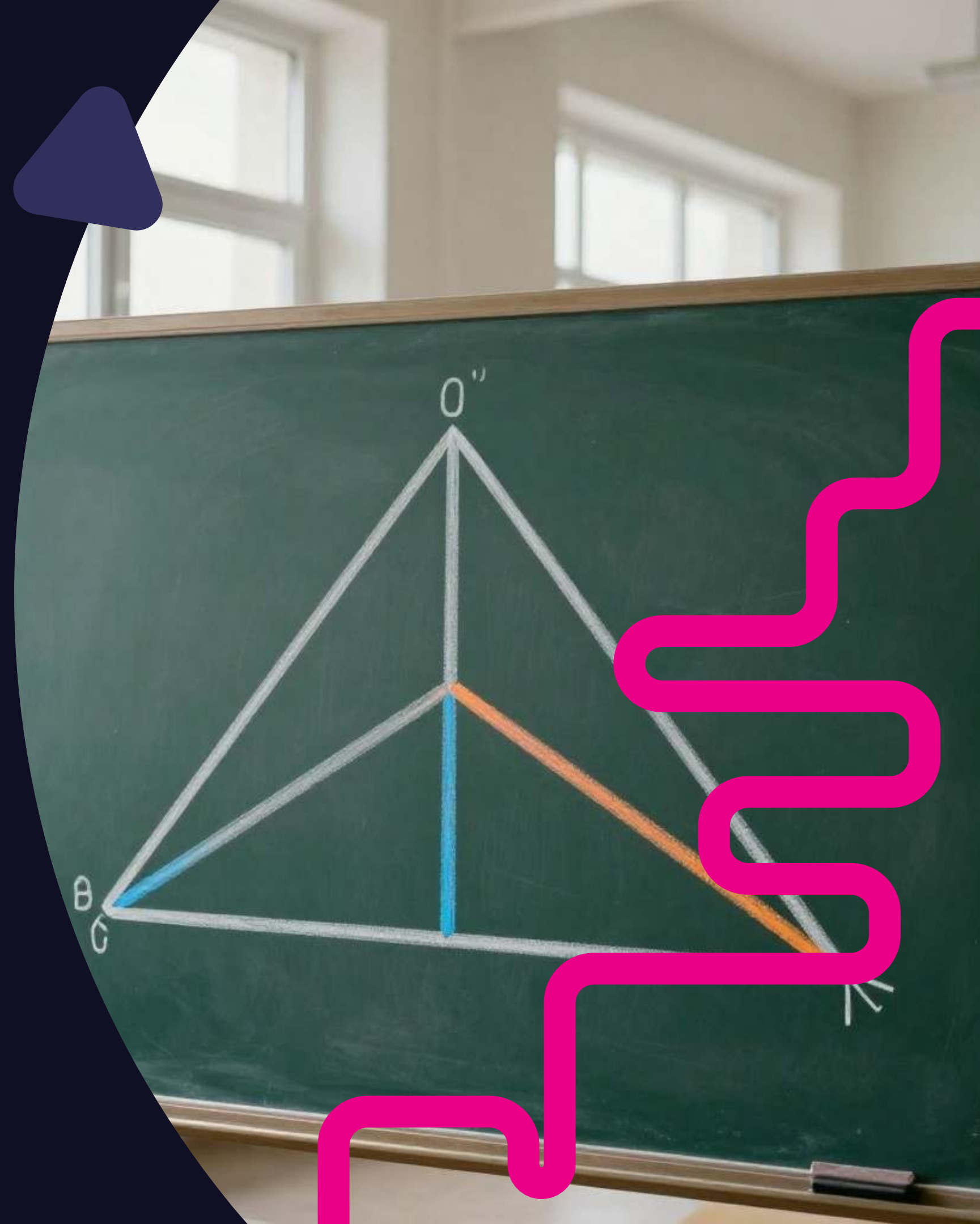
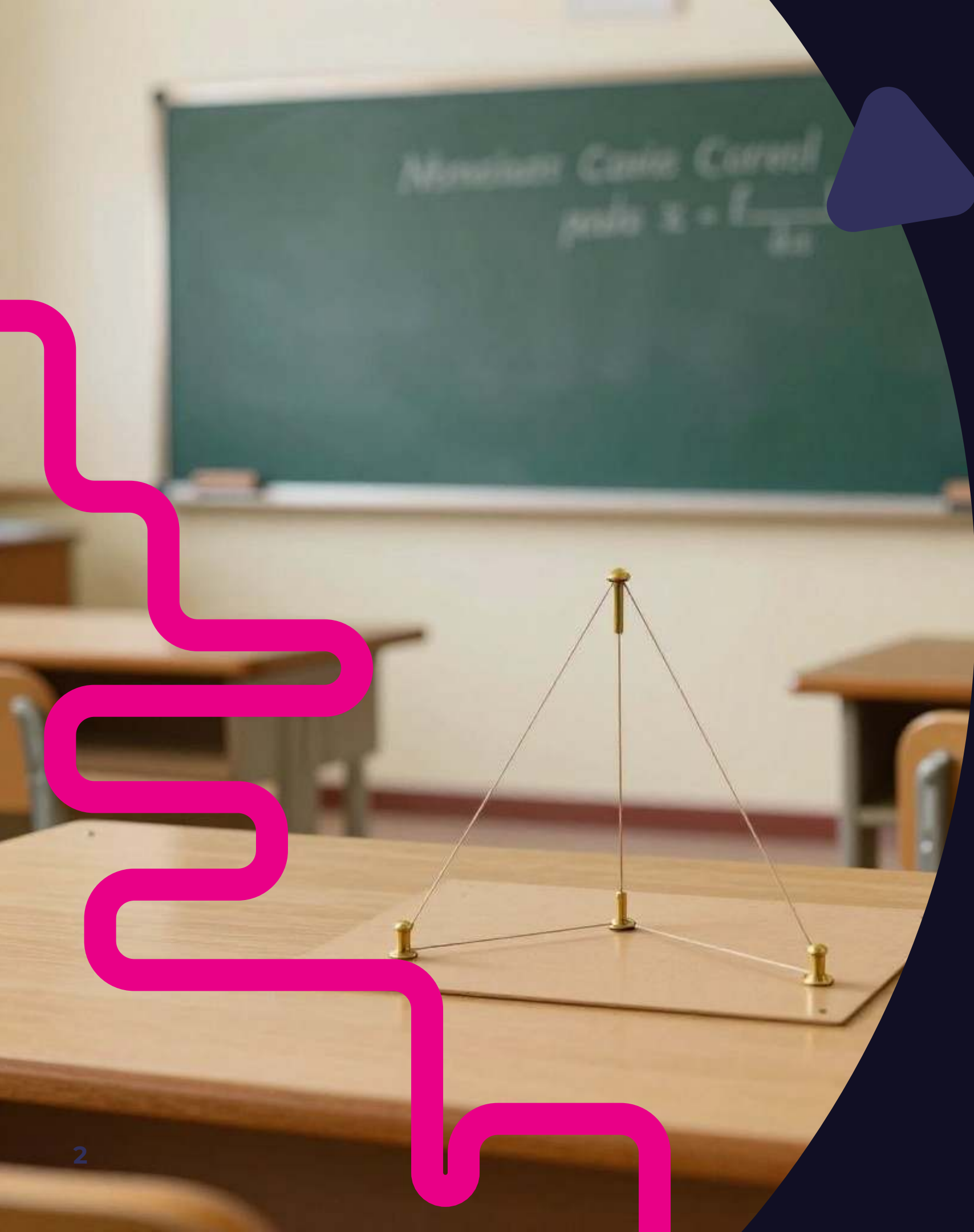


