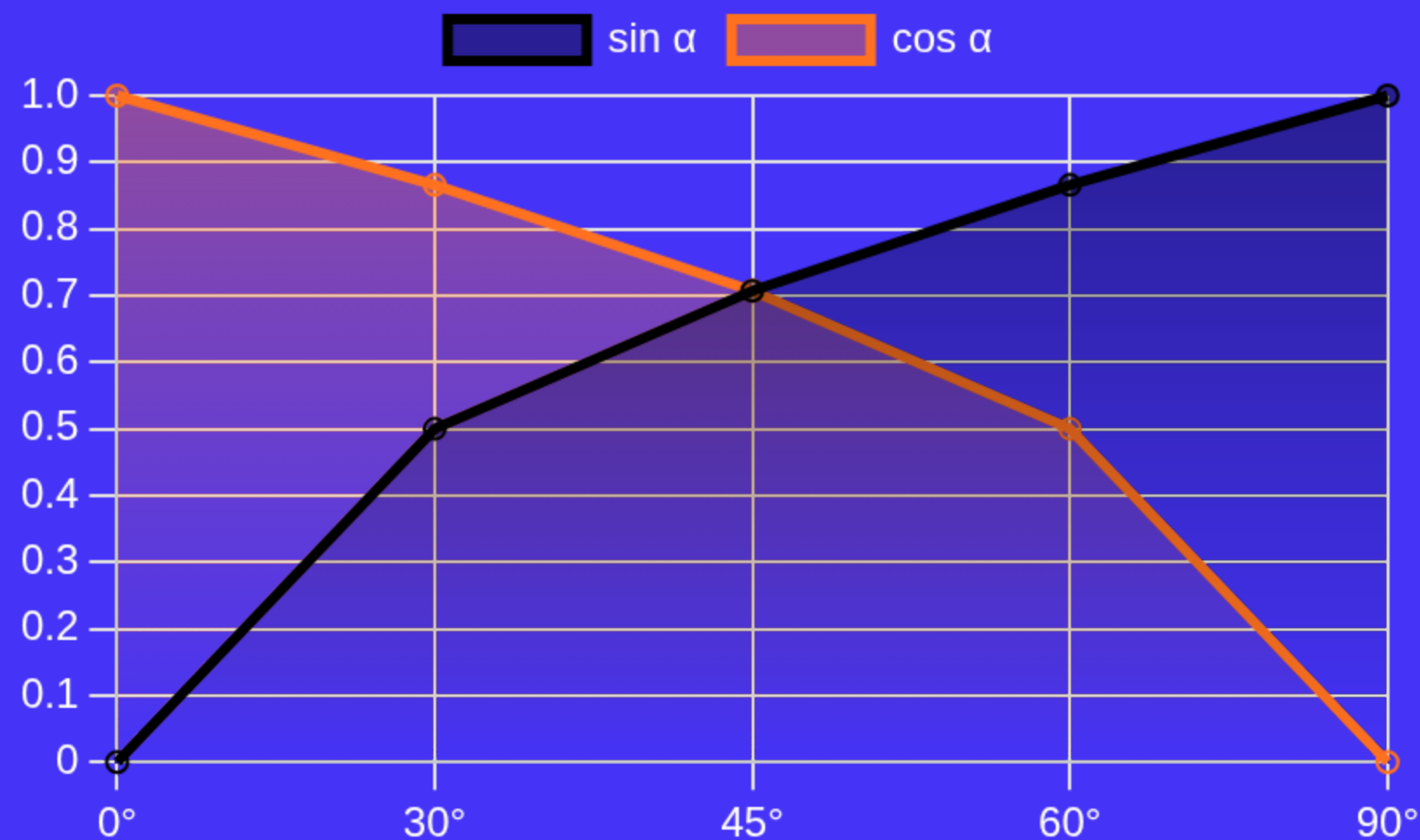
Таблица показывает, как каждая функция выражается через стороны прямоугольного треугольника и в каких случаях её значение не существует.

Синус и косинус используют гипотенузу, а тангенс и котангенс сравнивают катеты. Неопределённость появляется, когда знаменатель равен нулю.

