

Тригонометрические функции: основные понятия и свойства

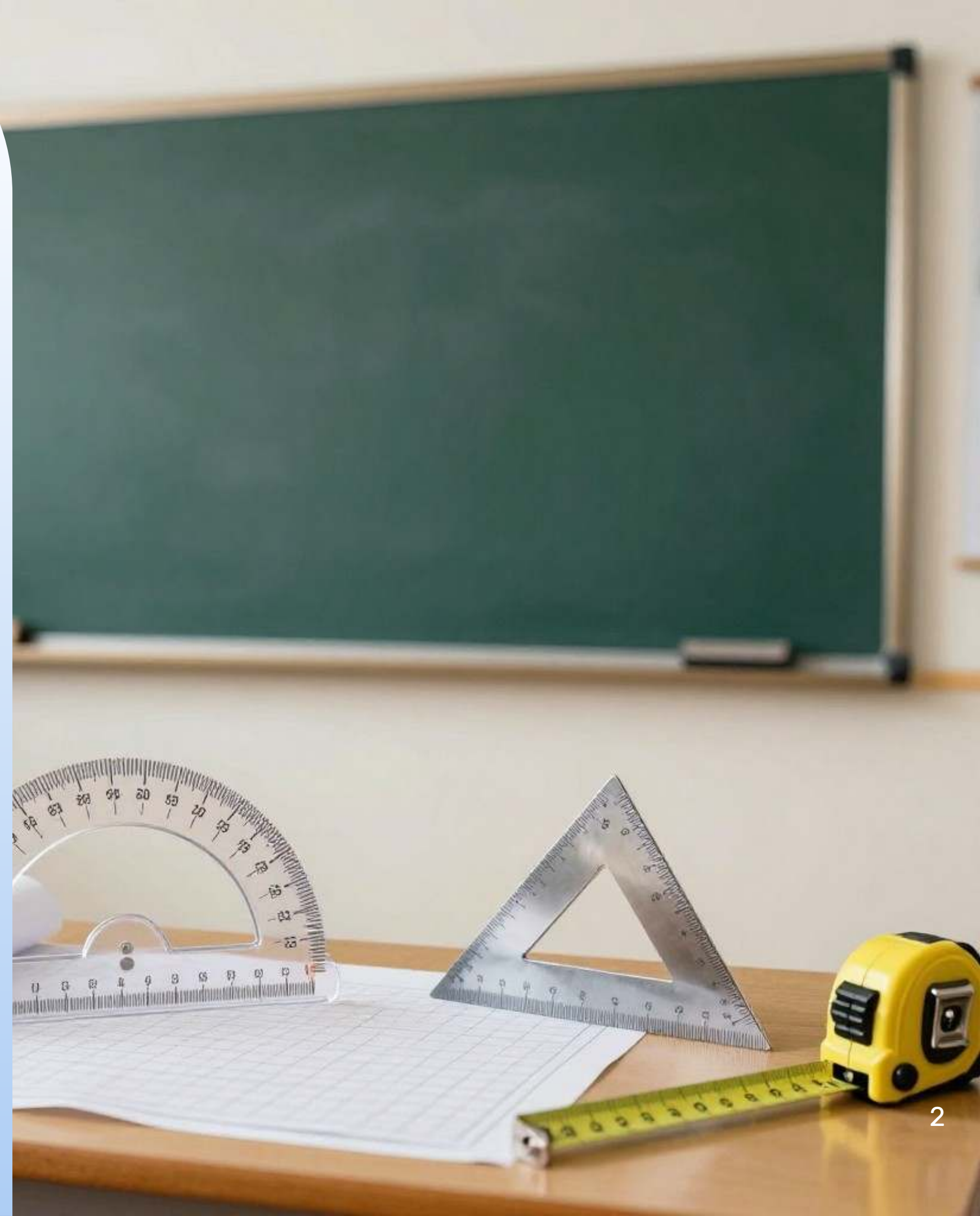
Тригонометрия связывает угол, координаты точки на окружности и периодические процессы.



Зачем нужны тригонометрические функции в школьной математике



Тригонометрия объединяет геометрию и координаты: единицы измерения угла переходят в удобные формулы. Радианы упрощают расчёты (2π — полный оборот, π — поворот). Функции применяются в физике, навигации и моделировании колебаний.