# Теоремы Менелая и Чевы в школьной геометрии

Две классические теоремы связывают треугольник с алгебраическими произведениями направленных отношений.





## Почему эти теоремы важны в 11 классе

В 11 классе эти теоремы помогают доказывать и вычислять отношения сторон, а также строить доказательства конкурентности и коллинеарности. Теорема Чева (Джованни Чева, 1678) и теорема Менелая (античные истоки) постоянно встречаются в олимпиадных и экзаменационных заданиях.

# Основная конфигурация



## Треугольник ABC как сцена

Задаётся треугольник ABC, а затем на его сторонах или на продолжениях выбираются точки, с которыми удобно работать через отношения отрезков. Это задаёт общий язык задачи.



## Точки $A_1$ , $B_1$ , $C_1$ на сторонах

На сторонах AB, BC и CA (или на их продолжениях) отмечают точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . От выбора этих точек зависит знак и величина направленных дробей в формуле.



## Чевианы как направляющие прямые

Отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  называют чевианами. Их пересечение описывает теорема Чебы, а геометрический смысл проявляется через способ деления сторон треугольника.



## Направленные длины для всех случаев

Точки на продолжениях не требуют отдельного «разветвления» на внутренние и внешние конфигурации: направленные длины автоматически учитывают ориентацию и знак.



## Произведение дробей вместо громоздких чертежей

Итоговая проверка сводится к аккуратному перемножению трёх дробей. Поэтому чертёж остаётся наглядным, а доказательство — компактным и контролируемым.