Функция	Формула	Не определена при
$\sin \alpha$	противол./гипот.	0 в знаменателе
$\cos \alpha$	прилеж./гипот.	0 в знаменателе
$\operatorname{tg} \alpha$	противол./прилеж.	прилеж.=0
$\operatorname{ctg} \alpha$	прилеж./противол.	противол.=0

Школьный курс алгебры: определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике

Значения синуса и косинуса для основных углов



Табличные значения тригонометрических функций
для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°

Опорные значения помогают быстро решать задачи без долгих вычислений и округлений. Особенно удобно сравнивать пары углов, полученных из одинаковых прямоугольных треугольников.

Синус на отрезке от 0° до 90° растёт, а косинус убывает. В точке 45° их значения совпадают.

Точные значения, которые нужно знать

01

Угол 30°

Значение $\sin 30^\circ$ равно $\frac{1}{2}$, а $\cos 60^\circ$ тоже равно $\frac{1}{2}$. Эти числа часто встречаются в задачах на треугольники и позволяют не переходить к десятичным дробям.

02

Угол 45°

В равнобедренном прямоугольном треугольнике $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$ одинаковы и равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это удобно, когда нужно быстро найти стороны без округления.

03

Угол 60°

Для треугольника $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ особенно важно значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Оно встречается в формулах для $\sin 60^\circ$ и $\cos 30^\circ$, поэтому полезно запомнить обе записи сразу.

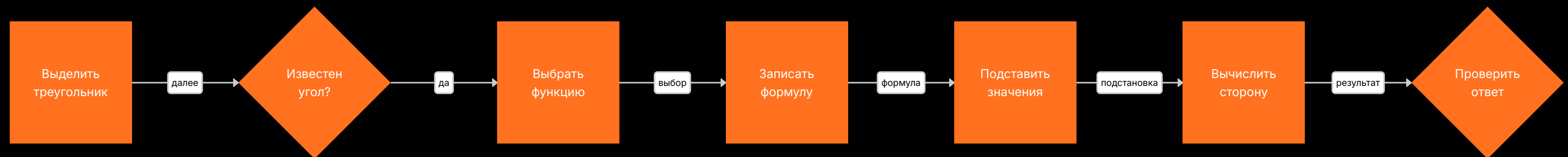
04

Тангенс 45°

Если угол равен 45° , то $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Это связано с тем, что в таком треугольнике противолежащий и прилежащий катеты равны.

Алгоритм решения задач на нахождение стороны

Последовательность действий при работе с прямоугольным треугольником и тригонометрической формулой



Единичная окружность и координаты точки

Что это такое

Единичная окружность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Она удобна тем, что позволяет связывать углы не только с треугольниками, но и с точками на плоскости.