Единичная окружность как основа определения

:::

+

Единичная окружность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Точка, соответствующая углу α , задаёт координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

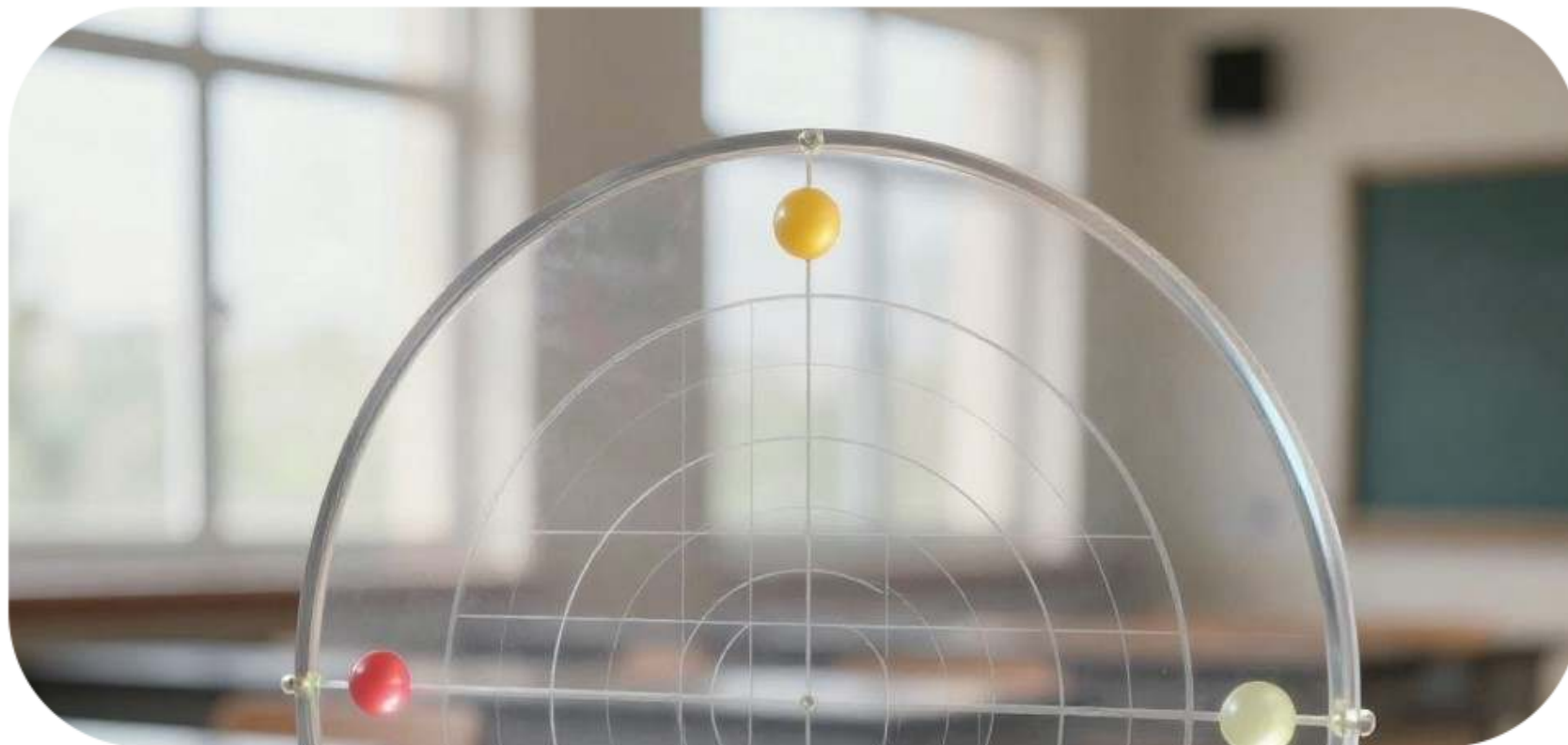
+

В таком подходе синус — это ордината точки на окружности, а косинус — её абсцисса. Поэтому знаки функций автоматически «считываются» с координат плоскости.

+

Определение работает для любых углов: острых, тупых, отрицательных и даже для значений, превышающих 2π . Знаки в каждой четверти позволяют быстро ориентироваться в ответах.

Синус и косинус: основные свойства и опорные точки



+ Опорные значения на единичной окружности

Опорные точки удобно запоминать: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin \pi/2 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$. На единичной окружности эти значения соответствуют положениям для углов 0 , $\pi/2$, π и $3\pi/2$.

+ Диапазон и периодичность

Значения $\sin x$ и $\cos x$ всегда лежат в промежутке от -1 до 1 . Обе функции периодические: для них период равен 2π , то есть графики повторяются через один полный оборот.

