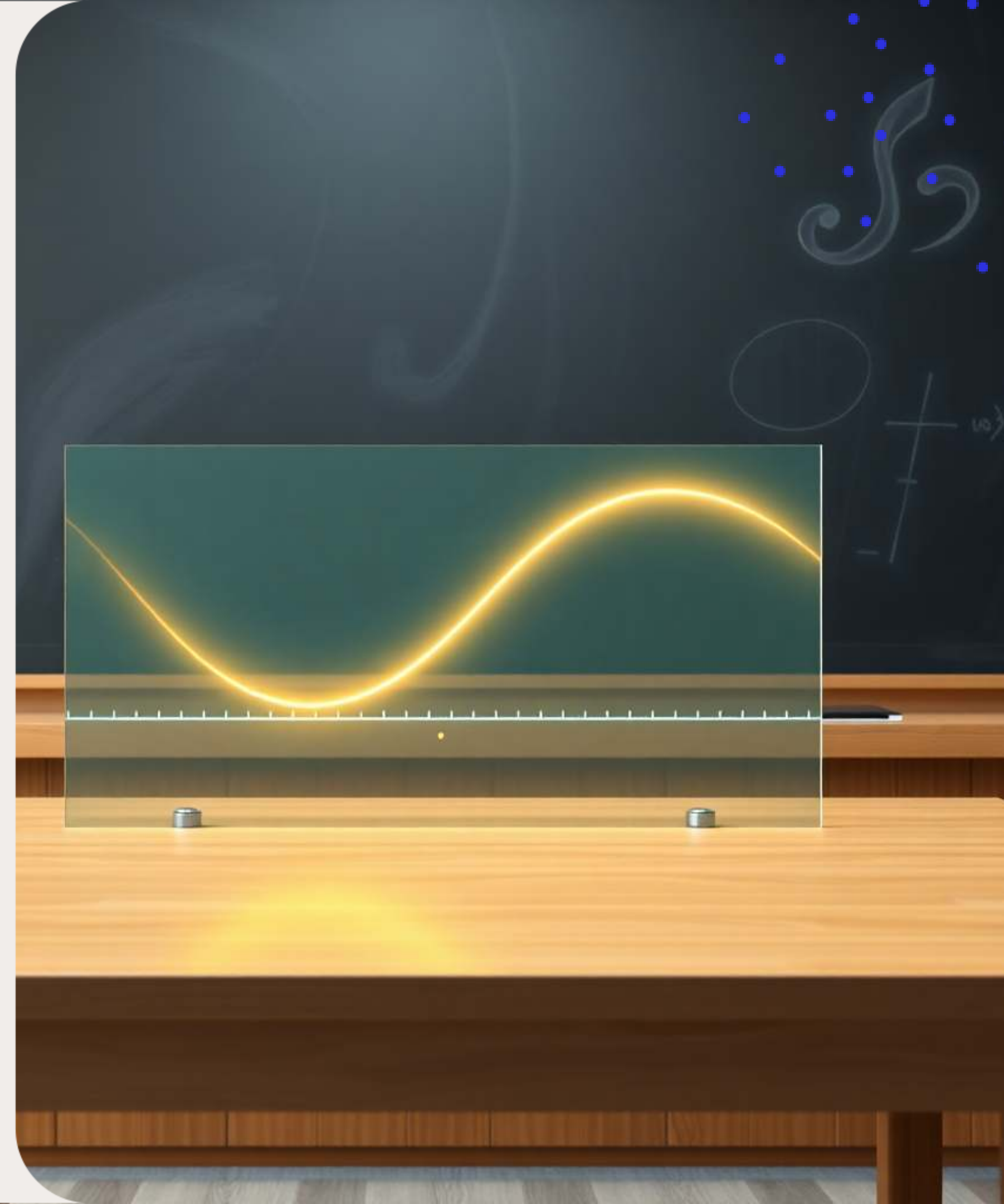


Уравнение $\sin x = a$: от области значений к общему решению

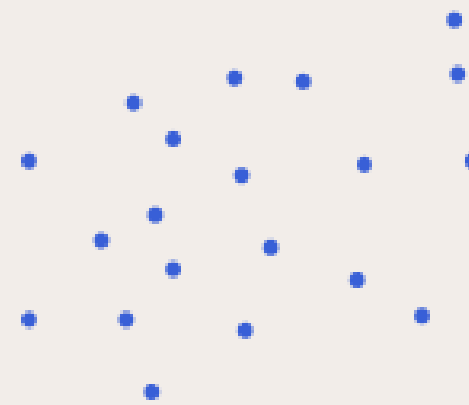
От значений синуса до полного ответа



- Уравнение $\sin x = a$ в 10 классе



Это одно из первых тригонометрических уравнений, где важно связать алгебраическую запись с графиком, единичной окружностью и периодичностью функции. Оно помогает уверенно работать с углами, радианами и функцией $\arcsin$.