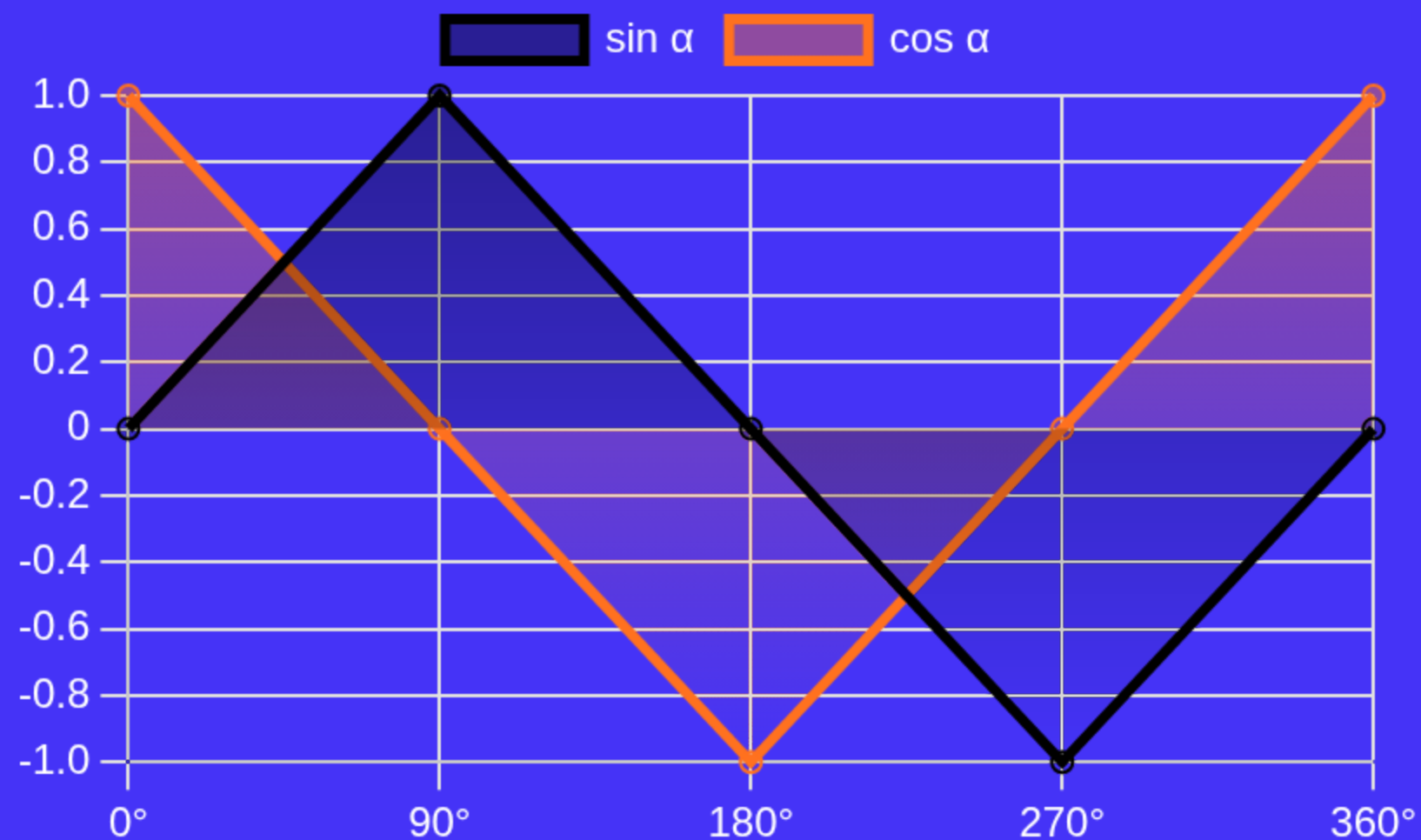
Координата x

Для точки на единичной окружности абсцисса равна $\cos \alpha$. Поэтому косинус можно понимать как горизонтальное положение точки относительно центра окружности.

Координата y

Ордината точки равна $\sin \alpha$. Это показывает, что синус описывает вертикальное положение точки и помогает переходить от геометрии к координатам.

Как изменяются $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ на окружности



Табличные значения и характерные точки графиков $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, школьный курс алгебры

Графики можно мысленно продолжать дальше, потому что значения снова повторяются после полного оборота. Это свойство называют периодичностью.

Синус и косинус меняются плавно и повторяются через 360° . Их графики отличаются сдвигом, но имеют одинаковый период.

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Первая четверть

В I четверти все основные тригонометрические функции принимают положительные значения. Это самая удобная область для первых вычислений, потому что знак ответа не вызывает сомнений и легко проверяется по рисунку.

Вторая четверть

Во II четверти положительным остаётся синус, а косинус и тангенс становятся отрицательными. Такое правило помогает сразу определить знак результата, если на окружности известна только четверть, а не точный угол.

Третья четверть

В III четверти положительным становится тангенс, потому что и синус, и косинус здесь отрицательны. Это особенно важно в задачах, где угол задан косвенно и нужно быстро выбрать верный знак без лишних вычислений.

Четвёртая четверть

В IV четверти положительным остаётся косинус, а синус и тангенс имеют отрицательные значения. Если помнить это распределение, можно проверять ответы и не ошибаться при работе с графиками и координатами.

Полезная проверка

Правило четвертей экономит время: сначала определяют положение угла, затем выбирают знак функции. Такой приём особенно полезен при решении задач на единичной окружности, графиках и преобразовании выражений.



Сравнение свойств основных функций

Сравнение показывает, чем отличаются основные функции по области определения, диапазону значений и особым точкам, где значение вычислить нельзя.