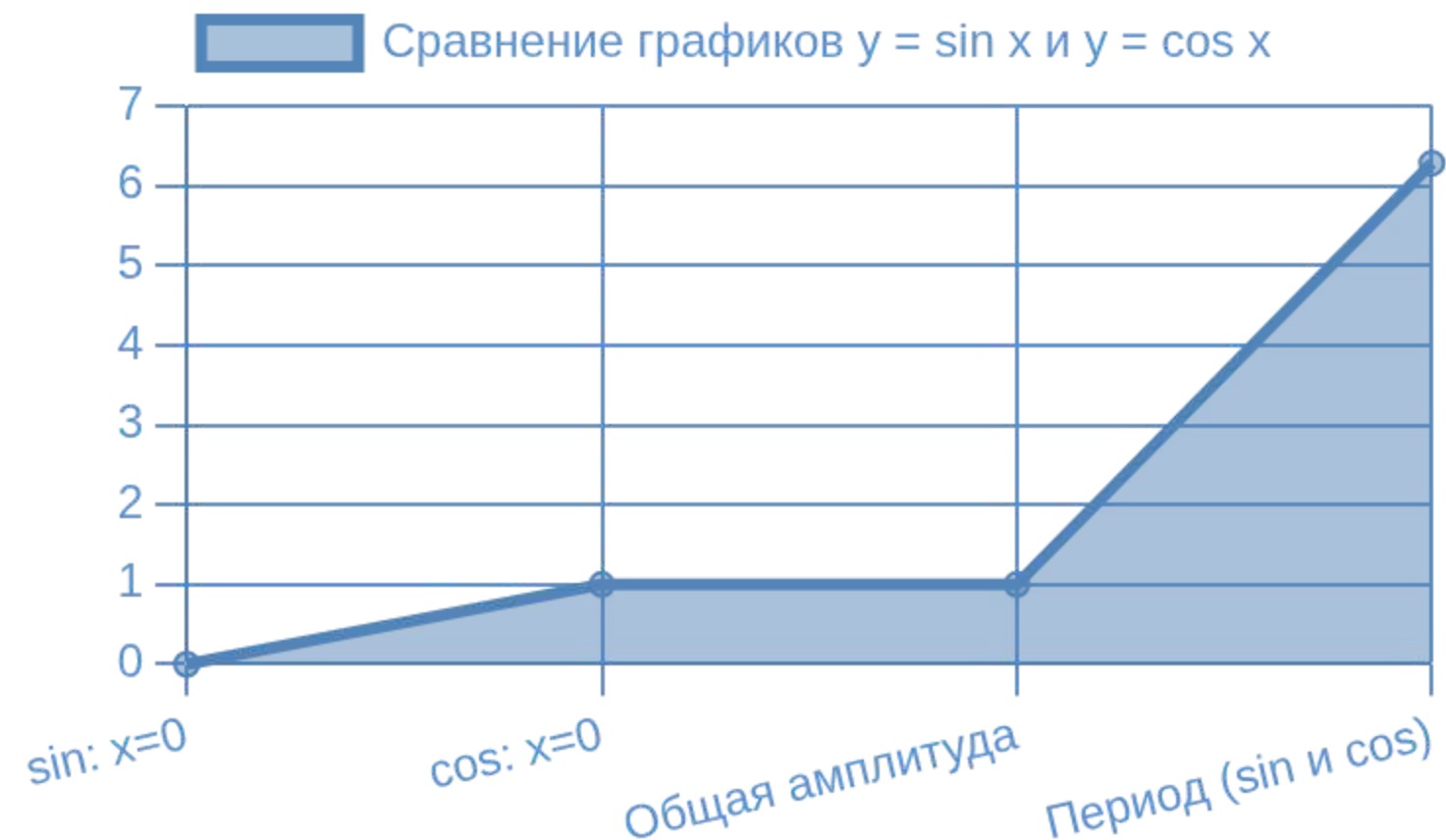
Таблица значений тригонометрических функций для стандартных углов



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0	0	1	не опр.	не опр.
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	не опр.	0

- + Используйте таблицу, чтобы быстро находить $\sin$, $\cos$, $\tan$ и $\cot$ для типовых углов и проверять решения.
- + В таблице видно, что $\tan$ и $\cot$ «ломаются» там, где знаменатель равен нулю: у $\tan$ – при $\cos \alpha = 0$, у $\cot$ – при $\sin \alpha = 0$.
- Справочные значения для стандартных углов (школьный курс, 10 класс)

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$



У $\sin x$ максимум приходится на середину интервала между нулями, а $\cos x$ — на момент, когда $x=0$; кривые сдвинуты на $\pi/2$.

Сдвиг на $\pi/2$ легко распознать по тому, где каждая функция пересекает ось Ox и достигает максимумов, при одинаковой амплитуде и периоде.

Собственные построения по известным свойствам $\sin$ и $\cos$, без привязки к внешним данным

Тангенс и котангенс как отношения синуса и косинуса

:::

+

Тангенс задаётся как $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, то есть он выражает «наклон» относительно положения точки на окружности. Котангенс равен $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$.

+

Для $\tan \alpha$ знаменатель $\cos \alpha$ не должен быть равен нулю, поэтому функция не определена при углах вида $\pi/2 + \pi k$. Эти значения соответствуют точкам, где касательная вертикальна.

+

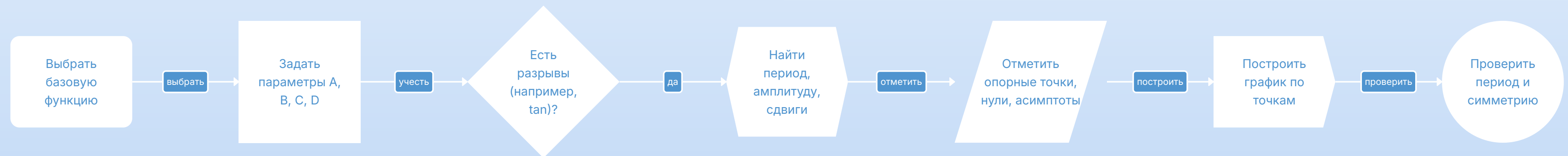
Для $\cot \alpha$ знаменатель $\sin \alpha$ тоже не должен быть нулевым, значит котангенс не определён при углах вида πk . В них касательная горизонтальна, а отношение становится невозможным.

