



Тангенс и котангенс острого угла

Катеты, отношения сторон и полезные правила для задач
и измерений.

Зачем изучать tg и ctg в 8 классе

Тангенс и котангенс помогают кратко записывать отношения сторон, находить неизвестные длины и сравнивать наклоны. В этой теме рассматриваются только острые углы прямоугольного треугольника — меньше 90° .



Прямоугольный треугольник как основа определения



Один прямой угол

Определения tg и ctg используют только прямоугольный треугольник: в нём один угол равен 90° , а два других всегда острые и удобно сравнимы по сторонам.



Порядок зависит от угла

Если выбрать другой острый угол того же треугольника, роли катетов меняются местами. Поэтому значения tg и ctg для двух острых углов связаны между собой.



Катеты рядом и напротив

Для каждого острого угла один катет лежит напротив него, а другой прилегает к нему. Именно эта пара сторон участвует в формулах тангенса и котангенса.



Только острые углы

В школьной теме рассматривают углы меньше 90° , потому что именно для них в прямоугольном треугольнике можно однозначно определить противолежащий и прилежащий катеты.

Определение тангенса острого угла

Основная формула

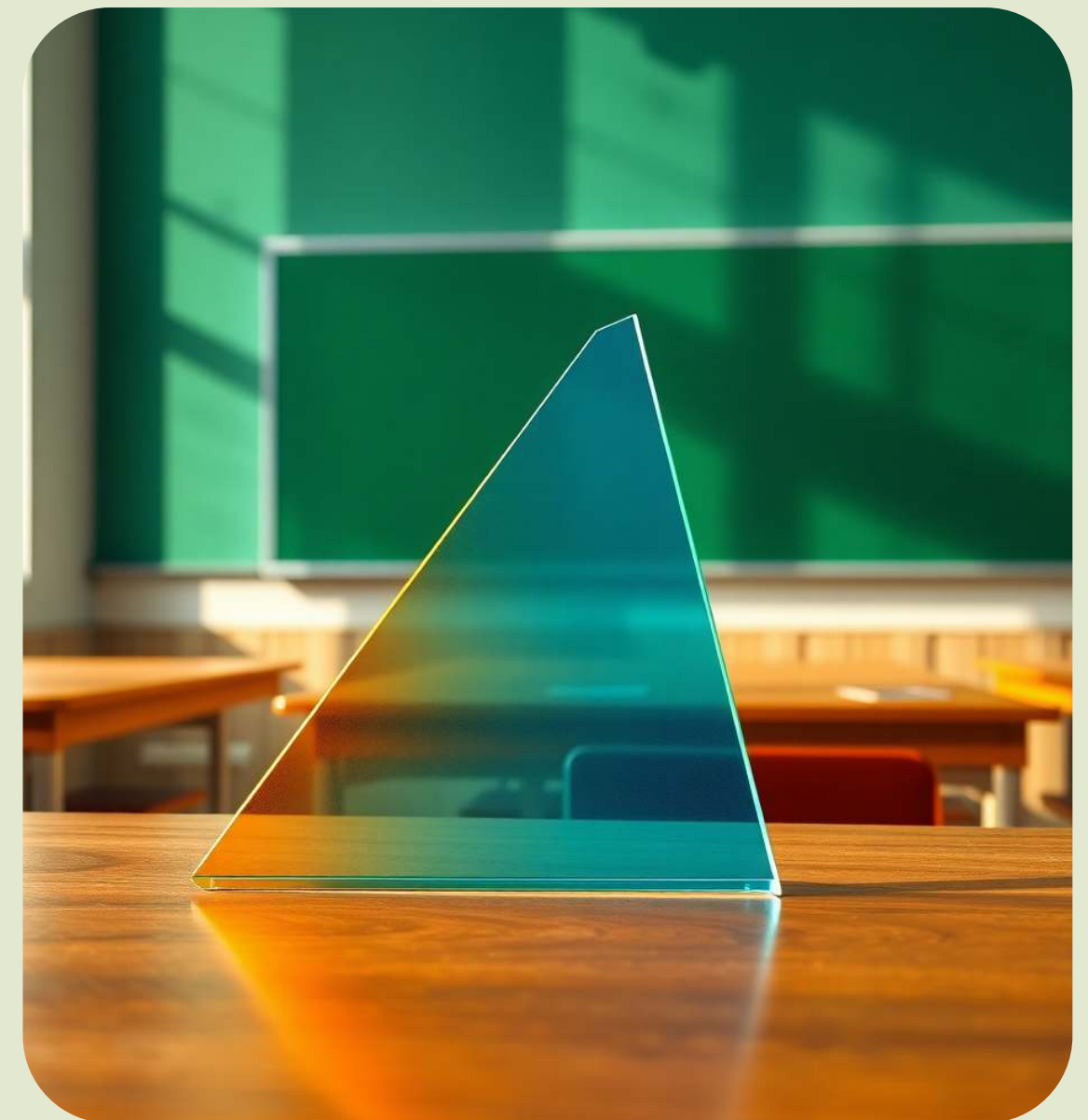
Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему:
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$. Важно смотреть именно на выбранный угол.