# Формулировка теоремы Чебы

## 01

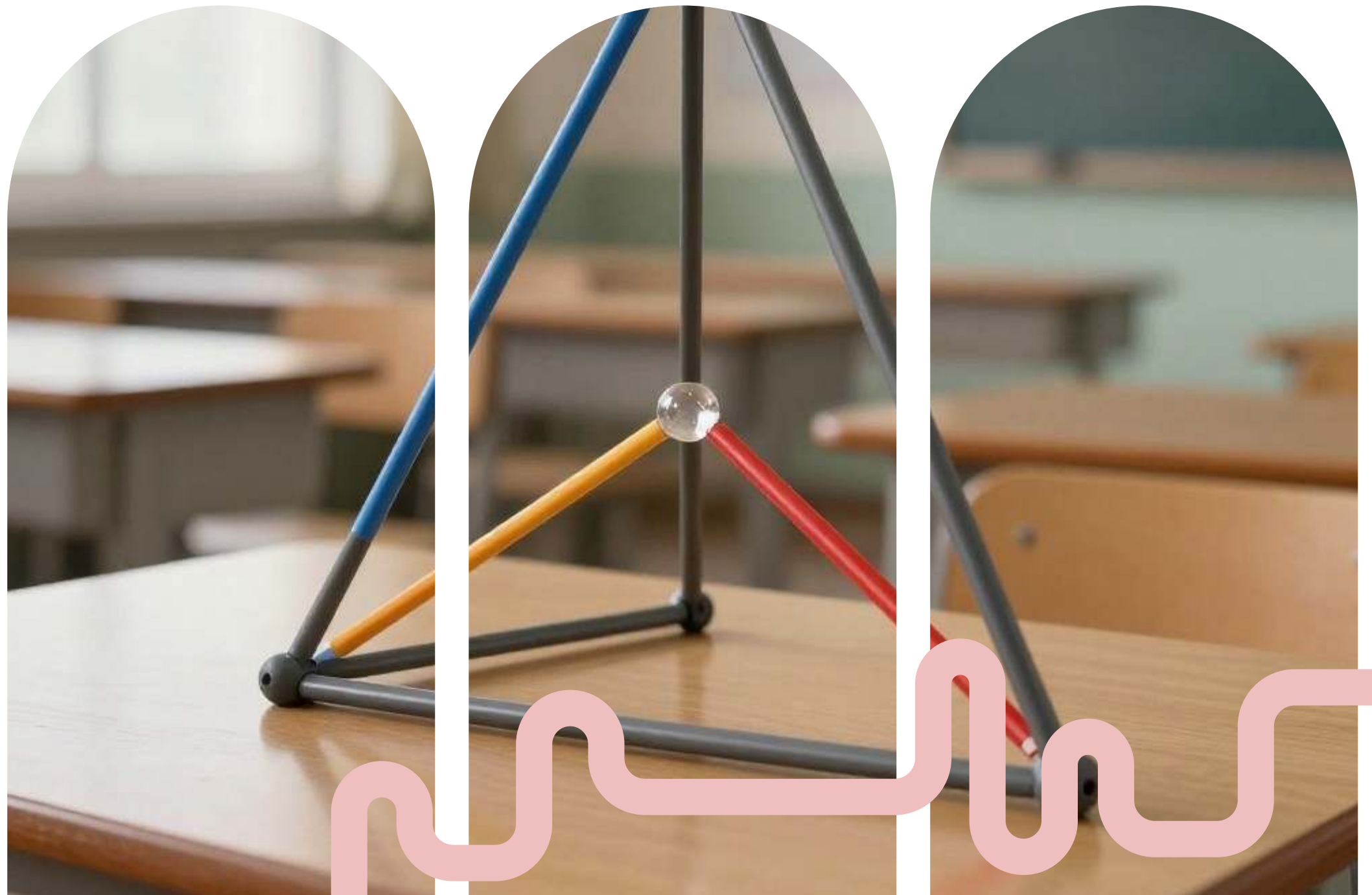
### Критерий конкурентности

Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда для направленных длин выполняется равенство  $(BA_1 / A_1C) \cdot (CB_1 / B_1A) \cdot (AC_1 / C_1B) = 1$ .

## 02

### Роль продолжений и знака

Условие теоремы учитывает и внутренние, и внешние конфигурации: одна из точек может лежать на продолжении стороны. Именно направленные длины позволяют записать всё единым правилом, без отдельных случаев.



# Теорема Чебы: формула, смысл, вывод

Сравните геометрический и алгебраический смысл: конкурентность трёх чевиан проверяется произведением направленных отношений.