+

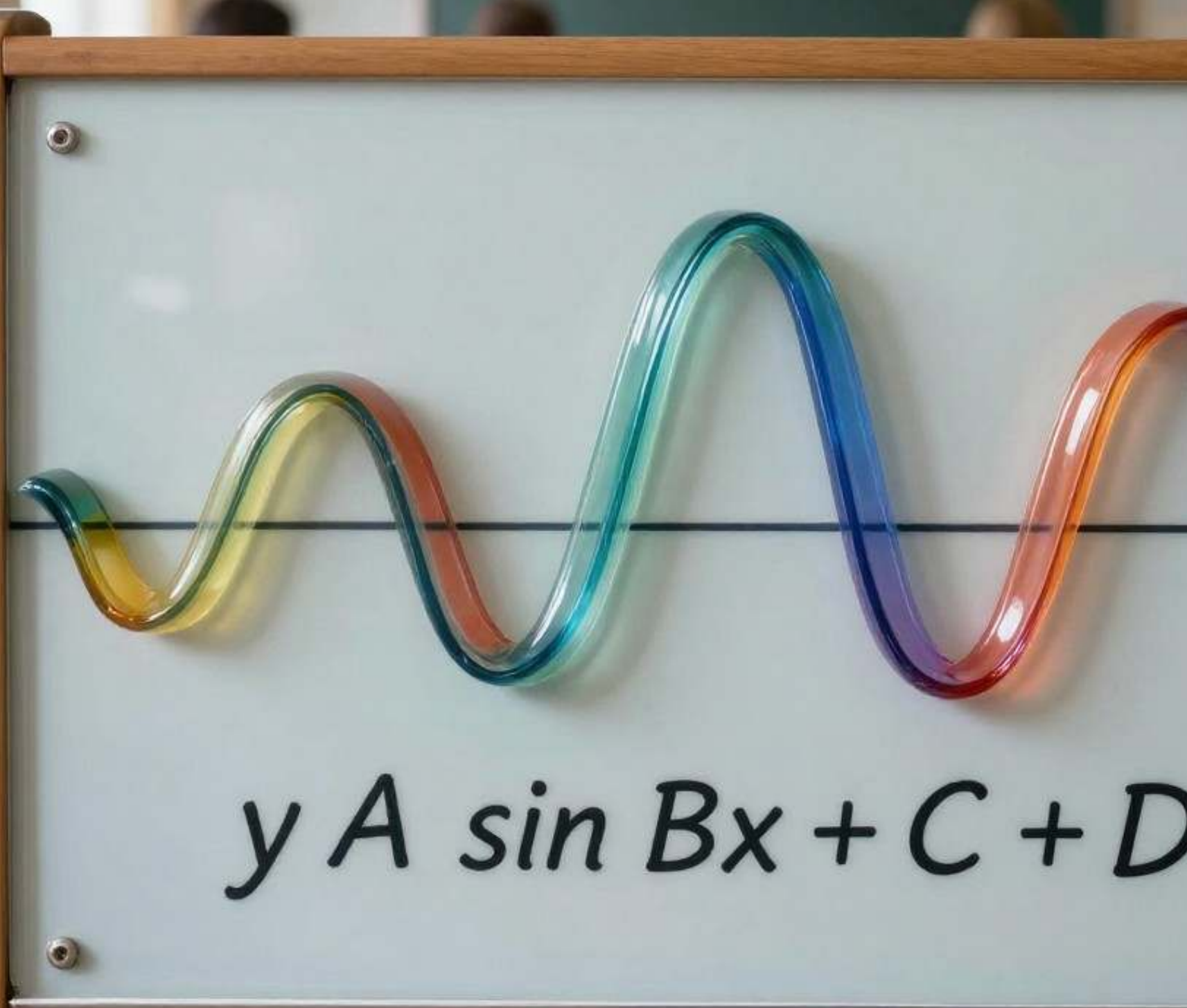
Обе функции имеют период π и не ограничены сверху и снизу: при приближении к точкам разрыва значения стремятся к бесконечности по модулю, формируя характерные «ветви» графика.