• Функция синуса и её область значений

1

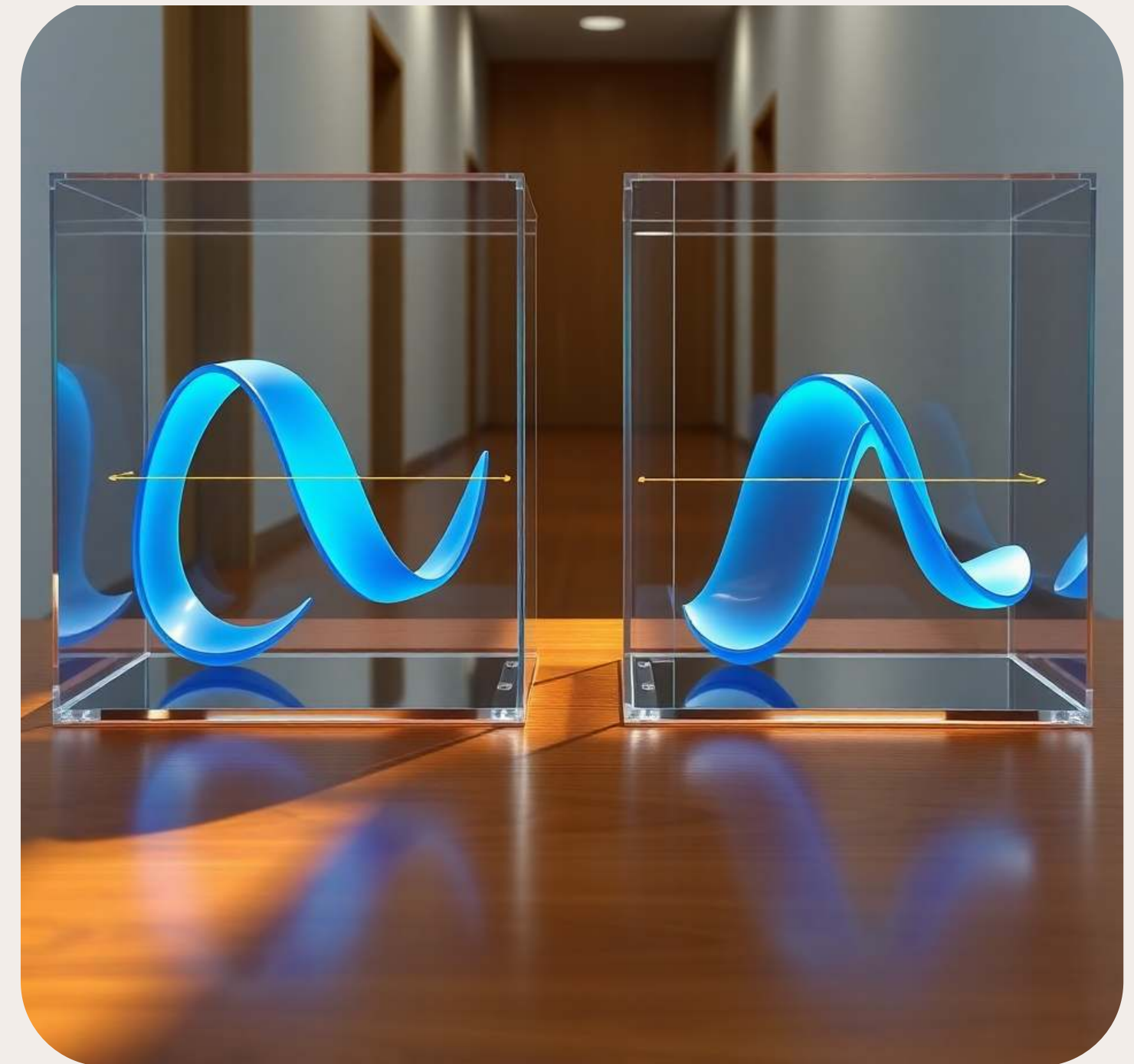
Только допустимые значения

Функция $y = \sin x$ всегда принимает значения лишь от -1 до 1 . Поэтому уравнение $\sin x = a$ имеет смысл решать только при условии $-1 \leq a \leq 1$.

2

Первичная проверка

Если $|a| > 1$, горизонтальная прямая $y = a$ не пересекает график $y = \sin x$. Значит, решений нет, и эту проверку нужно выполнить до всех вычислений.



- Единичная окружность как геометрическая модель



Синус как ордината

На единичной окружности синус угла равен координате y точки, соответствующей этому углу. Поэтому уравнение $\sin x = a$ можно понимать как поиск точек с заданной высотой.

Пересечения с уровнем a

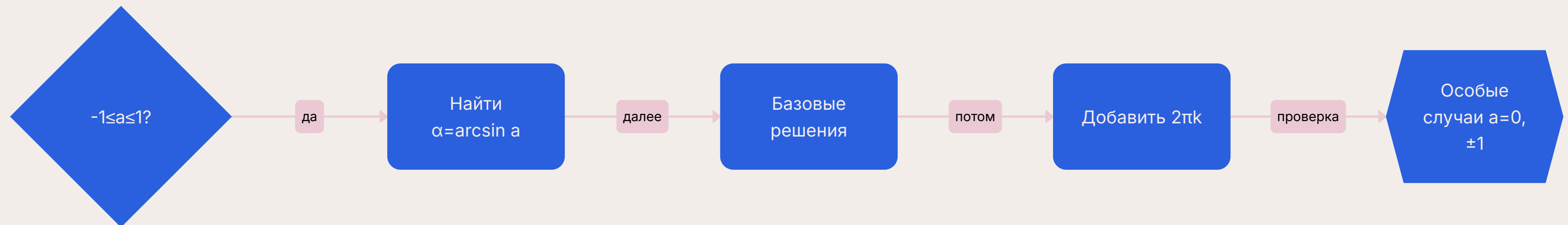
