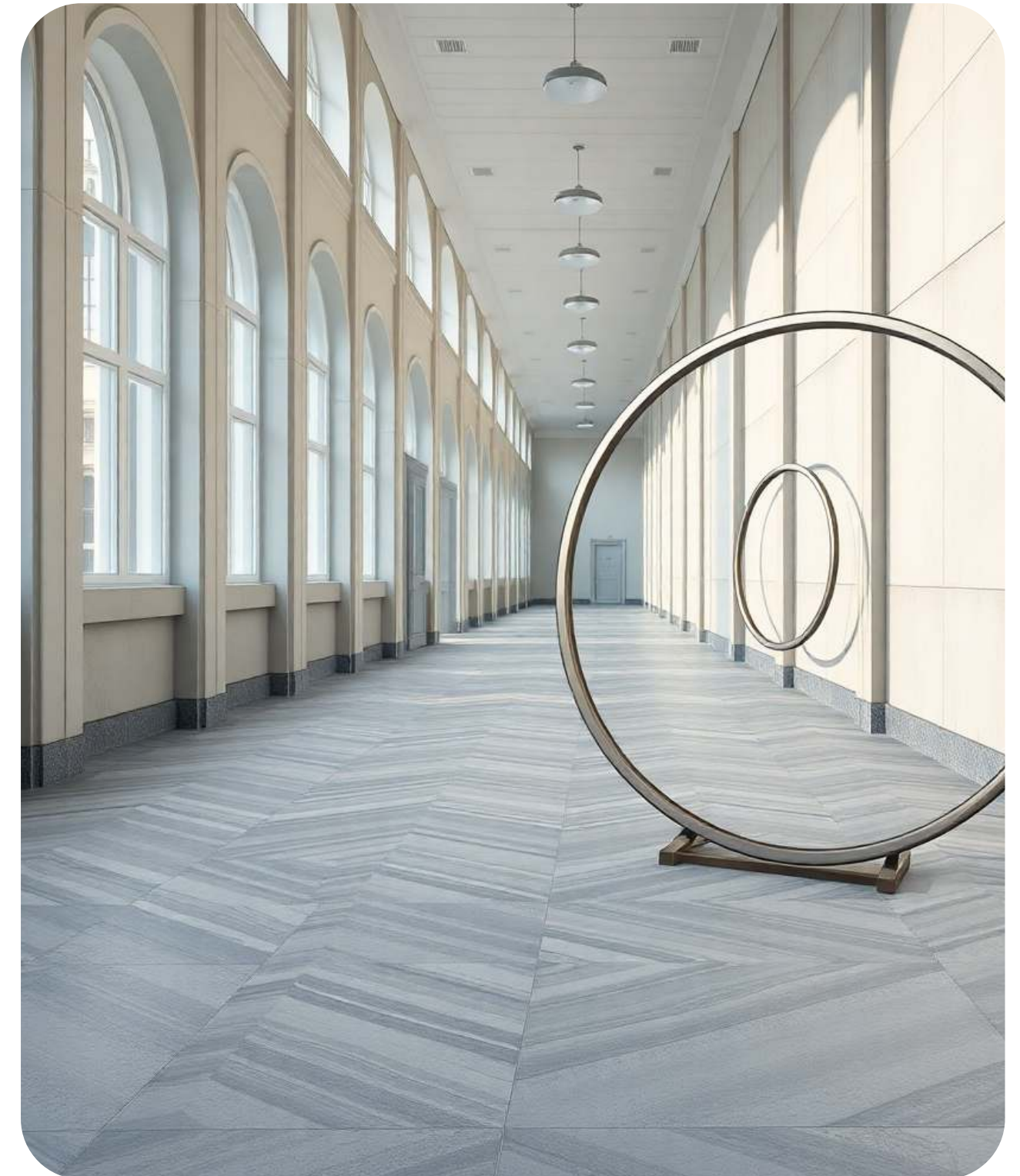




Чётность, нечётность и периодичность тригонометрических функций

Симметрия и повторяемость в графиках
 $\sin$, $\cos$, tg и ctg



Зачем нужны эти свойства в 10 классе



Чётность, нечётность и периодичность позволяют быстро преобразовывать тригонометрические выражения, узнавать графики и находить решения уравнений. Эти свойства делают вычисления короче и помогают видеть общие закономерности в математике и физике.



Определение чётной и нечётной функции



01

Чётная функция

Функция называется чётной, если для каждого допустимого x выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Её график зеркально симметричен относительно оси Oy , поэтому левая и правая части совпадают.