Последовательность построения графика тригонометрической функции

Алгоритм применим к $\sin x$, $\cos x$ и $\tan x$ (и к их преобразованиям)



Преобразования графиков: сдвиги, растяжения и отражения



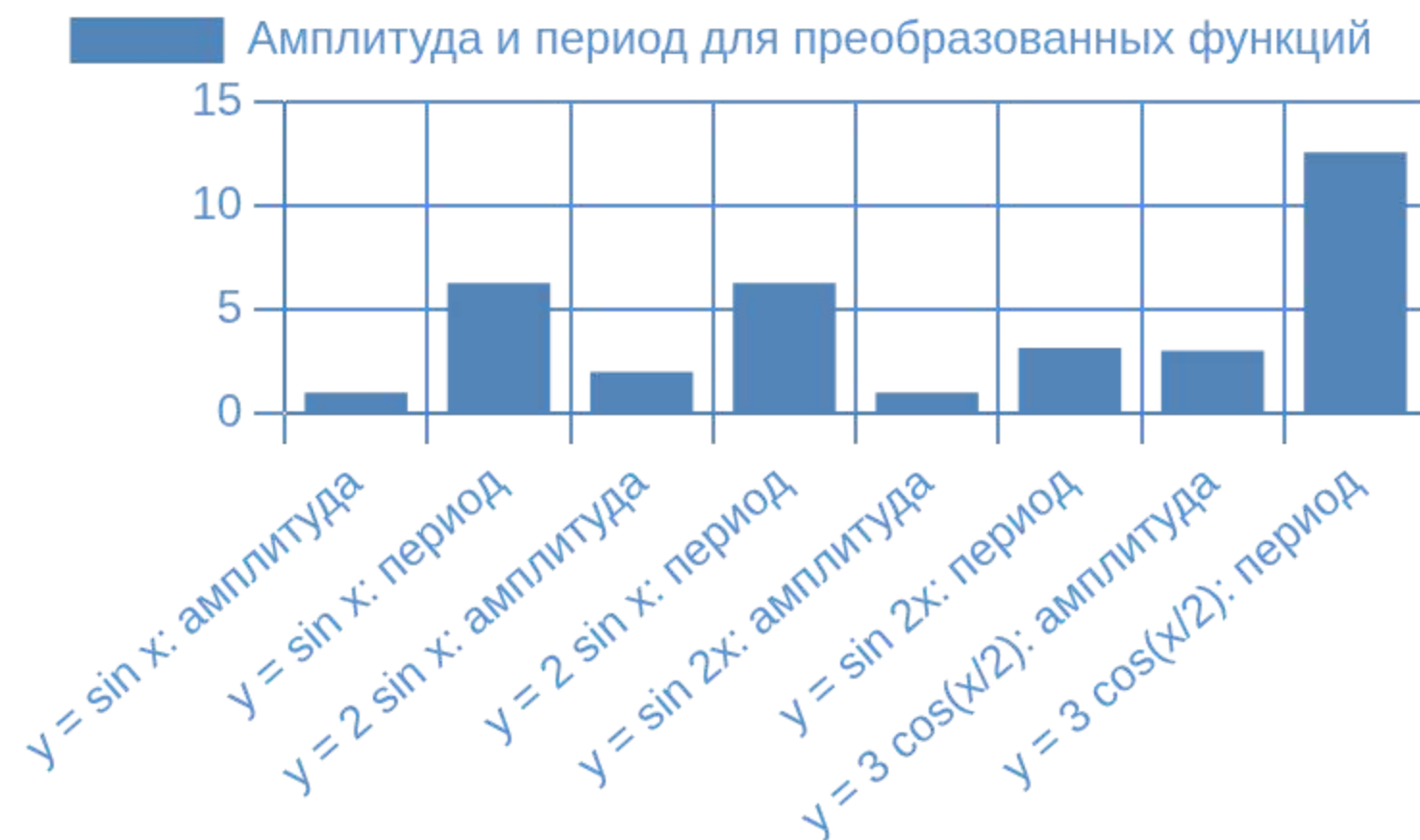
1

Формула $y = A \sin(Bx + C) + D$ задаёт амплитуду $|A|$ и период $2\pi/|B|$. Горизонтальный сдвиг равен $-C/B$, а вертикальный сдвиг $-D$; именно эти параметры «управляют» положением и повторяемостью.

2

При $A < 0$ происходит отражение относительно оси Ox , то есть график переворачивается. Если $D \neq 0$, кривая смещается вверх или вниз без изменения формы; на примере $y = 2 \sin(x - \pi/3) + 1$ видно, как работает сдвиг и масштаб.

Как коэффициенты влияют на амплитуду и период



Коэффициент при $\sin$ или $\cos$ меняет высоту колебаний, а коэффициент при x определяет, как часто график повторяется.

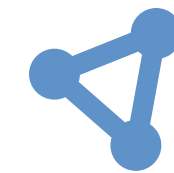
Сравнение показывает: амплитуда зависит от множителя перед функцией, а период — от скорости изменения аргумента (коэффициента при x).

Собранные из формулы периода и амплитуды для данных выражений значения; без внешних измерений

Основные тождества и симметрии

Фундаментальное тождество

Связь синуса и косинуса задаётся тождеством $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Оно появляется, когда точка на единичной окружности рассматривается как катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.



Нечётность синуса

Свойство $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ говорит, что синус меняет знак при смене угла на противоположный. Это удобно при упрощении выражений и при приведении задач к стандартным значениям.