Схема на рисунке

Полезно изображать прямоугольный треугольник, отмечать угол α и подписывать оба катета. Тогда легче увидеть, какая сторона стоит в числителе, а какая — в знаменателе.

Зависимость от угла

Один и тот же катет может быть противолежащим для одного угла и прилежащим для другого. Поэтому значение тангенса в треугольнике определяется не только длинами, но и положением угла.



Определение котангенса острого угла

1 Шаг 1. Формула

Котангенс острого угла — это отношение прилежащего катета к противолежащему: $\operatorname{ctg} \alpha = \text{прилежащий катет} / \text{противолежащий катет}$. В записи важен именно порядок сторон.

2 Шаг 2. Связь с тангенсом

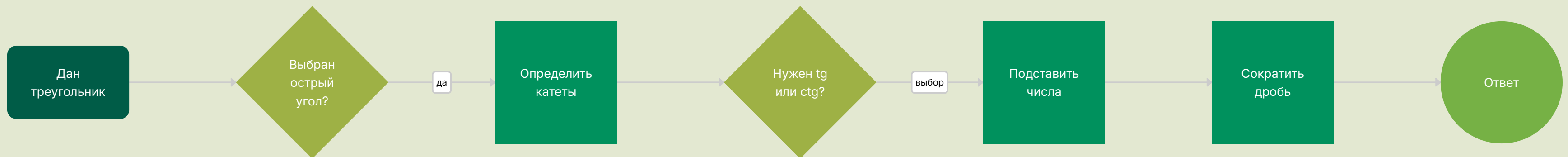
Для одного и того же угла котангенс является обратной величиной к тангенсу: $\operatorname{ctg} \alpha = 1 / \operatorname{tg} \alpha$, если тангенс не равен нулю.

3 Шаг 3. Проверка ответа

Если tg и ctg посчитаны верно, их произведение для одного угла должно быть равно 1. Это удобный способ быстро заметить ошибку в вычислениях.