02

Нечётная функция

Функция называется нечётной, если для каждого x из области определения верно $f(-x)=-f(x)$. Такой график обладает симметрией относительно начала координат: точка и её образ поворачиваются на 180 градусов.

03

Как проверяют свойство

Для проверки достаточно заменить x на $-x$, упростить выражение и сравнить результат с исходной функцией. Если получилось то же самое, функция чётная; если противоположное — нечётная.

04

Что важно помнить

Проверка всегда проводится только на области определения функции. Если при подстановке $-x$ выражение перестаёт быть допустимым, вывод о чётности или нечётности делать нельзя без учёта ограничений.

Синус и косинус на графике



Синус — нечётная функция

Для синуса выполняется формула $\sin(-x) = -\sin x$, поэтому его график симметричен относительно начала координат. Точки с противоположными абсциссами имеют противоположные ординаты.



Косинус — чётная функция

Для косинуса верно $\cos(-x) = \cos x$, значит график симметричен относительно оси Oy . Значения слева и справа от нуля совпадают, что хорошо видно на волнообразной кривой.



Сравнение графиков

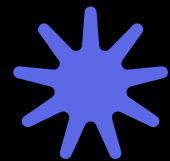
Обе функции имеют гладкий непрерывный вид и одинаковую амплитуду, но отличаются симметрией. Именно это помогает быстро узнавать, где расположен синус, а где косинус.



Геометрический смысл

Симметрия графиков позволяет сразу предсказывать значения функции без полного вычисления. Достаточно увидеть точку на одной стороне оси, чтобы определить соответствующую точку на другой.

Тангенс и котангенс: нечётность и ограничения области определения



01 Тангенс нечётен

Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечётной: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Это означает, что её график симметричен относительно начала координат, если рассматривать только допустимые значения аргумента.

02 Котангенс нечётен

Для котангенса также выполняется равенство $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Его график имеет ту же центральную симметрию, но отличается положением ветвей и вертикальных асимптот.

03 Ограничения для $\operatorname{tg} x$

Тангенс не определён при $x = \pi/2 + \pi k$, где $\cos x = 0$. В этих точках график имеет разрывы, поэтому нечётность рассматривают только на промежутках, входящих в область определения.

04 Ограничения для $\operatorname{ctg} x$

Котангенс не определён при $x = \pi k$, где $\sin x = 0$. Несмотря на разрывы, формула нечётности сохраняется на всех допустимых значениях, а это важно при построении графика.

Свойства основных тригонометрических функций



Функция	Свойство	Период
$\sin x$	нечётная	2π
$\cos x$	чётная	2π
$\operatorname{tg} x$	нечётная	π
$\operatorname{ctg} x$	нечётная	π

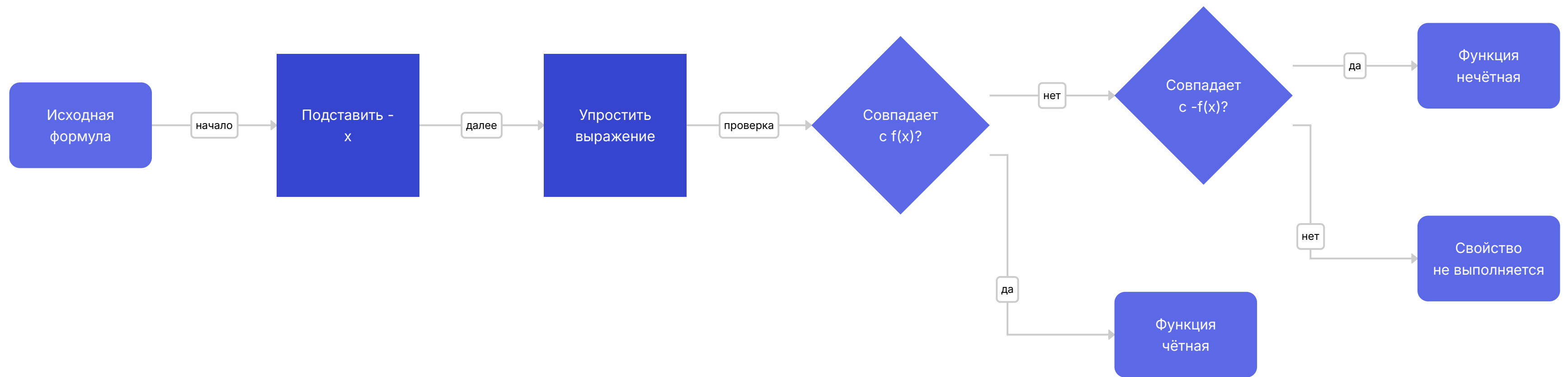
Базовые свойства тригонометрических функций из школьного курса алгебры

Сравнение показывает, как симметрия и период связаны с поведением графиков.