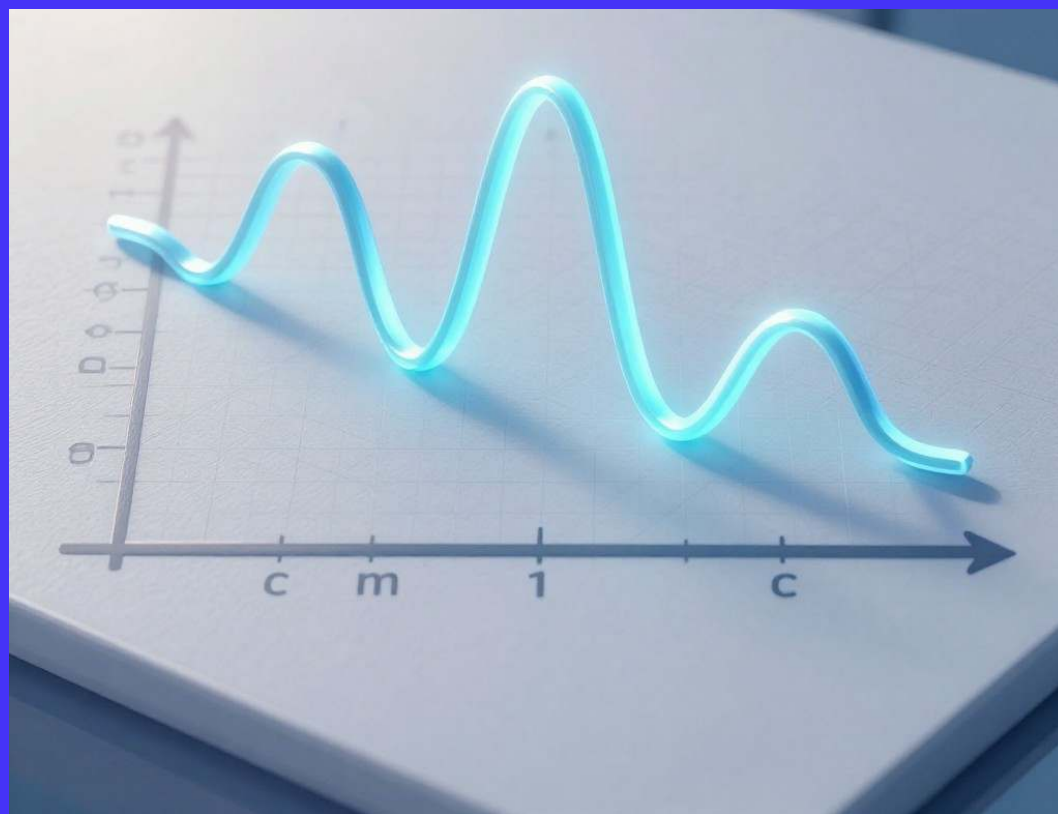
Синус и косинус ограничены по значениям, а тангенс и котангенс не ограничены. При этом у тангенса и котангенса есть углы, где они не определены.

Функция	Область	Особые случаи
sin	все углы	-1...1
cos	все углы	-1...1
tg	кроме $90^\circ + 180^\circ k$	любые
ctg	кроме $180^\circ k$	любые

Графики синуса и косинуса как волны

Волна на координатной плоскости

График синуса напоминает плавную волну: он поднимается, опускается и снова повторяет тот же путь. На нём легко увидеть максимум, минимум и точки пересечения с осью Ox , которые помогают читать рисунок.