Значение a задаёт горизонтальную прямую $y=a$. Решения уравнения соответствуют точкам её пересечения с окружностью, а при $0 < |a| < 1$ таких точек на оборот обычно две.

Симметрия решений

Две точки на одном полном обороте расположены симметрично относительно вертикальной оси. Эта симметрия объясняет, почему для допустимых значений a на периоде возникают две серии решений.

• Алгоритм решения уравнения $\sin x = a$

Последовательность действий от проверки параметра до общего ответа



- Общий вид решений при $-1 < a < 1$

1 Формула ответа

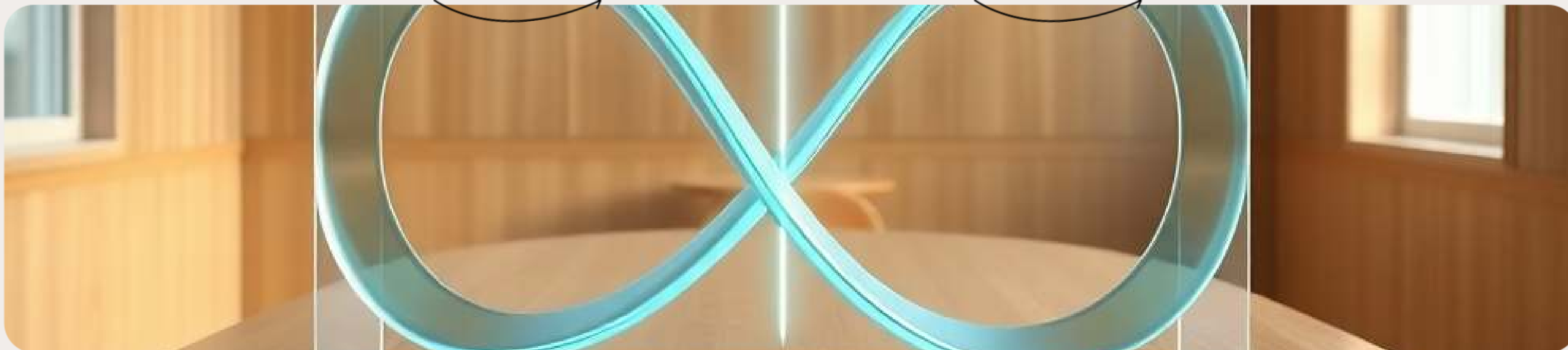
Если $-1 < a < 1$, общее решение удобно записывать как $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта запись сразу охватывает обе серии решений.