Синус и косинус имеют одинаковый период, но разную симметрию; тангенс и котангенс повторяются чаще, поэтому их период вдвое меньше.

Как определить чётность функции по формуле

Алгоритм проверки тригонометрической функции по её записи и тождествам.



Периодическая функция и основной период

Основной период

Из всех периодов выделяют наименьший положительный. Его называют основным периодом, потому что именно он полностью описывает повторение графика и удобен для вычислений.

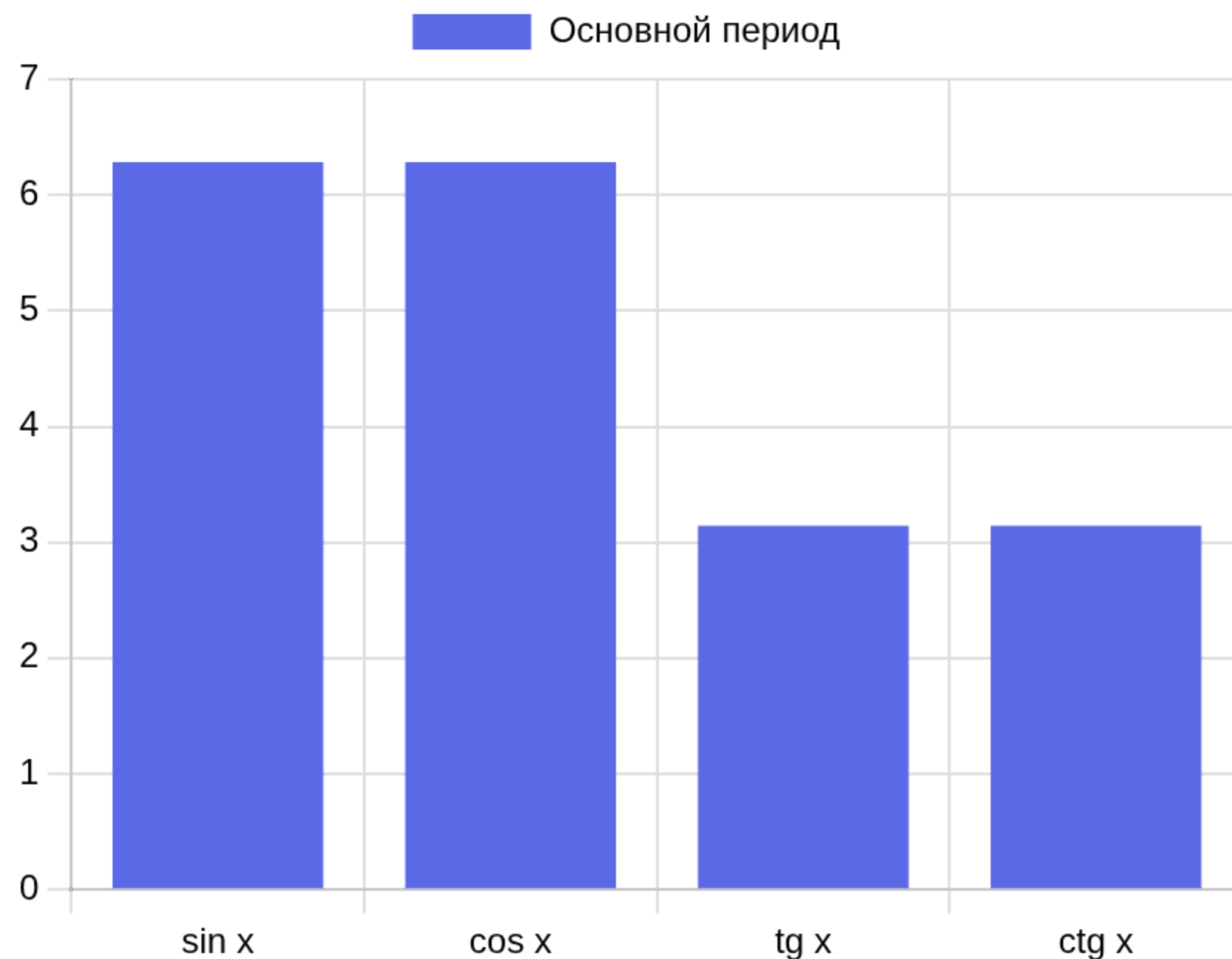
Определение

Функцию называют периодической, если существует число $T > 0$, при котором $f(x+T) = f(x)$ для любого допустимого x . Это условие задаёт повторяемость значений через равные промежутки.