Теорема Чебы превращает задачу о пересечении прямых в проверку одного равенства; знак и «направленность» делают формулу универсальной.

Классическая теорема планиметрии для треугольника.

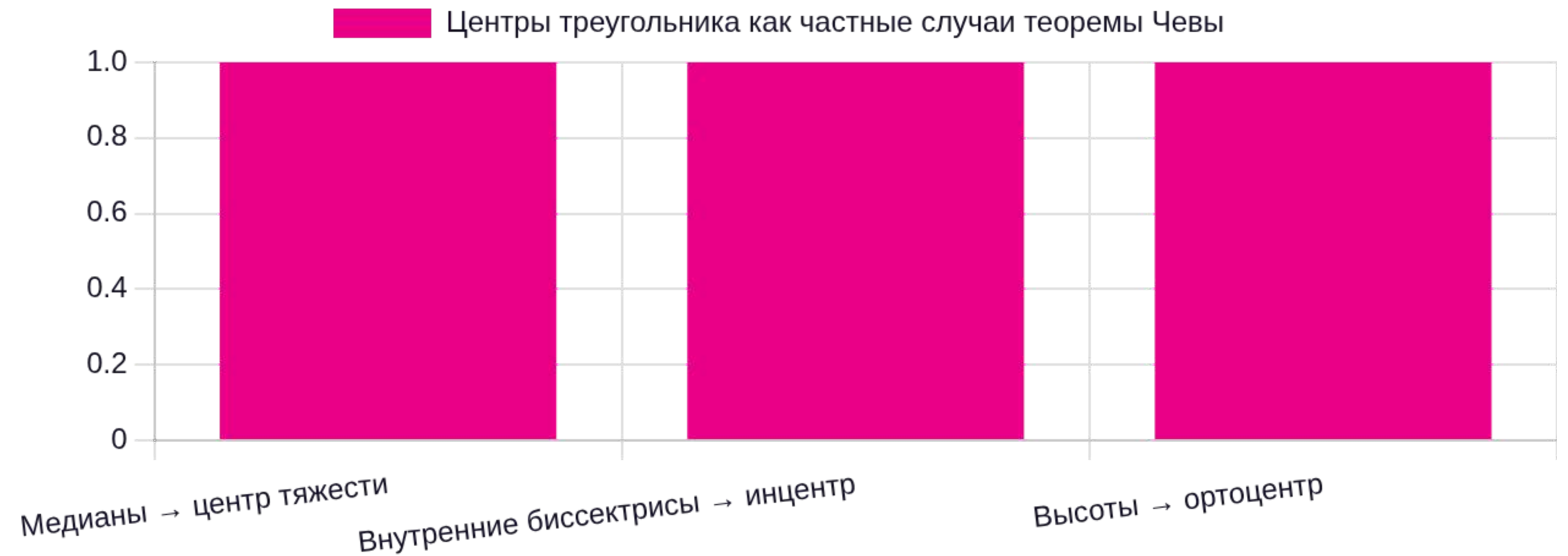
| Признак                  | Геометрический смысл                 | Алгебраическое условие                          | Типичный вывод               |
|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------|
| Три прямые AA1, BB1, CC1 | Конкурентность                       | $(BA1/A1C) \cdot (CB1/B1A) \cdot (AC1/C1B) = 1$ | Есть общая точка пересечения |
| Те же чевианы            | Три точки деления сторон согласованы | Произведение направленных отношений равно 1     | Конкурентность подтверждена  |