2 Эквивалентная форма

Можно также выписать два семейства: $x = \arcsin a + 2\pi k$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Они описывают те же точки, но подчёркивают две ветви решения.

3 Почему это работает

Формулы отражают период 2π и симметрию графика синуса относительно прямой $x = \pi/2$. Поэтому найденные на одном периоде значения повторяются бесконечно много раз.



- Базовые случаи уравнения $\sin x = a$

Таблица показывает, как меняются число решений и вид ответа в зависимости от параметра a .

Крайние и недопустимые значения параметра резко меняют число решений, а при допустимых значениях ответ всегда связан с периодичностью.

Случай	На $[0; 2\pi]$	Ответ
$ a > 1$	нет	решений нет
$a = 1$	1	$\pi/2 + 2\pi k$
$a = 0$	2	πk

Свойства функции $y = \sin x$ и её области значений

- Особые случаи $a = 0, 1, -1$

1

Случай $a=0$

Когда $a=0$, синус равен нулю в точках пересечения графика с осью Ox . Поэтому решения имеют вид $x=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и образуют две чередующиеся серии на окружности.

2

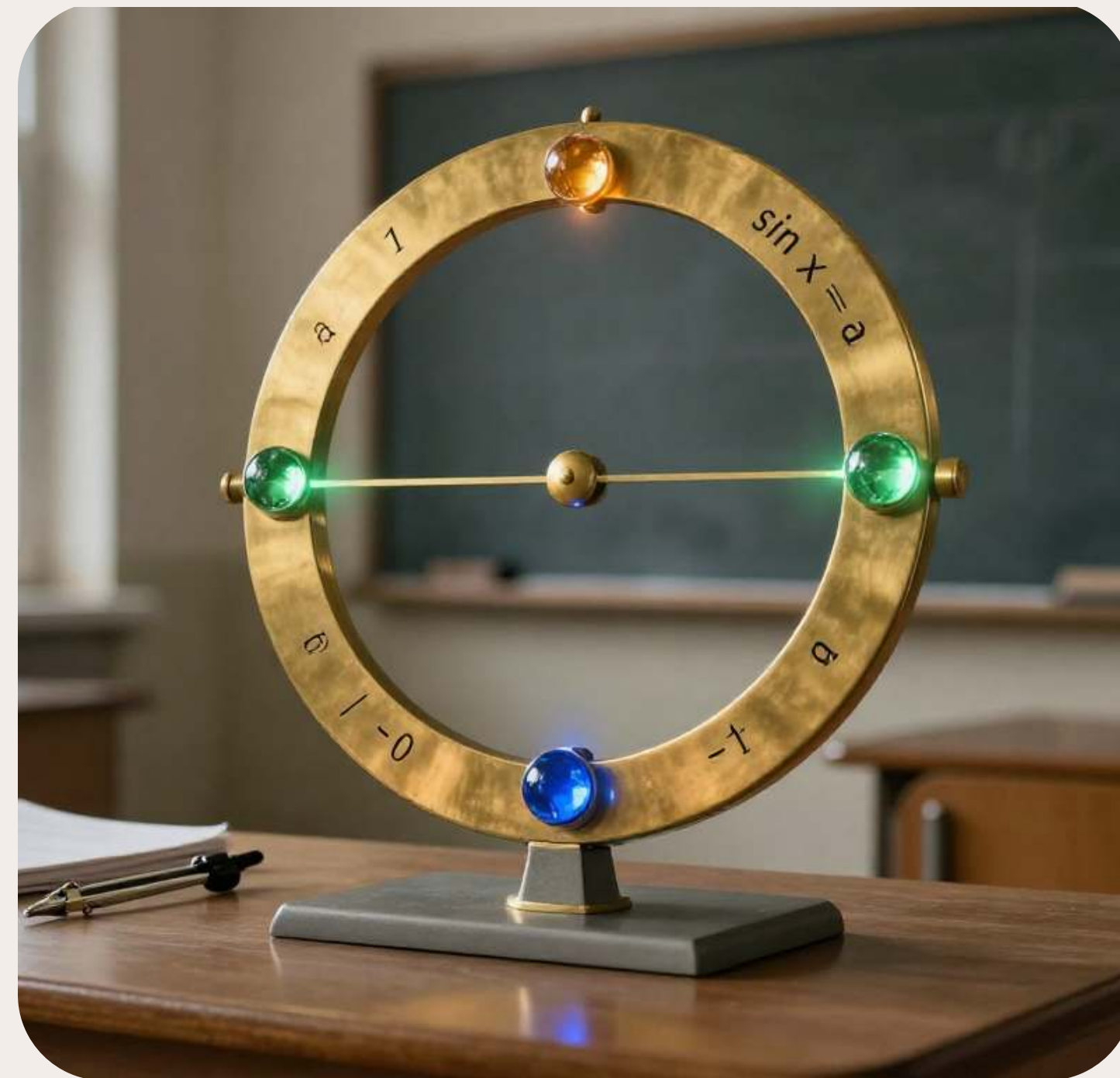
Случай $a=1$

При $a=1$ график достигает максимума. На каждом периоде есть единственная точка касания, поэтому общее решение записывается как $x=\pi/2+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3

Случай $a=-1$

При $a=-1$ рассматривается нижняя вершина синусоиды. На периоде снова получается одно решение: $x=3\pi/2+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, без второй ветви.



• Число решений в зависимости от значения a



Диаграмма наглядно показывает, что переход через границы области значений полностью меняет структуру ответа.

При $|a| > 1$ решений нет; при $a = \pm 1$ — по одному; при остальных допустимых значениях — две серии решений.

Анализ уравнения $\sin x = a$ на отрезке $[0; 2\pi]$

● Графическая интерпретация пересечений

Две точки пересечения

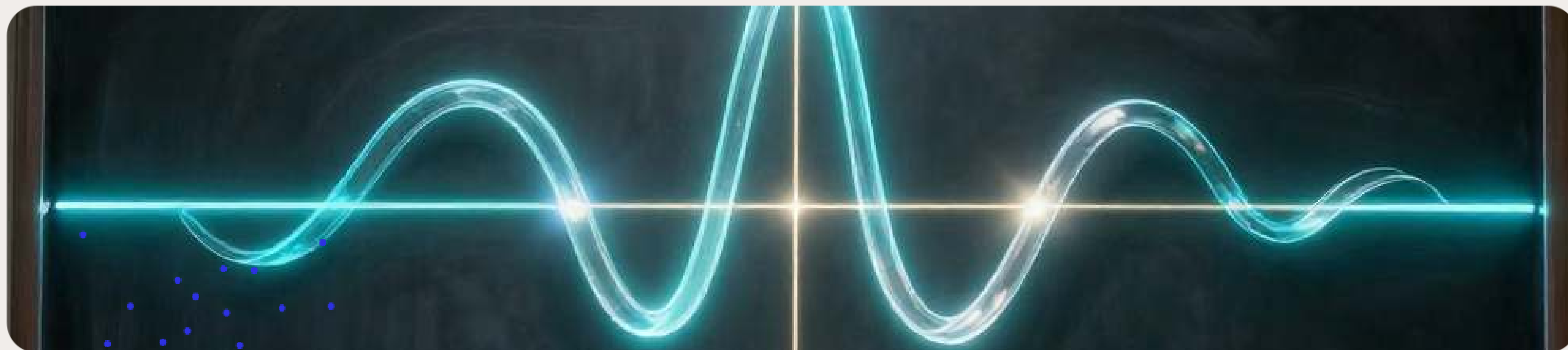
Когда $|a|$ меньше 1, прямая $y=a$ пересекает синусоиду в двух точках за период. Именно эти пересечения дают два базовых решения на промежутке $[0; 2\pi]$.