Геометрический смысл

На графике периодичность означает, что одинаковый фрагмент можно сдвигать вдоль оси x на период, не меняя форму. Так график мысленно продолжается бесконечно.

Основные периоды тригонометрических функций



Сравнение показывает две группы функций: синус и косинус повторяются через 2π , а тангенс и котангенс — через π .

Меньший период у $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ означает более частое повторение графика и тесную связь с асимптотами.

Школьные свойства тригонометрических функций; значения периодов: 2π и π



Как период помогает выполнять вычисления

Сдвиг на период

Если функция периодична с периодом T , то значение $f(x)$ можно заменить на $f(x+nT)$, где n — любое целое число. Это позволяет выбирать удобный аргумент без изменения ответа.

Синус и косинус

Для $\sin x$ и $\cos x$ часто сводят угол к промежуткам $[0; 2\pi]$ или $[-\pi; \pi]$. Так проще использовать известные значения и быстрее ориентироваться на окружности и графике.

Тангенс и котангенс

Для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ удобно работать с промежутками длиной π , потому что именно через такой шаг значения повторяются. Это особенно полезно при больших аргументах.

Практическая польза

Период помогает сократить вычисления и избежать лишних преобразований. В задачах с уравнениями и графиками он позволяет быстро получить новые решения из уже найденных.

Графическая интерпретация периодичности



Одинаковая волна на оси x

Графики синуса и косинуса похожи на спокойную волну, которая точно повторяет себя через каждые 2π . Если мысленно сдвинуть один участок вправо или влево на этот промежуток, форма линии не изменится. Именно поэтому их легко узнавать среди других кривых.



Повторение ветвей и асимптот

У тангенса и котангенса периодичность видно не только по повторению формы, но и по расположению вертикальных асимптот. Каждая новая часть графика появляется после сдвига на π , сохраняя тот же рисунок. Для школьника это наглядный признак периодической функции.

Правила чётности для суммы и произведения функций



01

Сумма чётных

Если две функции симметричны относительно оси Oy , то и их сумма сохраняет эту симметрию. При подстановке $-x$ в обе части получается тот же результат, поэтому сумма остаётся чётной.

02

Сумма нечётных

Когда обе функции меняют знак при замене x на $-x$, их сумма тоже меняет знак. Это означает, что сумма двух нечётных функций является нечётной.

03

Произведение чётных

Произведение двух чётных функций остаётся чётным, потому что каждая из них не меняется при замене x на $-x$. В результате произведение ведёт себя так же, как исходные функции.