Чётность косинуса

Факт $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ означает: косинус сохраняет знак при $\alpha \rightarrow -\alpha$. В практических преобразованиях он помогает сокращать громоздкие формулы без потери смысла.



Поведение $\tan$ и $\cot$

Для касательных и котангенсов действуют знаки: $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ и $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$. Эти правила применяют осторожно, учитывая области определения, где функции могут быть недоступны.

Формулы приведения и знаки в разных четвертях

- Учебные материалы по тригонометрии (школьный курс, правила четвертей и формулы приведения).

Пример	Преобразование	Знак результата
$\sin(\pi-\alpha)$	$\sin \alpha$	+ (для sin)
$\cos(\pi+\alpha)$	$-\cos \alpha$	- (для cos)
$\sin(3\pi/2-\alpha)$	$-\cos \alpha$	-
$\cos(2\pi-\alpha)$	$\cos \alpha$	+
$\tan(\pi-\alpha)$	$-\tan \alpha$	-
$\cot(\pi+\alpha)$	$-\cot \alpha$	-

Знаки тригонометрических функций определяются положением конечной стороны угла в координатной плоскости. Формулы приведения переводят углы из «неудобных» областей к острым, сохраняя соответствующий знак.

Одинаковые по смыслу углы из разных четвертей отличаются знаком. Перевод к острому углу снижает вычислительную нагрузку: чаще всего достаточно найти базовое значение и добавить знак по четверти.

Формулы сложения и двойного угла

:::

+

Формулы вида $\sin(a \pm b)$ и $\cos(a \pm b)$ выражают синус и косинус суммы или разности через тригонометрические функции отдельных углов. Они служат инструментом для преобразования выражений без перехода к «числам».

+

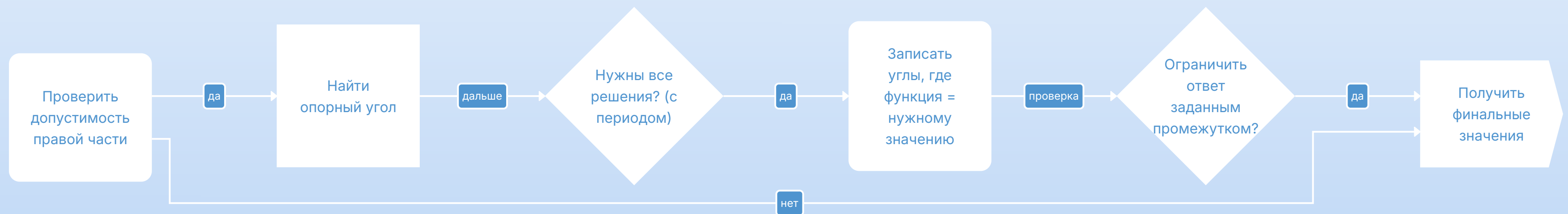
Для касательной используется правило $\tan(a \pm b)$: оно связывает $\tan(a)$ и $\tan(b)$ с $\tan(a \pm b)$. Эти формулы особенно полезны, когда нужно упростить отношение или привести выражение к рациональному виду.