# Частные случаи теоремы Чеви

Выбирая точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  так, чтобы чевианы стали медианами, биссектрисами или высотами, мы получаем известные «особые» точки треугольника.

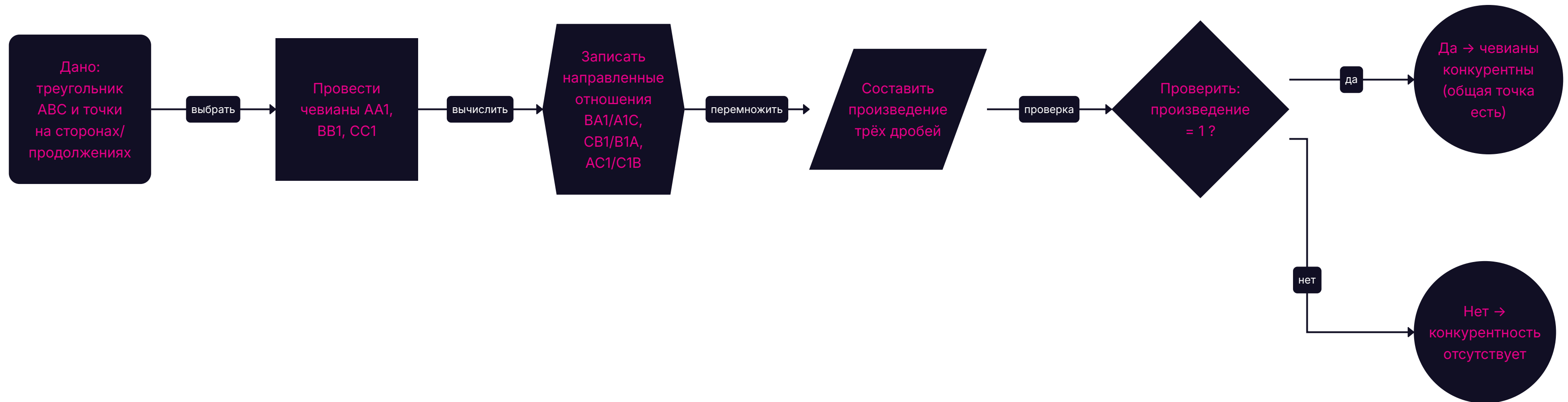
В каждом из трёх случаев выполняется общий критерий теоремы Чеви, что показывает её роль как единого механизма для разных конфигураций.

Школьный курс планиметрии, классические свойства медиан, биссектрис и высот.



# Алгоритм применения теоремы Чебы

Схема помогает решать типовые задачи на конкурентность и поиск неизвестных отношений





-1

**Знак минус показывает, что одна из точек оказывается на продолжении стороны и меняет ориентацию отношений.**

Классическая теорема Менелая (евклидова геометрия, алгебраическая форма с направленными длинами).