04

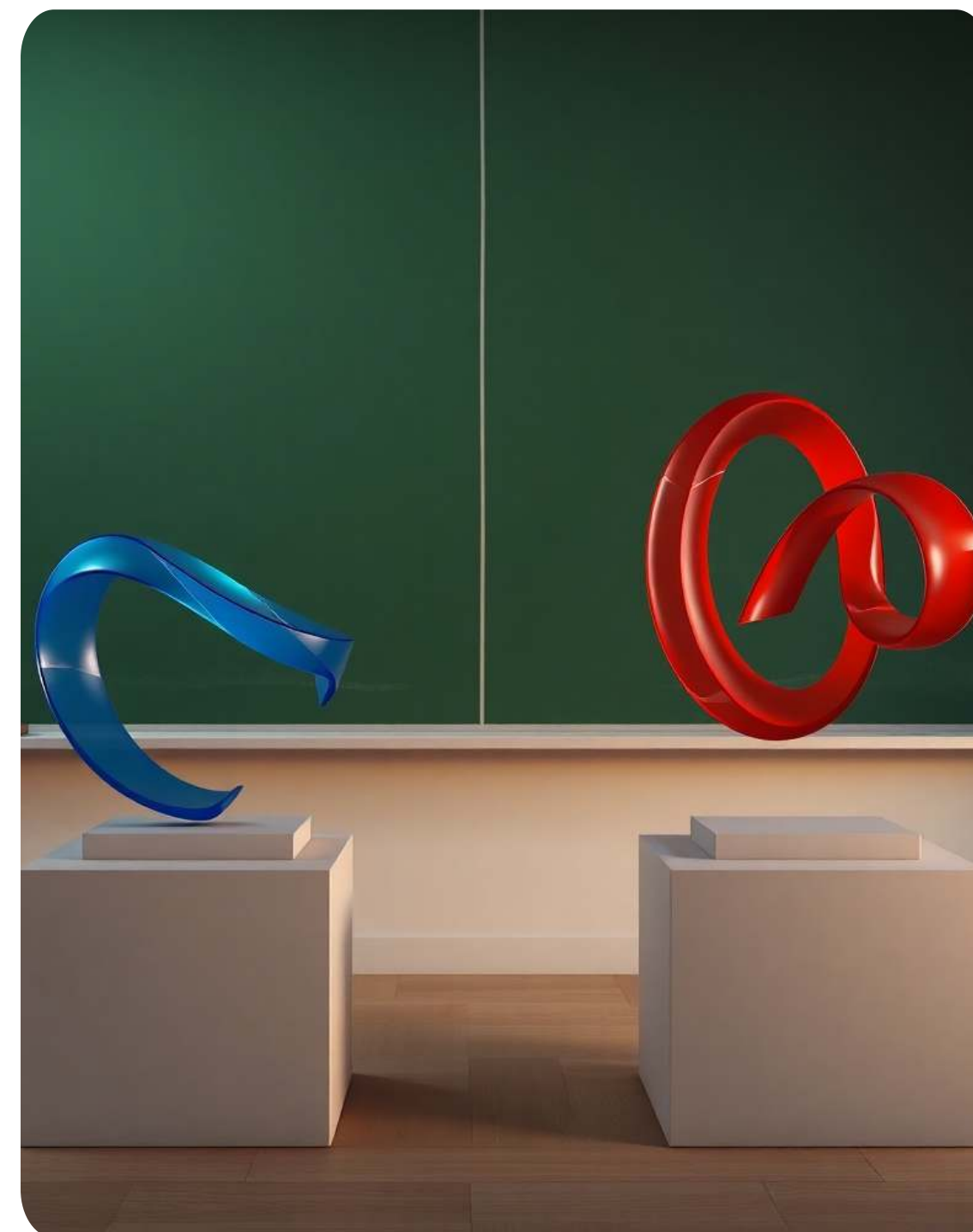
Произведение нечётных

Если обе функции нечётные, то при замене x на $-x$ возникают два минуса, которые взаимно уничтожаются. Поэтому произведение двух нечётных функций оказывается чётным.

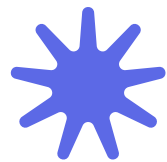
05

Смешанное произведение

Произведение чётной и нечётной функции становится нечётным: одна часть сохраняется, а другая меняет знак. Это правило удобно для анализа сложных выражений без построения графика.



Примеры преобразований аргумента



Выражение	Результат
$\sin(-x)$	$-\sin x$
$\cos(-x)$	$\cos x$
$\operatorname{tg}(x+\pi)$	$\operatorname{tg} x$
$\sin(x+2\pi)$	$\sin x$

Таблица показывает, как замена аргумента и сдвиг на период меняют значения основных тригонометрических функций.

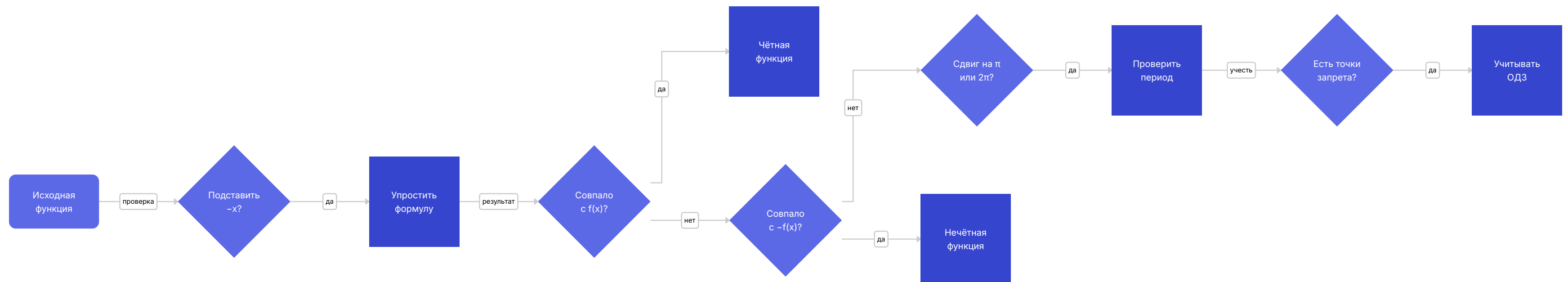
Замена на $-x$ помогает установить чётность или нечётность, а сдвиг на π или 2π показывает период и возможную смену знака.