Касание в вершинах

При $a=1$ и $a=-1$ горизонтальная прямая касается графика в верхней или нижней точке. Поэтому на периоде остаётся только одно решение, а не две точки.

Отсутствие пересечений

Если $|a| > 1$, прямая проходит выше или ниже всей синусоиды. Пересечений нет, следовательно, уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.



• Периодичность и бесконечность множества решений

Сдвиг на период

Из периодичности синуса следует: к каждому решению можно прибавлять $2\pi k$, и значение функции не изменится. Так появляется бесконечная последовательность углов.

Одно найденное решение

Если значение a допустимо, уравнение $\sin x = a$ имеет хотя бы одну точку решения на одном периоде. Это отправная точка для построения полного ответа.

Общий вывод

Поэтому при $-1 \leq a \leq 1$ множество решений бесконечно, хотя на отрезке длины 2π их конечное число. Именно этот факт задаёт форму общего решения.

- Функция $\arcsin a$ и главное значение

1 Главное значение

Функция $\arcsin a$ выбирает только один угол из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$. Это удобно для вычислений, но ещё не даёт полного набора решений уравнения $\sin x = a$.

2 Второй угол

Если один угол имеет синус a , то на том же периоде существует симметричный угол $\pi - \arcsin a$. Именно он дополняет главное значение до полного ответа.

3 Полный набор решений

Чтобы не потерять решения, нужно записывать обе серии и затем добавлять период $2\pi k$. Тогда ответ отражает и значение функции, и её повторяемость на всей числовой оси.

• Типичные примеры преобразования уравнения в ответ

Уравнение	$\arcsin a$	Ответ
$\sin x = \frac{1}{2}$	$\pi/6$	2 серии
$\sin x = -\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	2 серии
$\sin x = 0,2$	$\arcsin 0,2$	2 серии
$\sin x = 2$	—	нет решений

В таблице показано, как проверка области значений и вычисление $\arcsin a$ приводят к итоговой записи решений для разных случаев.

Если $|a| \leq 1$, решение обычно распадается на две серии; при $|a| > 1$ решений нет. Значение $\arcsin a$ помогает зафиксировать главное решение.

Преобразование уравнений $\sin x = a$ по формуле общего решения и проверке области значений синуса.

• Типичные ошибки при решении

Проверка области значений

Нельзя сразу искать угол, не убедившись, что $|a| \leq 1$.
Если параметр выходит за пределы области значений синуса, уравнение не имеет решений.

Потеря второй серии

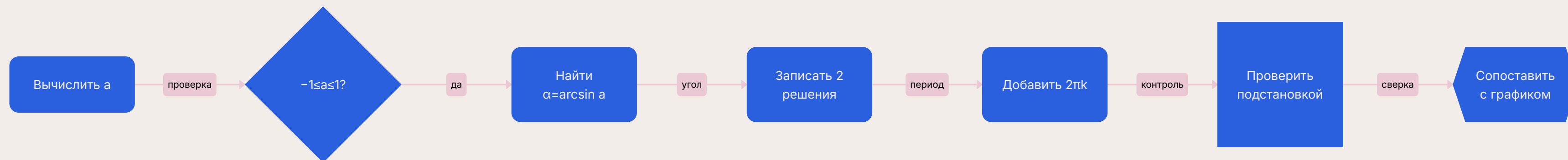
Часто записывают только одно значение, например $\arcsin a$, и забывают о симметричном угле $\pi - \arcsin a$. Из-за этого ответ получается неполным.

Неверная работа с периодом

Ещё одна ошибка — забыть добавить $2\pi k$ к каждому решению или перепутать знак в формуле. Тогда ответ не учитывает всю периодичность синуса.

• Проверка правильности ответа

Последовательность проверки помогает заметить пропущенные решения, ошибку в знаке и неверно добавленный период.