Как находить tg и ctg по треугольнику

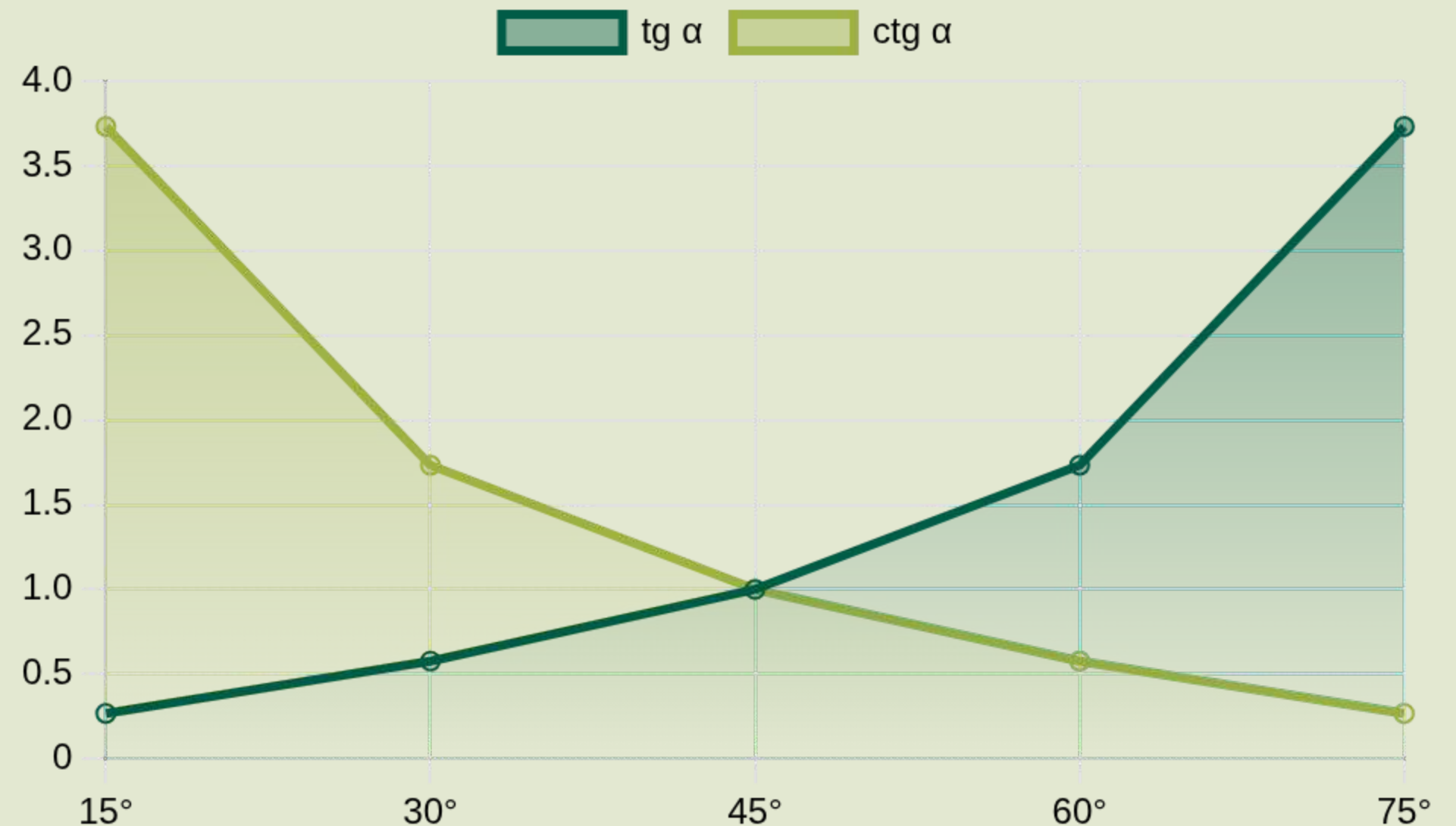
Алгоритм основан на выборе нужного угла и сравнении его катетов.



Как меняются значения tg и ctg при увеличении угла

На графике видно, что обе функции связаны с одним и тем же углом, но ведут себя по-разному при его росте.

Вычисленные значения для стандартных углов 15° , 30° , 45° , 60° , 75°



Тангенс возрастает, а котангенс уменьшается; при 45° значения совпадают.

Значения tg и ctg для специальных углов

Угол	$\text{tg } \alpha$	$\text{ctg } \alpha$
30°	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	1	1
60°	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

Для 30° и 60° значения меняются местами, а для 45° обе функции равны 1.

Таблица показывает самые удобные для запоминания значения тангенса и котангенса в трёх углах.

Стандартные значения тригонометрических функций для 30° , 45° и 60°



1

произведение $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для одного угла

Эта связь помогает быстро проверять вычисления: если одна функция найдена верно, вторая легко получается как обратная величина.

Определения tg и ctg для острого угла

Почему значения tg и ctg положительные



Катеты — это длины

В прямоугольном треугольнике в числителе и знаменателе стоят отрезки, а длины отрезков не бывают отрицательными. Поэтому отношения катетов тоже положительные.



Для острых углов

В школьной теме рассматриваются только острые углы. Это значит, что tg и ctg описывают реальные стороны треугольника и принимают положительные значения.



Удобно для проверки

Если при решении получился отрицательный ответ, значит, где-то допущена ошибка: перепутаны катеты, выбран не тот угол или неверно записано отношение сторон.

Тангенс как показатель крутизны



Чем больше угол

Тангенс удобно использовать как меру наклона: при увеличении острого угла отношение высоты к основанию растёт, значит подъём становится заметно круче.