Школьные формулы приведения и свойства тригонометрических функций

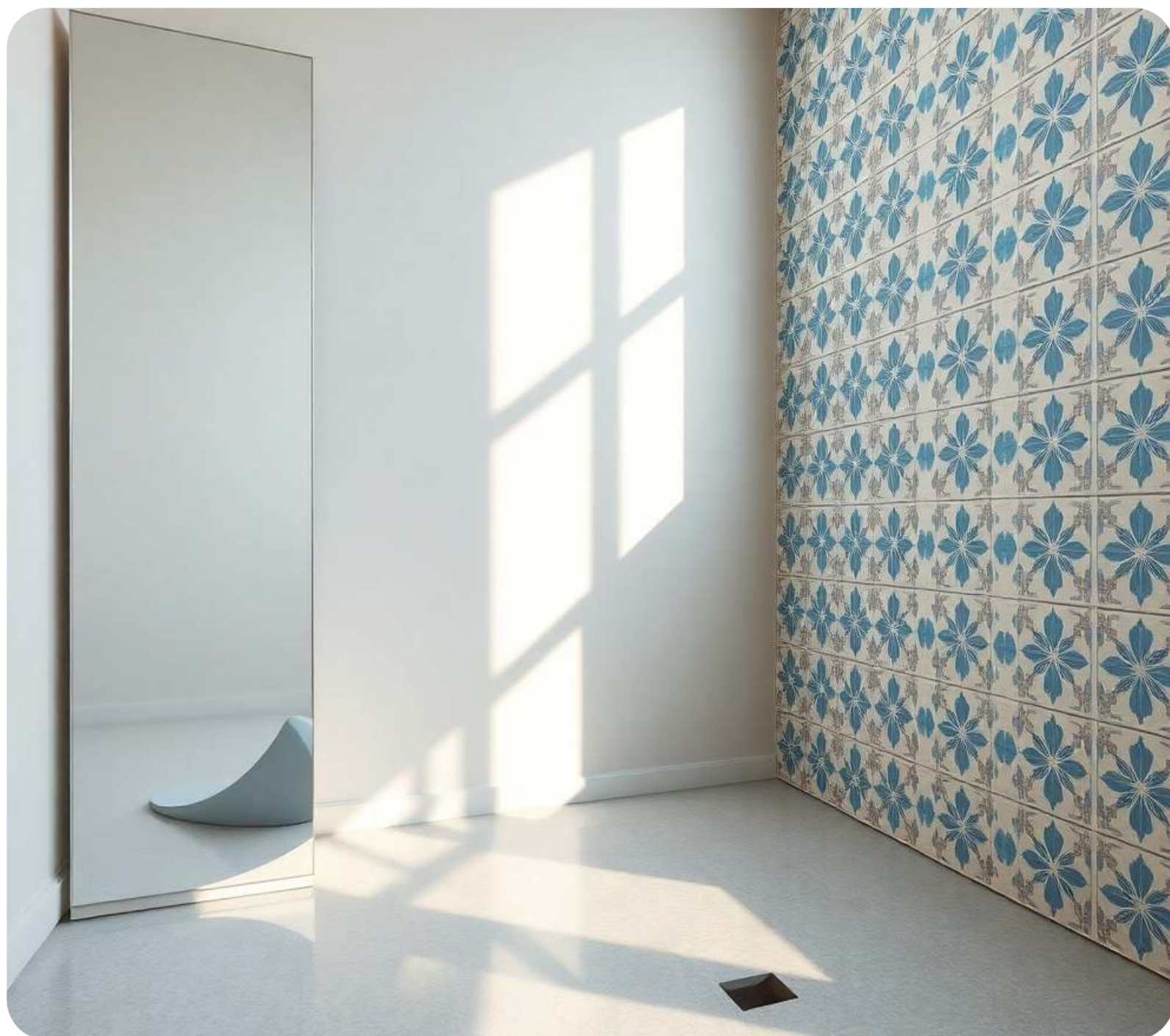


Связь формул преобразования аргумента со свойствами функций

Алгоритм проверки свойств по формулам и области определения



Типичные ошибки при изучении темы



Забывают область определения

Для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ нельзя проверять свойства только по формуле, не учитывая запрещённые значения. Если точка не входит в область определения, вывод о чётности или периодичности в ней делать нельзя.



Путают симметрию и период

Чётность и периодичность описывают разные свойства. Первая связана с отражением графика, вторая — с его повторением, поэтому одно не заменяет другое и не следует из него автоматически.