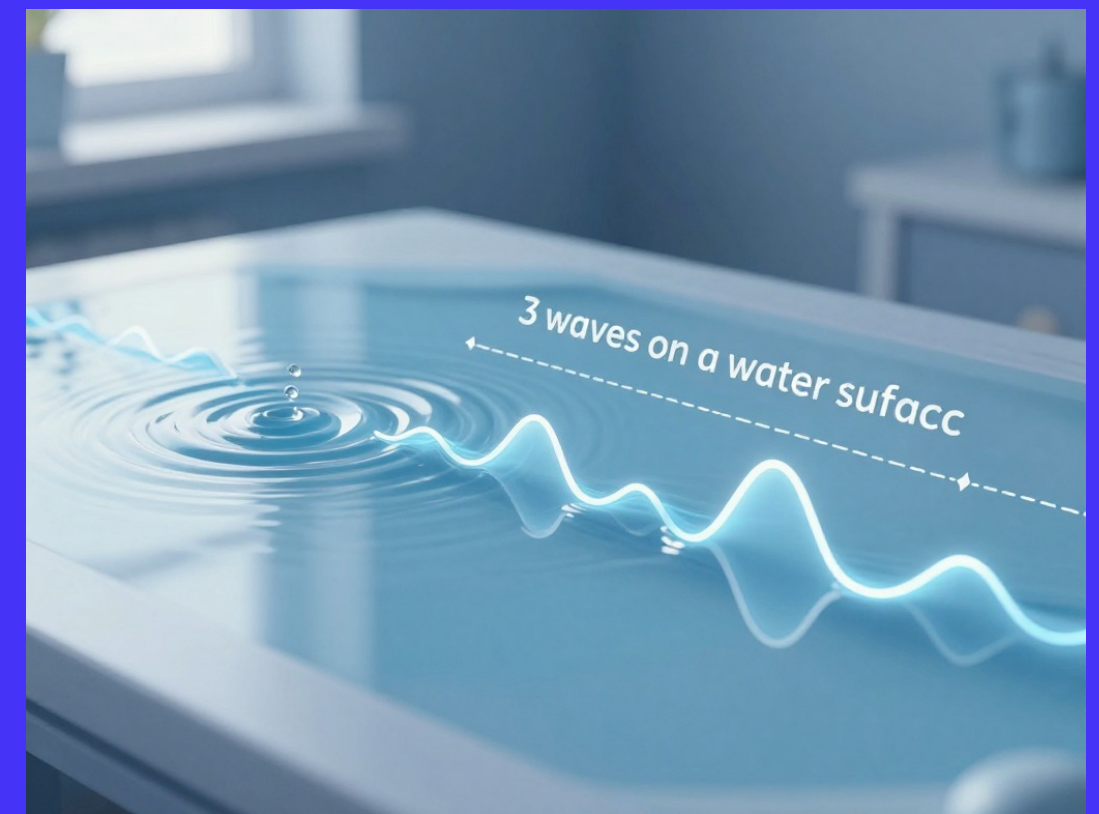
Косинус как сдвинутая волна

График косинуса похож на синус, но начинается с наибольшего значения. Такой сдвиг показывает, что две функции близки по форме, однако их графики не совпадают и по-разному проходят через ключевые точки.



Повторяемость движения

Если представить качели или морскую волну, смысл графиков становится нагляднее. Один и тот же рисунок повторяется через полный период, поэтому синус и косинус удобно использовать для описания колебаний в природе и технике.



Тангенс и котангенс в задачах на наклон

01

Тангенс и крутизна

Тангенс удобен, когда нужно оценить крутизну наклона: он сравнивает высоту с основанием. Чем больше угол подъёма, тем больше значение тангенса, поэтому функция хорошо описывает лестницы, скаты и подъёмы.

02

Котангенс как обратное отношение

Котангенс используют, если важнее отношение прилежащего катета к противолежащему. Он помогает выбирать нужную формулу в задачах, где известны стороны, расположенные относительно выбранного угла.

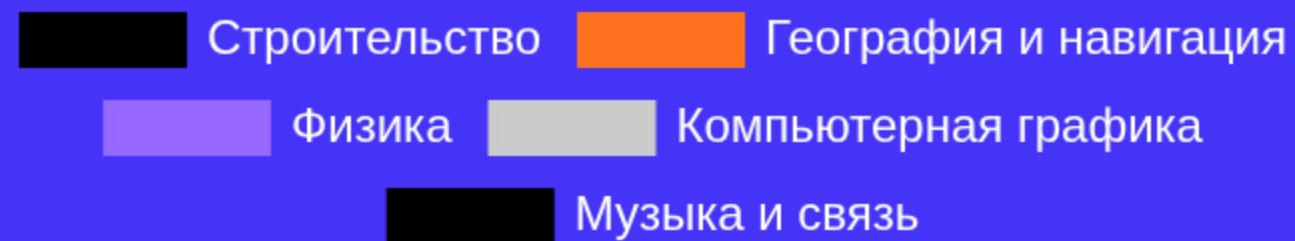
03

Практический смысл

Эти функции часто встречаются в задачах о крыше дома, дороге с уклоном или лестнице. В таких примерах достаточно выделить прямоугольный треугольник и понять, какая сторона соответствует условию.