Высота и основание

На рисунке можно показать прямоугольный треугольник: вертикальная сторона отвечает за высоту, горизонтальная — за основание. Их отношение и задаёт значение тангенса.



Связь с реальными объектами

Это видно на лестницах, пандусах, скатах крыш и дорогах. Везде, где важна крутизна, tg помогает сравнить, насколько быстро меняется высота относительно горизонтали.



Удобство для измерений

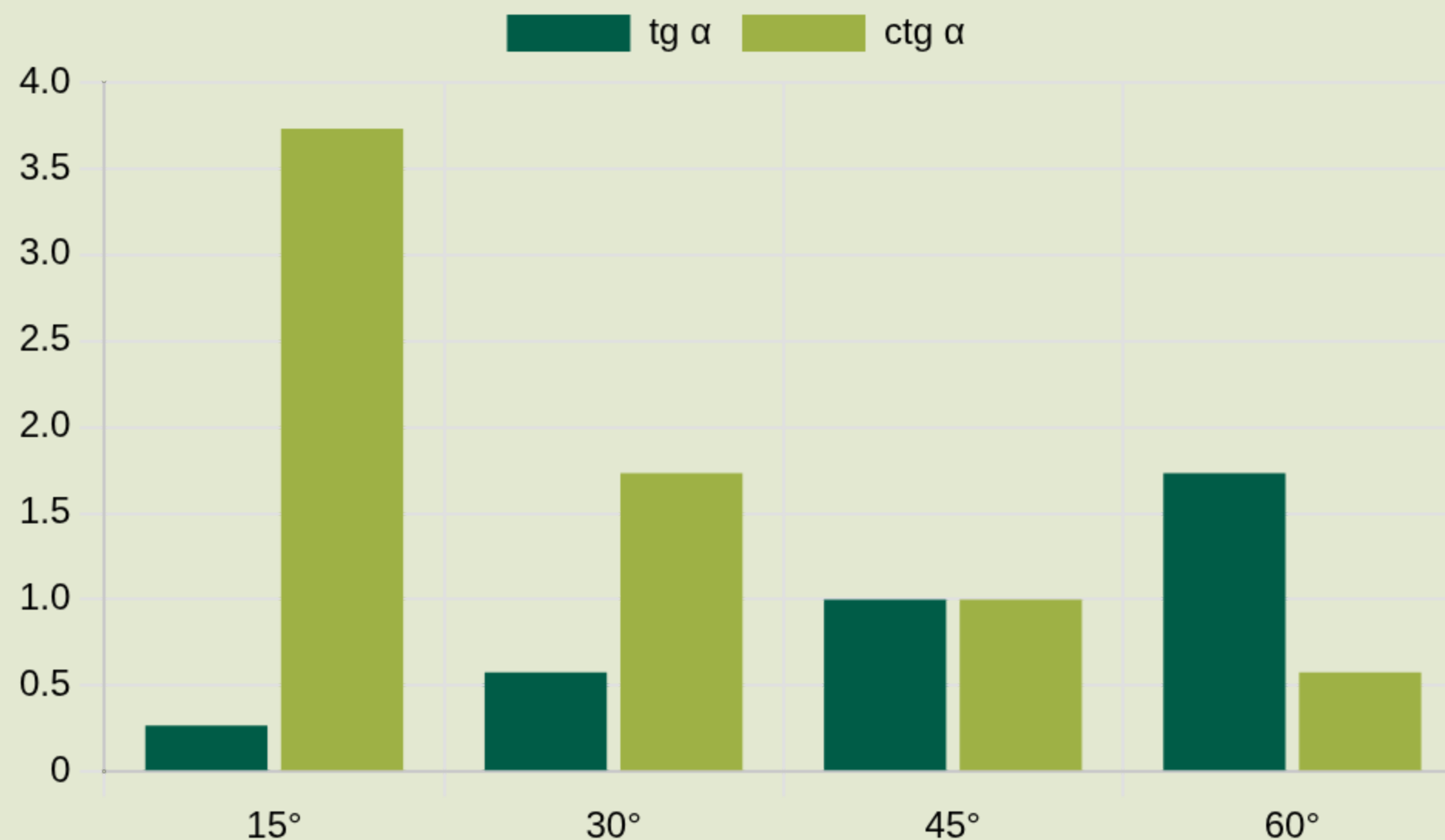
Если объект трудно измерить целиком, достаточно знать две доступные длины. Тогда тангенс позволяет оценить наклон без прямого измерения самой наклонной линии.