• Пример решения: $\sin x = \frac{1}{2}$

1

Главное значение

Для $a = \frac{1}{2}$ находим $\alpha = \arcsin(\frac{1}{2}) = \pi/6$. Это первый ориентир, от которого строится всё дальнейшее решение и проверяется правильность полученного ответа.

2

Решения на одном периоде

На отрезке $[0; 2\pi]$ синус равен $\frac{1}{2}$ в двух точках: $x = \pi/6$ и $x = 5\pi/6$. Они симметричны относительно прямой $x = \pi/2$.

3

Запись общего ответа

С учётом периодичности получаем две серии: $x = \pi/6 + 2\pi k$ и $x = 5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так фиксируются все углы, дающие значение $\frac{1}{2}$.

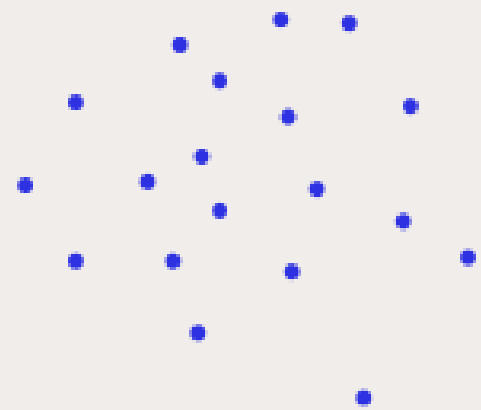
4

Проверка графиком

На графике $y = \sin x$ прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает синусоиду дважды за период, а затем те же точки повторяются через 2π . Это удобно для визуальной проверки.



● Пример решения: $\sin x = -\sqrt{3}/2$



Главный угол

Для $a = -\sqrt{3}/2$ имеем
 $\alpha = \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$.
Отрицательное значение
не меняет алгоритм: сначала
определяется главное
значение, затем находятся
все симметричные решения.

Точки на периоде

На отрезке $[0; 2\pi]$ решения
равны $x = 4\pi/3$ и $x = 5\pi/3$. Они
расположены в III и IV
четвертях, что соответствует
отрицательному синусу.

Общий вид ответа

Полное решение
записывается как $x = -\pi/3 + 2\pi k$
или $x = 4\pi/3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тем
самым сохраняются
и главное значение, и вторая
ветвь на каждом периоде.

● Сравнение числа решений для разных значений a



Сравнение показывает, как меняется ответ при переходе от внутренних значений области синуса к её границам и затем за пределы допустимого интервала.

Для допустимых значений a число решений на одном периоде не превосходит двух; на границах остаётся одно решение, а при $a=2$ решений нет.

Свойства функции $y=\sin x$ и её области значений $[-1; 1]$.

- Практическое значение уравнения $\sin x = a$



Колебания

Уравнение описывает моменты, когда колебательный процесс достигает заданного уровня. Так моделируют движение маятника, колебания струны и другие периодические явления.



Время и фаза

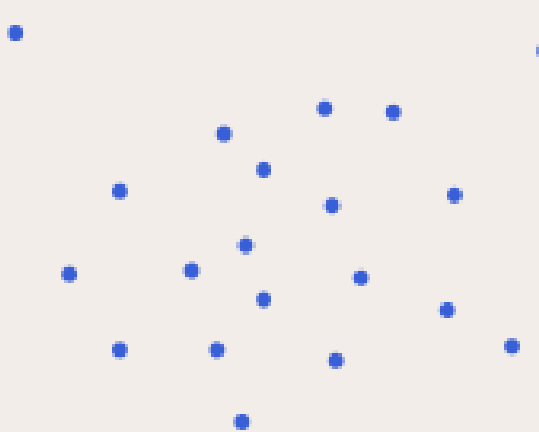
В прикладных задачах x часто означает время или фазу сигнала, а a — заданную отметку. Нужно определить, когда процесс достигает нужного значения.



Связь с графиками

Задача помогает видеть связь между формулой, графиком и реальным смыслом величины. Это укрепляет умение работать с периодическими функциями и интерпретировать ответ.

- Главное о решении уравнения $\sin x = a$



Запомните три опоры: область значений синуса, формулу через $\arcsin a$ и добавление периода $2\pi k$. Эти идеи позволяют быстро находить ответ и проверять его геометрически.