Где применяются тригонометрические функции



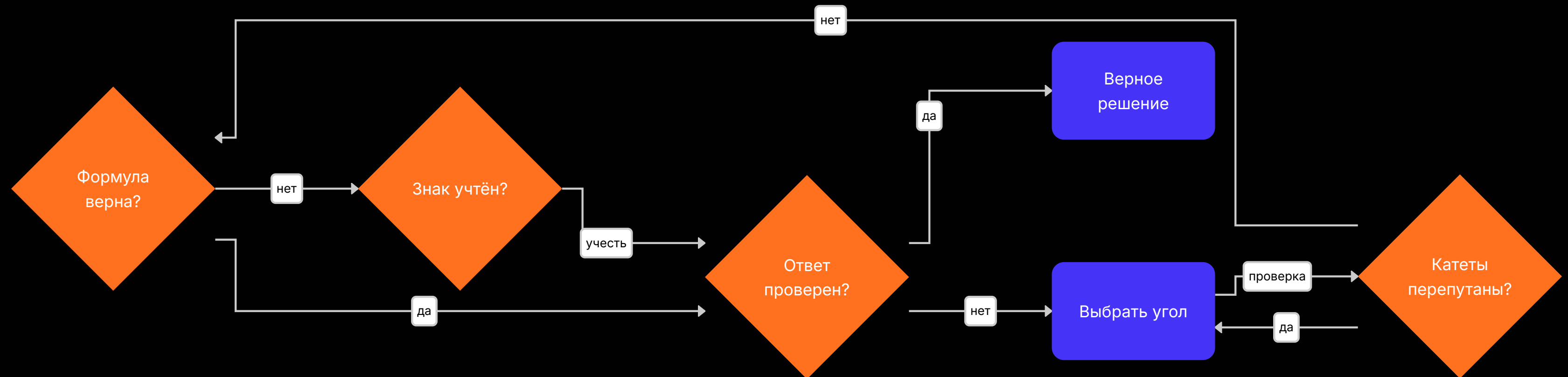
Обобщение типичных школьных и прикладных применений тригонометрии

Тригонометрия нужна не только в школьных задачах: она помогает описывать реальные измерения, движение и повороты объектов в разных областях науки и техники.

Больше всего тригонометрия востребована там, где важны углы, расстояния и повторяющиеся процессы. Её универсальность делает тему полезной для многих профессий.

Типичные ошибки при решении задач

Последовательность показывает, где чаще всего возникают неточности и как их вовремя заметить.



Связь тригонометрии с теоремой Пифагора



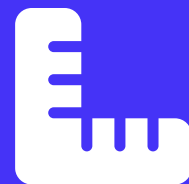
Проверка вычислений

Теорема Пифагора помогает проверить, согласуются ли найденные стороны прямоугольного треугольника. Если результат выглядит сомнительно, можно быстро сравнить его с соотношением $a^2 + b^2 = c^2$.



Связанные формулы

Тригонометрия и теорема Пифагора работают вместе: одна помогает выразить стороны через угол, другая — проверить длины. Такое сочетание особенно полезно в задачах на треугольники и чертежи.



Нахождение стороны

Когда известны две стороны, теорема Пифагора позволяет найти третью. После этого уже удобно применять синус, косинус или тангенс, если в задаче требуется угол или отношение сторон.



Ответ без ошибок

Если помнить, что гипотенуза — самая длинная сторона, легче заметить неверный ответ ещё до записи. Эта простая проверка экономит время и снижает риск ошибки в вычислениях.