Сравнение tg и ctg для нескольких углов

На диаграмме видно, что обе функции связаны одним и тем же углом, но реагируют на его рост по-разному.

Табличные значения tg и ctg для острых углов, рассчитанные по определениям.



При увеличении угла тангенс растёт, а котангенс убывает; в точке 45° они совпадают.

Типичные ошибки при работе с тангенсом и котангенсом

01

Путают катеты

Сначала нужно определить, какой катет лежит напротив выбранного угла, а какой прилегает к нему. Если перепутать их местами, ответ получится неверным даже при правильных вычислениях.

02

Берут гипотенузу

В формулах tg и ctg участвуют только катеты, поэтому гипотенуза не подходит ни как числитель, ни как знаменатель. Это одна из самых частых ошибок в задачах.

03

Не указывают угол

Один и тот же треугольник даёт разные отношения для разных острых углов. Поэтому всегда важно писать, относительно какого угла находят tg или ctg , иначе условие будет понято неверно.

Как меняются tg и ctg для двух острых углов одного треугольника

Для двух острых углов прямоугольного треугольника отношения катетов меняются местами.

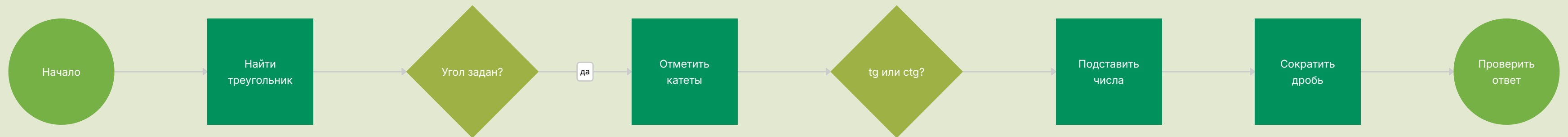
Следует из определения tg и ctg в прямоугольном треугольнике.

Угол	tg	ctg
A	a/b	b/a
B	b/a	a/b

Для дополнительных острых углов значения tg и ctg взаимно переставляются: то, что было числителем, становится знаменателем.

Алгоритм решения задач на tg и ctg

Последовательность действий при работе с прямоугольным треугольником и заданным острым углом.





3/4

— таков тангенс угла в приведённом примере.

Если противолежащий катет равен 6 см, а прилежащий — 8 см, дробь легко сокращается до простого ответа и помогает проверить обратную величину.

Расчёт по определениям tg и ctg для заданного прямоугольного треугольника.

Где используются тангенс и котангенс



Высота дерева без лестницы

Если известно расстояние до дерева и угол, под которым видно верхушку, можно оценить высоту. На чертеже появляется прямоугольный треугольник, где тангенс связывает высоту и расстояние до основания.



Крыша и пандус

Строители сравнивают наклон скатов крыши, пандусов и лестничных маршей. Тангенс показывает, насколько быстро меняется высота при движении вперёд, поэтому помогает делать конструкции удобными и безопасными.