+

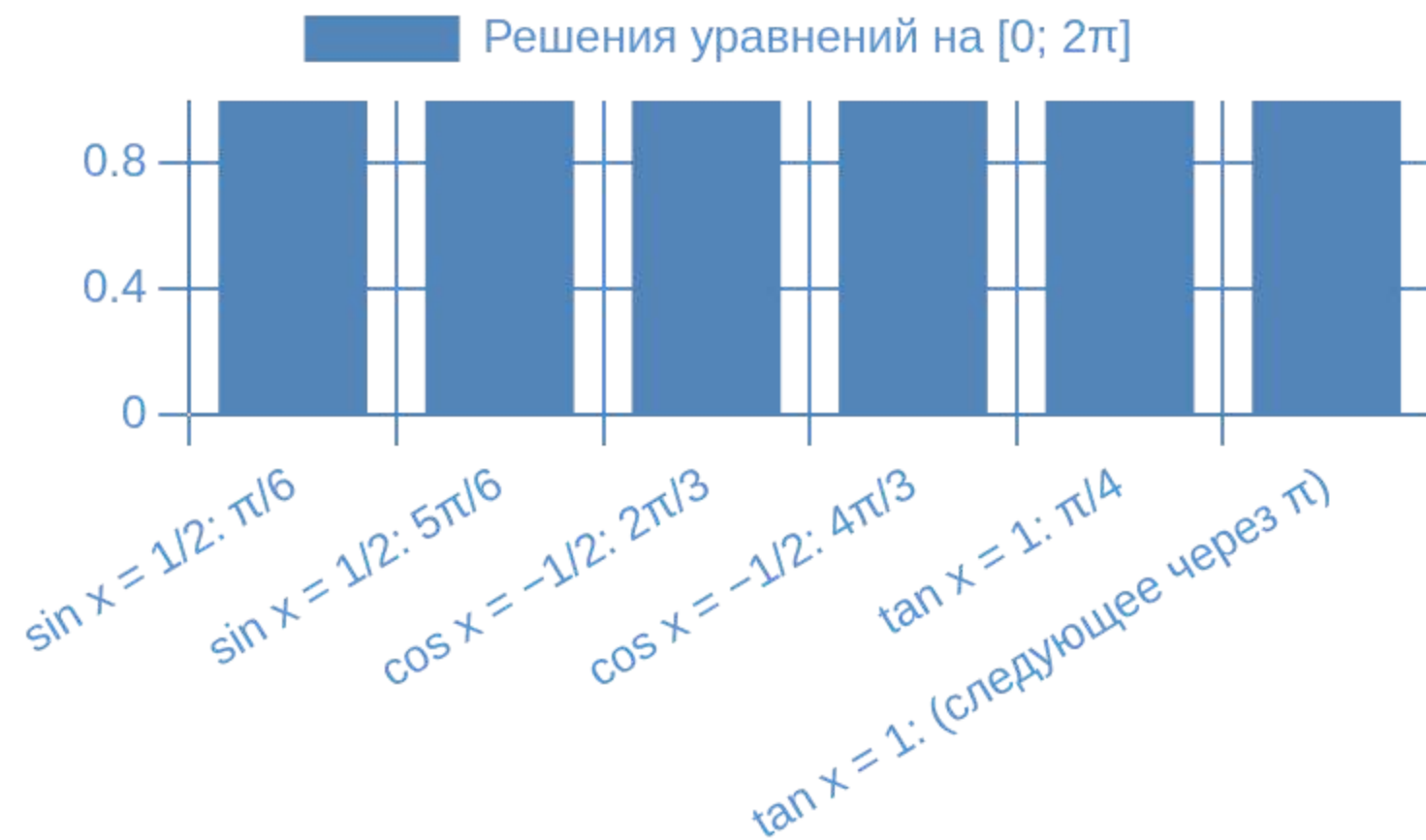
Из формул сложения при $a=b$ получаются формулы двойного угла: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ и $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. Их применяют при доказательстве тождеств и решении уравнений, содержащих $\sin(2x)$ или $\cos(2x)$.

Алгоритм решения простейших тригонометрических уравнений

Последовательность действий опирается на свойства диапазонов $\sin x$, $\cos x$ и периодичность тригонометрических функций.



Примеры решений на промежутке $[0; 2\pi]$



Для $\tan x$ решения на $[0; 2\pi]$ повторяются с периодом π : поэтому в отрезке появляется основное значение и ровно один «следующий» ответ.

Количество решений различается из-за ограничений функций: $\sin$ и $\cos$ принимают фиксированное значение обычно дважды на $[0; 2\pi]$, а $\tan$ — с периодом π по ветвям.

Собственные вычисления по свойствам $\sin$, $\cos$ и $\tan$ и проверка с опорными точками на единичной окружности (без внешних данных).