**Три точки пересечения секущей прямой с АВ, ВС и продолжением СА лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $(BA_1/A_1C) \cdot (CB_1/B_1A) \cdot (AC_1/C_1B) = -1$  для направленных длин.**

# Чем теорема Менелая отличается от теоремы Чебы

01

## Разные объекты: прямые через вершины и одна секущая

Теорема Чебы рассматривает три прямые, проведённые через вершины треугольника, и задаёт критерий их конкурентности. Теорема Менелая относится к одной секущей, пересекающей стороны и их продолжения, и описывает коллинеарность трёх точек.

02

## Разный знак в общей формуле

По структуре формулы действительно близки: в обоих случаях перемножаются три дроби с направленными длинами. Однако в Чебе произведение равно 1, а в Менелая — -1, поэтому знак различает геометрический смысл двух ситуаций.



# Сравнение теорем Менелая и Чевы

| Признак            | Теорема Чевы                 | Теорема Менелая                                                |
|--------------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Объект             | Три чевианы                  | Одна секущая                                                   |
| Условие            | Конкурентность               | Коллинеарность                                                 |
| Формула            | Произведение = 1             | Произведение = -1                                              |
| Основной результат | Общая точка пересечения      | Общая прямая для трёх точек                                    |
| Типичные задачи    | Медианы, биссектрисы, высоты | Доказательство коллинеарности точек на сторонах и продолжениях |

Общее в них — язык направленных отношений; различие — тип фигуры и значение, к которому должно прийти произведение.

Выбор теоремы определяется объектом задачи (чевианы или секущая), а знак в произведении служит надёжным «маячком» для правильной интерпретации конфигурации.

Школьный курс геометрии: классические теоремы планиметрии.

# Направленные длины и роль знака в формулах

01

Когда точка лежит на продолжении стороны, обычная положительная длина теряет информацию об ориентации. Направленная длина сохраняет направление на прямой, поэтому одна запись покрывает все конфигурации.

02

В теоремах Чевы и Менелая дроби состояются из направленных отношений отрезков на одной линии. Тогда знак автоматически отражает, по какую сторону «опорного» отрезка расположена точка.

03

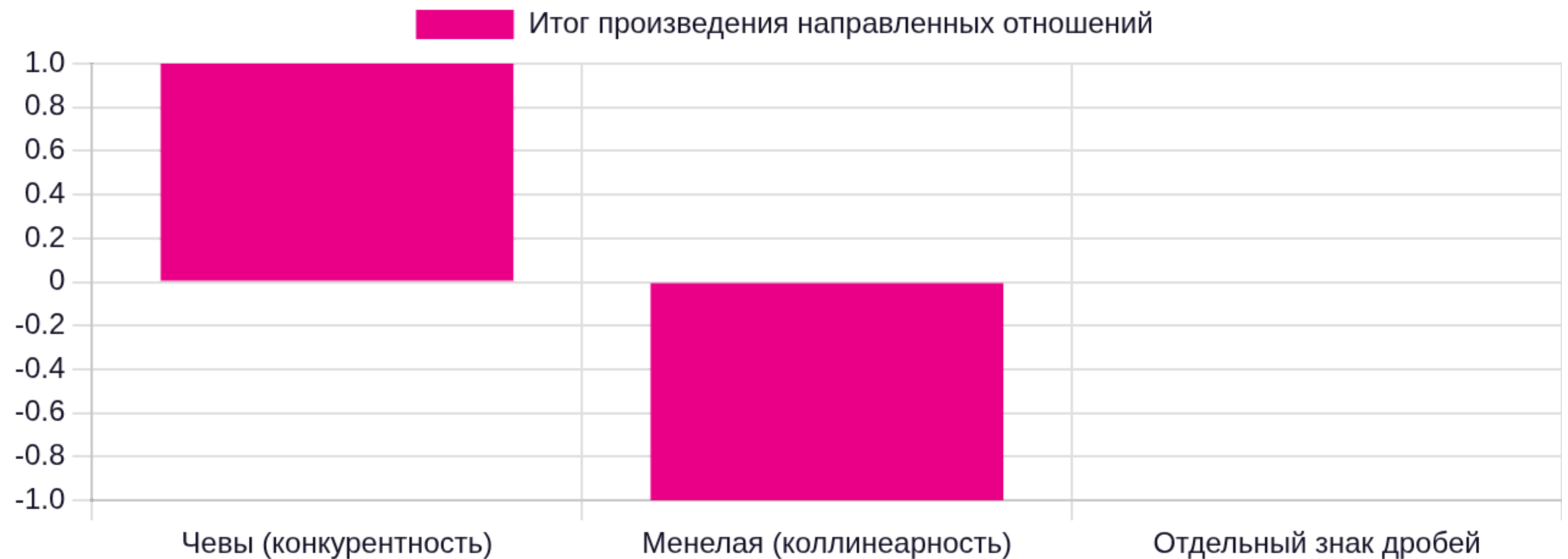
Именно знак делает формулы универсальными: одна и та же геометрическая связь может дать продукцию, равную 1, или продукцию, равную  $-1$ . Благодаря этому различаются конкурентность и коллинеарность.