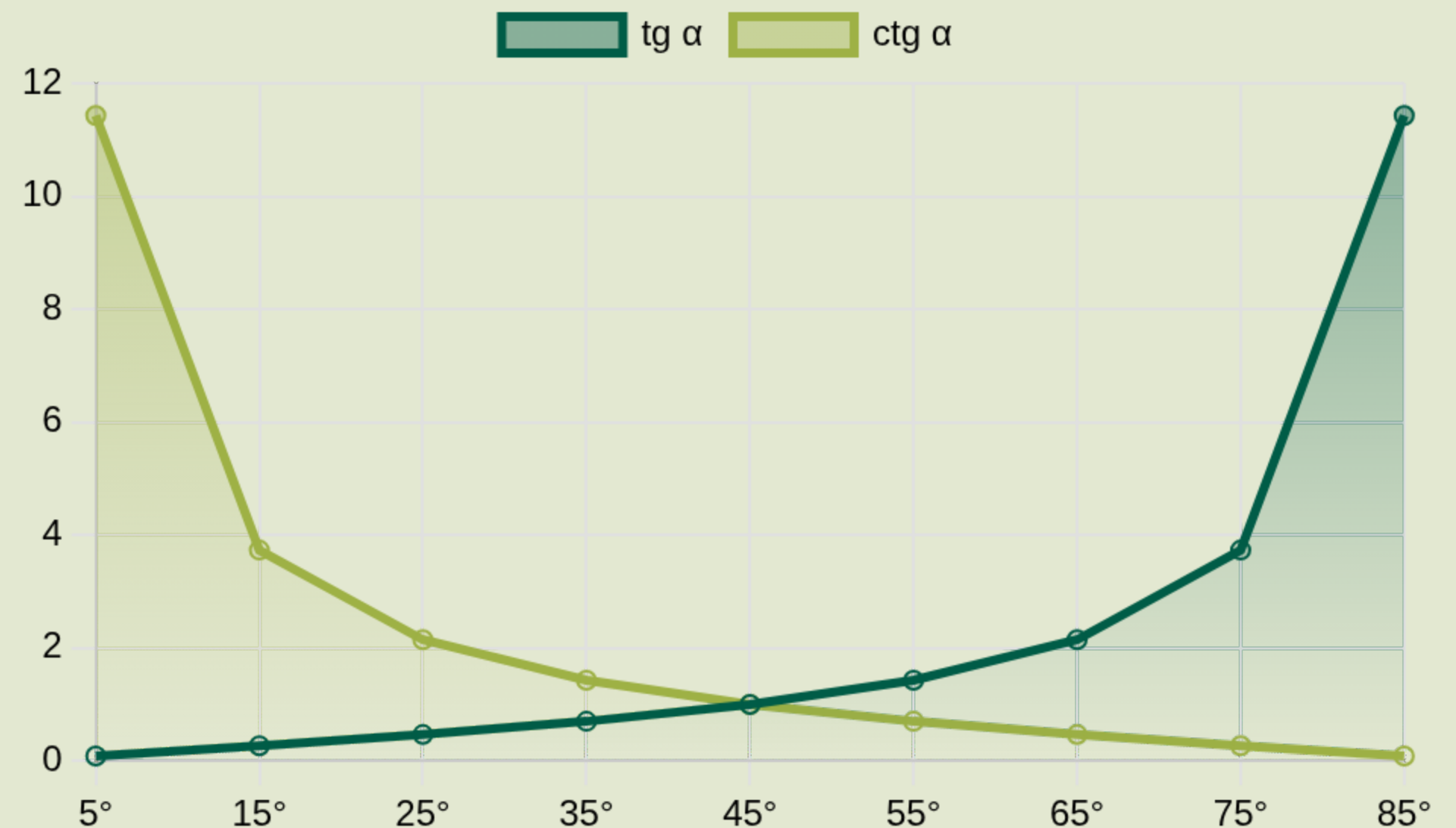
Недоступная точка на местности

Иногда нельзя подойти к объекту напрямую: мешает река, забор или обрыв. Тогда измеряют доступные расстояния и углы, а затем находят нужную величину через tg или ctg .

Поведение функций при приближении к 90°

Значения на графике расположены симметрично: рост одной функции сопровождается падением другой.

Табличные значения tg и ctg для острых углов, рассчитанные по определениям.



Чем ближе угол к 90° , тем быстрее растёт tg и тем ближе ctg подходит к нулю.

Краткая памятка по теме

● **Формула тангенса**

Тангенс острого угла находят как отношение противолежащего катета к прилежащему. Важно сначала выбрать именно тот угол, для которого записывается отношение сторон.

● **Обратная связь**

Для одного и того же угла tg и ctg всегда взаимно обратны. Это удобно для проверки: если одно значение найдено верно, второе можно получить без повторного решения.

● **Формула котангенса**

Котангенс — это обратное отношение: прилежащий катет делят на противолежащий. Если катеты названы правильно, формулу можно записать без лишних пересчётов.

● **Опорные углы**

Особенно полезно запомнить значения для 30° , 45° и 60° . Они часто встречаются в задачах и помогают быстро ориентироваться без длительных вычислений.



Главный вывод по теме

Тангенс и котангенс помогают читать прямоугольный треугольник как схему отношений сторон. Если правильно выбрать угол, не перепутать катеты и помнить об обратной связи, задачи решаются уверенно и быстро.