Смотрят на один пример

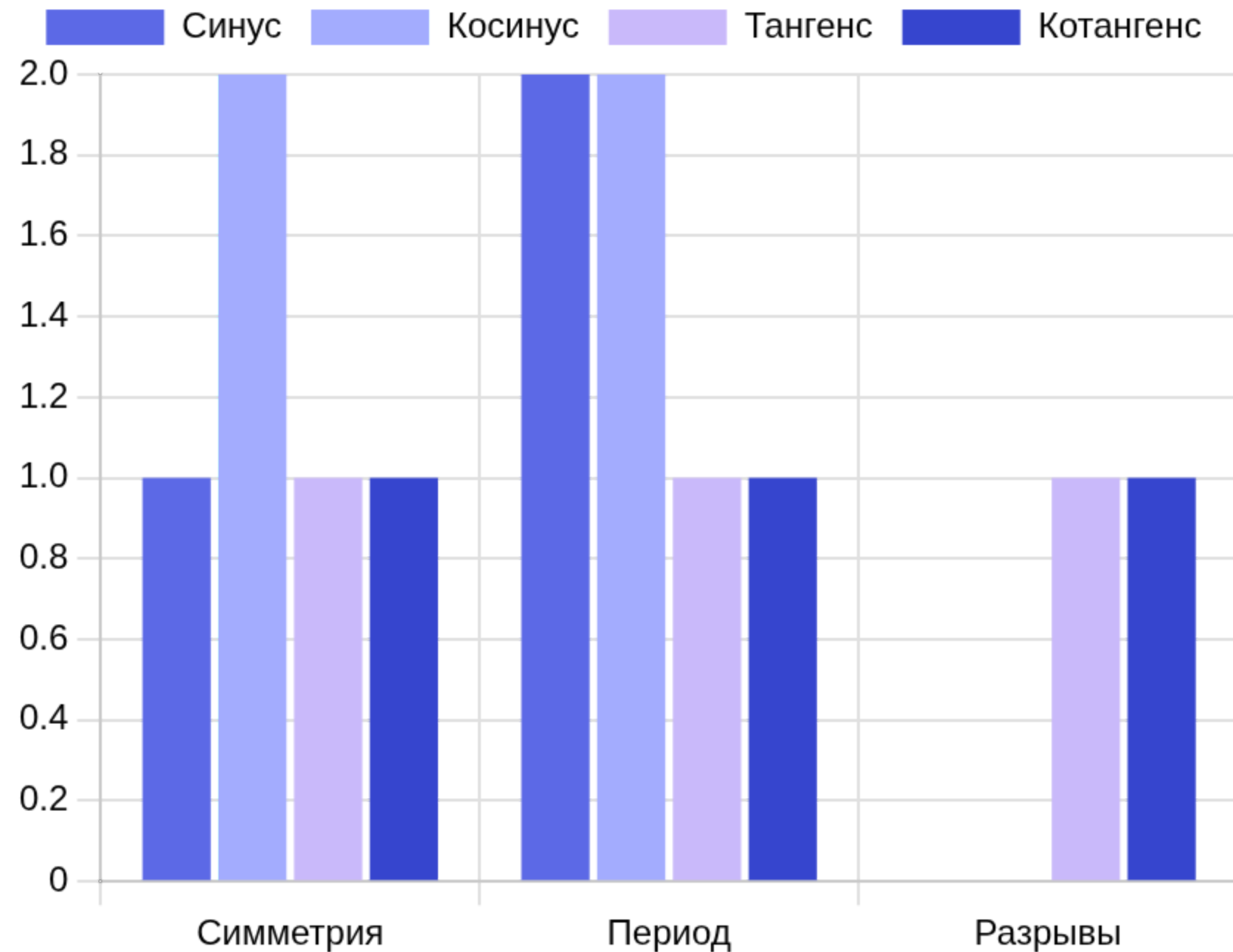
Проверка по одному значению может совпасть случайно и не доказывает свойство функции. Нужно использовать общее равенство $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$ для всех допустимых x .



Считают периодичность достаточной

Не каждая периодическая функция обязательно чётная или нечётная. Период лишь говорит о повторяемости значений, а симметрия требует отдельной проверки по определению.

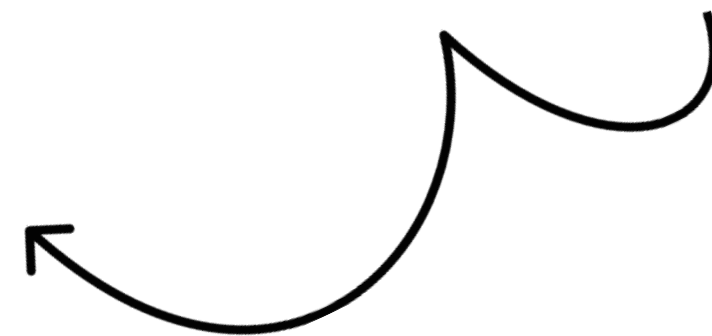
Сравнение свойств основных тригонометрических функций



На диаграмме видно, что косинус выделяется чётностью, а тангенс и котангенс отличаются более коротким периодом и наличием разрывов.