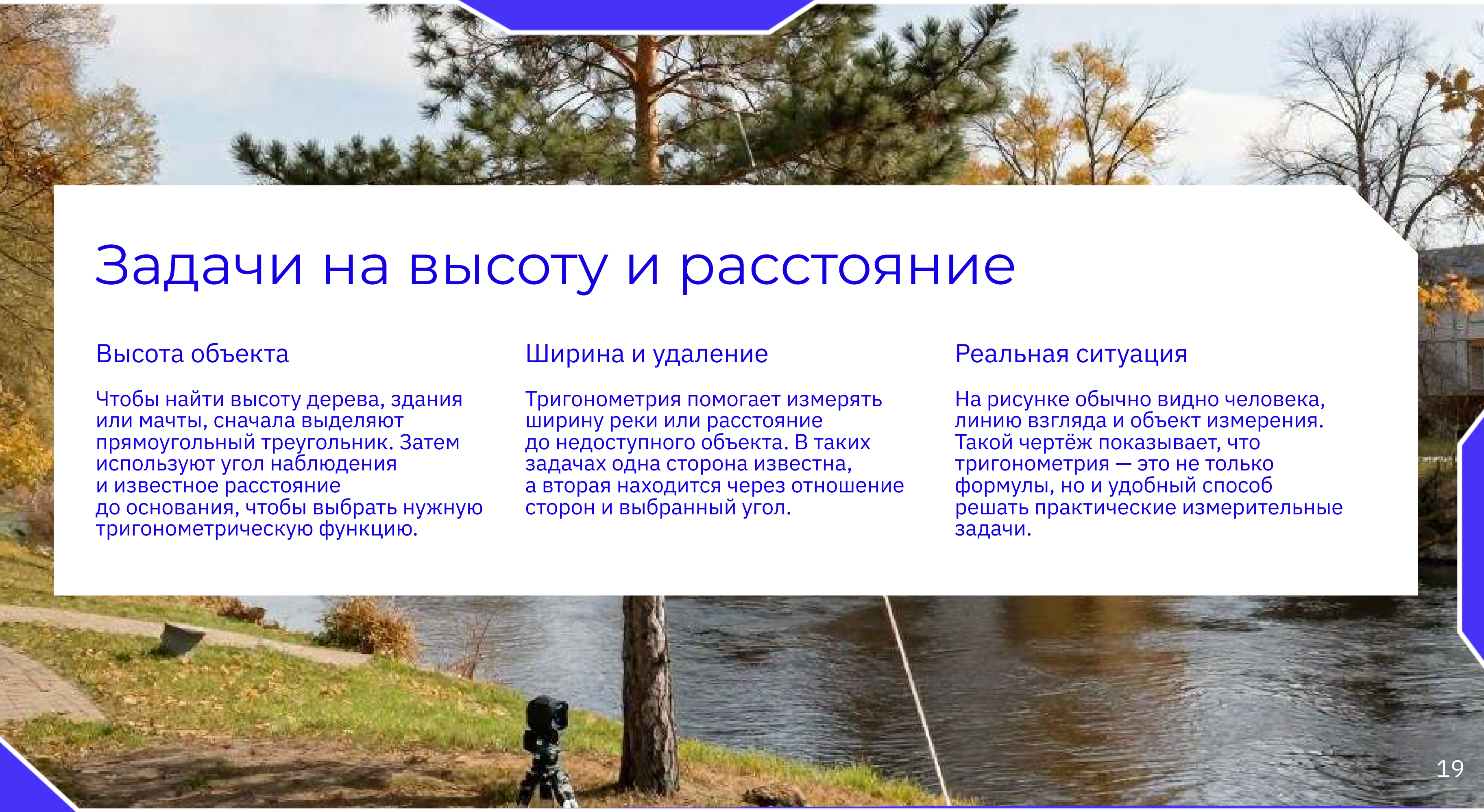
Краткая формульная памятка

Таблица напоминает основные формулы и показывает, как быстро сверять их с точками на окружности и соотношениями в прямоугольном треугольнике.

Синус и косинус удобно проверять по особым углам, а для тангенса и котангенса важно помнить, где они не определены.

Функция	Формула	Пояснение
$\sin \alpha$	против./гип.	0° и 90°
$\cos \alpha$	прил./гип.	0° и 180°
$\operatorname{tg} \alpha$	против./прил.	$90^\circ + 180^\circ k$
$\operatorname{ctg} \alpha$	прил./против.	$180^\circ k$

Школьная формульная запись по теме «Тригонометрические функции»