Тригонометрические функции в реальных задачах

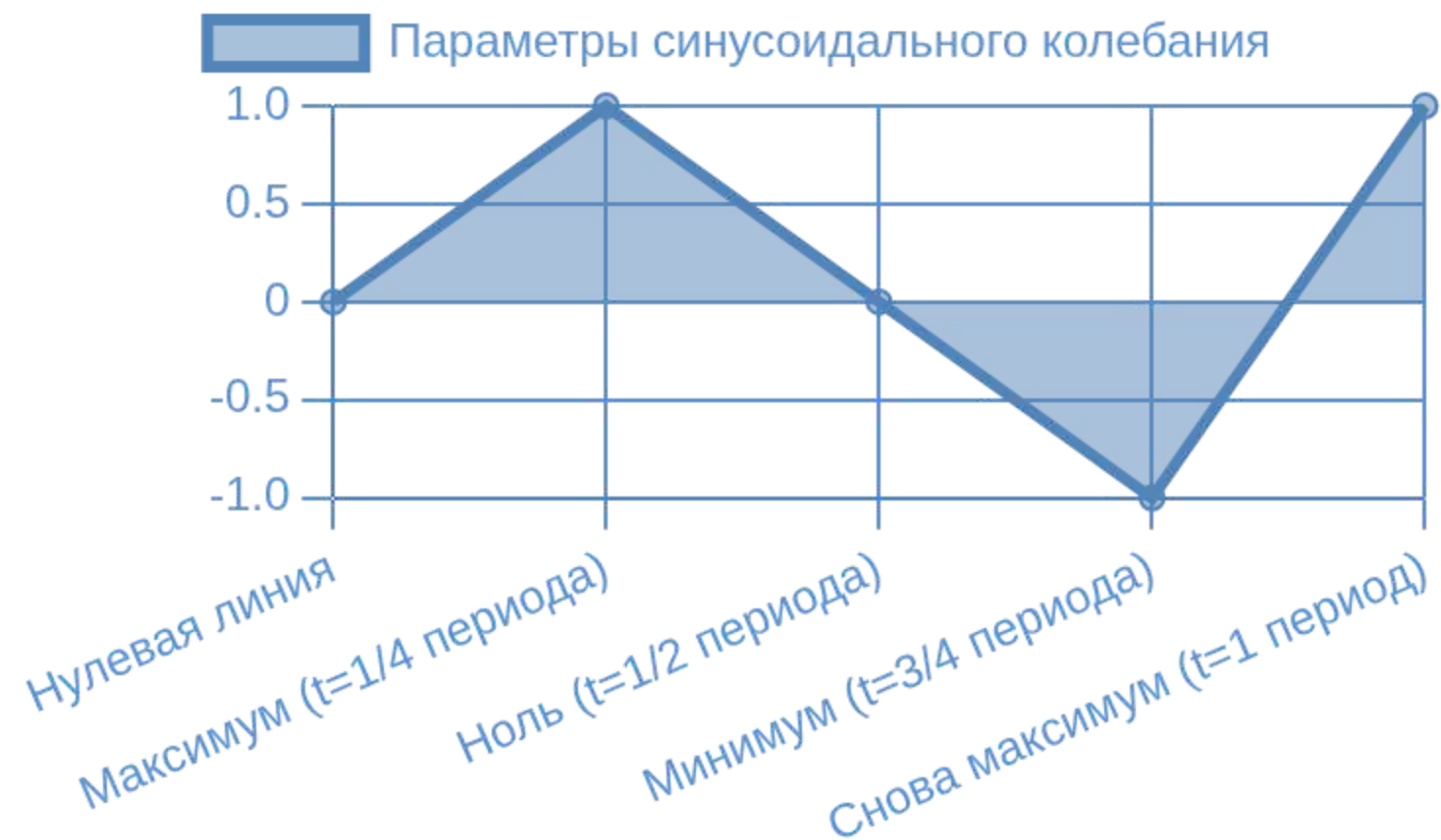
1

Периодические процессы описываются синусоидами и косинусоидами: так ведут себя колебания маятника, переменный электрический ток, звуковые волны. Даже смена времени суток и сезонные температуры заметно повторяются.

2

Используя тригонометрические функции, можно анализировать повторяемость, измерять амплитуду и частоту колебаний, а также прогнозировать поведение системы между наблюдаемыми моментами. Это делает математику «прикладной».

Гармонические колебания и параметры синусоиды

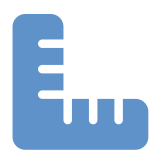


Амплитуда задаёт максимальное отклонение от равновесия, а фазовый сдвиг показывает, насколько колебание «начинается» раньше или позже. Период определяет длительность одного полного цикла.

По характерным точкам графика сразу считаются параметры: при изменении амплитуды меняется высота, при изменении периода — расстояния по оси времени, при изменении фазы — стартовое положение.

Школьная модель гармонического сигнала; используется стандартная синусоида как иллюстрация параметров (без привязки к конкретному измерению).

Типичные ошибки при изучении тригонометрических функций



Путают градусы и радианы

Частая причина неверного ответа — подстановка 30° вместо $\pi/6$ или неверное преобразование угла. Тогда «правильное» тождество применяется к другому аргументу, и всё вычисление распадается.



Забывают знаки в четвертях

Учащиеся иногда берут модуль значения, игнорируя знак, хотя он определяется положением конечной стороны угла. В результате $\tan$, $\sin$ и $\cos$ получают противоположные знаки там, где они должны совпадать.



Теряют периодичность

Если записать только одну опорную точку и не учесть повторение через период, получается неполный ответ. Особенно это заметно в уравнениях, где решений бесконечно много на всей числовой оси.



Игнорируют область определения $\tan$ и $\cot$

Для $\tan x$ знаменатель равен $\cos x$, поэтому при $\cos x = 0$ функция не определена. Аналогично $\cot x$ не определён при $\sin x = 0$. Это нужно проверять до подстановки значений.



Механически применяют тождество

Тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ верно для всех действительных x , но ошибка возникает, когда его используют без связи с исходным условием. Важно понимать, что именно нужно преобразовать и зачем.

Сводная таблица свойств основных тригонометрических функций

...

Функция	Область определения	Область значений	Период
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$	$\mathbb{R}$	π
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$	$\mathbb{R}$	π

- +

Сравнение ключевых свойств помогает быстрее решать задачи: где функция задана, как ведёт себя при смене знака аргумента, как часто повторяется и в каких точках возникают разрывы.
- +

$\sin x$ и $\cos x$ — непрерывные и ограниченные, поэтому при фиксированном значении обычно возникает два решения на стандартном промежутке. $\tan$ и $\cot$ имеют разрывы: при поиске решений нужно контролировать допустимость аргумента.
- Сводка по школьному курсу тригонометрии: диапазоны, периоды и исключения из области определения.

Тригонометрия — язык углов, координат и ритмов

Тригонометрические функции связывают геометрию окружности, координаты точки, алгебраические тождества и описание периодических явлений. Знание формул приведения, тождеств, сложения и двойного угла помогает упрощать выражения и решать уравнения.