Все четыре функции периодические, но только $\cos x$ чётная; у $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ период вдвое меньше, чем у $\sin x$ и $\cos x$.

Обобщение свойств тригонометрических функций из школьного курса алгебры



Применение в физике и реальных процессах



Колебания и волны

Синус и косинус удобно описывают маятник, звук и электромагнитные колебания, потому что эти процессы повторяются через равные промежутки времени. По графику легко увидеть амплитуду, фазу и период, а значит, понять поведение системы без сложных вычислений.



Вращение и движение

При описании вращения точки по окружности тригонометрические функции связывают угол, положение и время. Периодичность здесь отражает полный оборот, после которого состояние системы повторяется. Это делает формулы компактными и наглядными для инженерных моделей.



Симметрия в задачах

Чётность и нечётность помогают замечать симметрию в физических и вычислительных моделях, а также сокращать число промежуточных шагов. В школьных задачах это особенно полезно при анализе графиков, таблиц значений и формул, где важно быстро увидеть структуру зависимости.

Как свойства функций помогают в решении уравнений



01

Используйте симметрию

Если функция чётная, достаточно сначала рассмотреть неотрицательные значения x , а затем отразить найденные решения относительно оси Oy . Это уменьшает число случаев и ускоряет поиск ответов.

02

Ищите парные решения

Для нечётной функции решения обычно появляются парами: x и $-x$. Поэтому, найдя одно значение, можно сразу добавить симметричное ему, не выполняя полный пересчёт.

03

Применяйте период

Когда функция периодическая, одно найденное решение порождает бесконечное множество новых. Достаточно прибавлять или вычитать период, чтобы получить все остальные ответы того же уравнения.

Краткий итог по основным тригонометрическим функциям



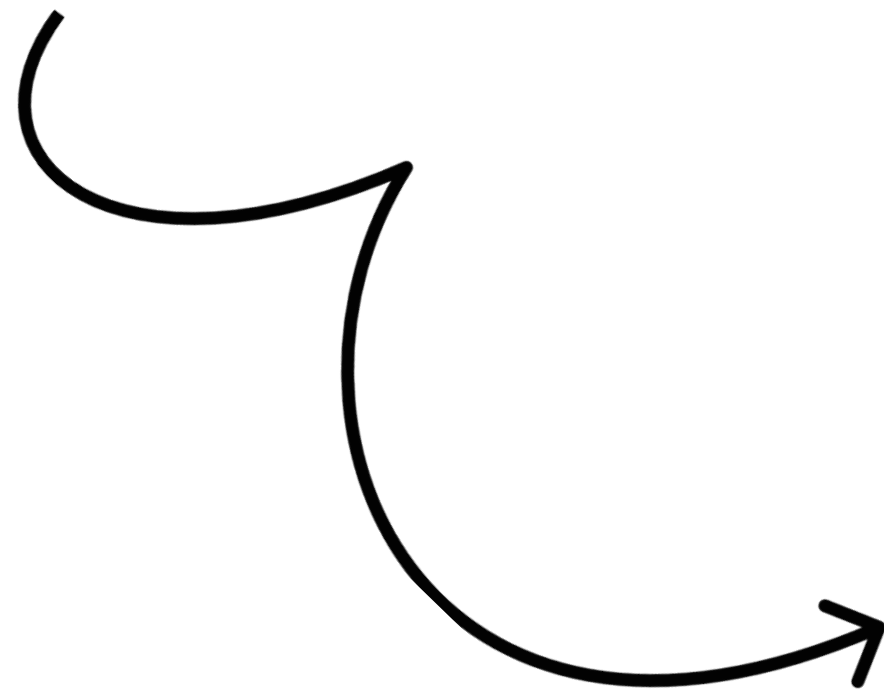
Функция	Свойство	Период	График
$\sin x$	нечётная	2π	непрерывный
$\cos x$	чётная	2π	непрерывный
$\operatorname{tg} x$	нечётная	π	с разрывами
$\operatorname{ctg} x$	нечётная	π	с разрывами

Сводка свойств тригонометрических функций из школьного курса алгебры

Таблица собирает в одном месте симметрию, период и особенности графиков четырёх основных функций.

Синус и косинус имеют одинаковый период, но разную симметрию; тангенс и котангенс повторяются чаще и требуют учёта разрывов.

Три свойства, которые работают вместе



Чётность, нечётность и периодичность дополняют друг друга: они помогают понимать графики, быстро преобразовывать формулы и уверенно решать задачи. Для тригонометрических функций это не отдельные правила, а единый инструмент анализа.