Задачи на высоту и расстояние

Высота объекта

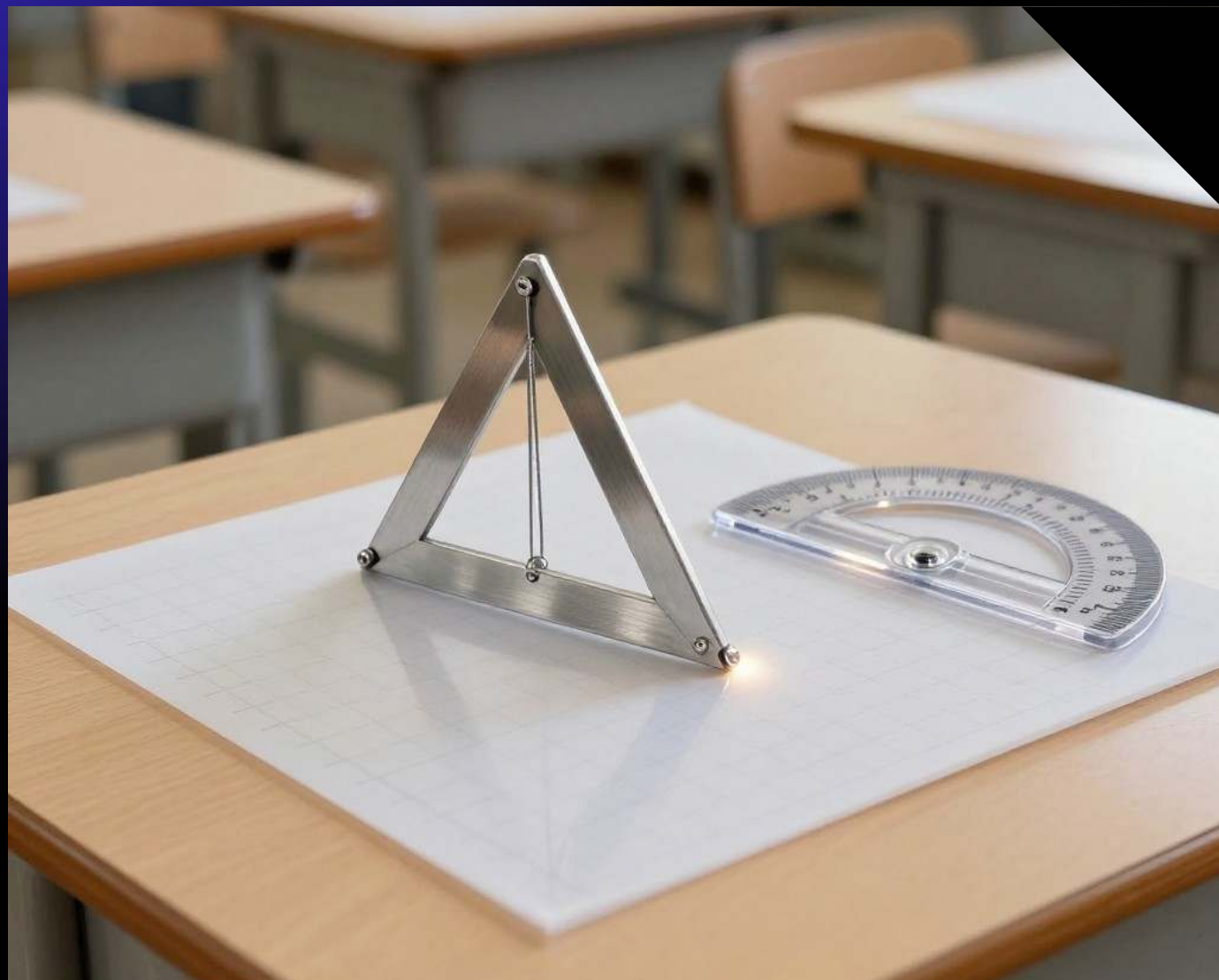
Чтобы найти высоту дерева, здания или мачты, сначала выделяют прямоугольный треугольник. Затем используют угол наблюдения и известное расстояние до основания, чтобы выбрать нужную тригонометрическую функцию.

Ширина и удаление

Тригонометрия помогает измерять ширину реки или расстояние до недоступного объекта. В таких задачах одна сторона известна, а вторая находится через отношение сторон и выбранный угол.

Реальная ситуация

На рисунке обычно видно человека, линию взгляда и объект измерения. Такой чертёж показывает, что тригонометрия — это не только формулы, но и удобный способ решать практические измерительные задачи.



Тригонометрические функции показывают, как связаны угол, стороны треугольника, координаты точки и график. Эти знания помогают решать задачи, проверять ответы и понимать реальные процессы вокруг нас.

Тригонометрия соединяет углы,
стороны и графики