# Что означают отношения отрезков в формулах

Три дроби в произведении могут принимать разные значения, но их согласованность определяет общий итог. По нему судят о типе конфигурации: конкурентность или коллинеарность.

Сравнение показывает: важен не отдельный коэффициент, а согласованность всех трёх. Для теоремы Чебы требуется итог 1, для Менелая — итог -1.

Схема-иллюстрация на основе формул теорем Чебы и Менелая (точных значений 1 и -1 достаточно для диаграммы).



# Применение в задачах школьной и олимпиадной геометрии



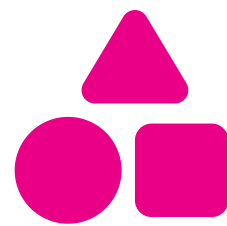
## Проверка конкурентности чевиан

Теорема Чевы помогает быстро решать задачи на доказательство, что три заданные прямые проходят через одну точку. Часто это сводится к аккуратной записи направленных отношений на сторонах треугольника.



## Доказательство коллинеарности точек

Теорема Менелая применяется, когда требуется установить принадлежность трёх точек одной прямой. Обычно точки получаются как пересечения секущей с границами треугольника и его продолжениями.



## Отношения площадей и деление сторон

Во многих олимпиадных задачах площадь треугольника удобно выражается через высоту и основание. Затем отношения площадей превращаются в дроби по основаниям, что напрямую подставляется в формулы Чевы или Менелая.



## Построение вспомогательных прямых

Если искомая конфигурация «не видна» на чертеже, часто строят вспомогательные точки и секущие. Далее теоремы Чевы и Менелая выступают проверочным инструментом: совпадает ли нужное условие.

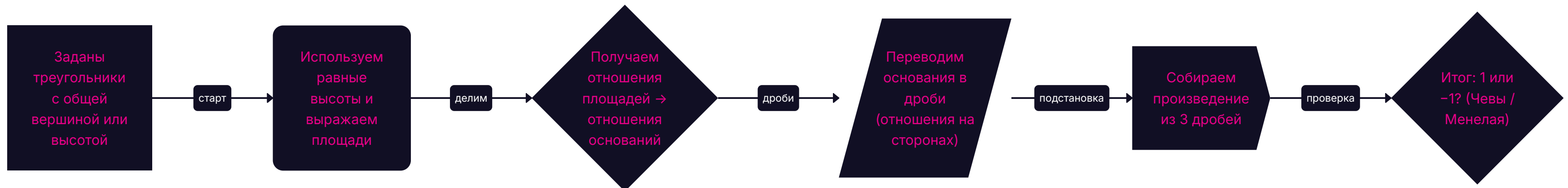


## Контроль «правильного знака»

Олимпиадные решения заметно выигрывают, когда автор заранее выбирает продолжения сторон и корректно вводит направленные длины. Так предотвращается типичная путаница, при которой знак «ломает» проверку условия.

# Переход от площадей к отношениям на сторонах

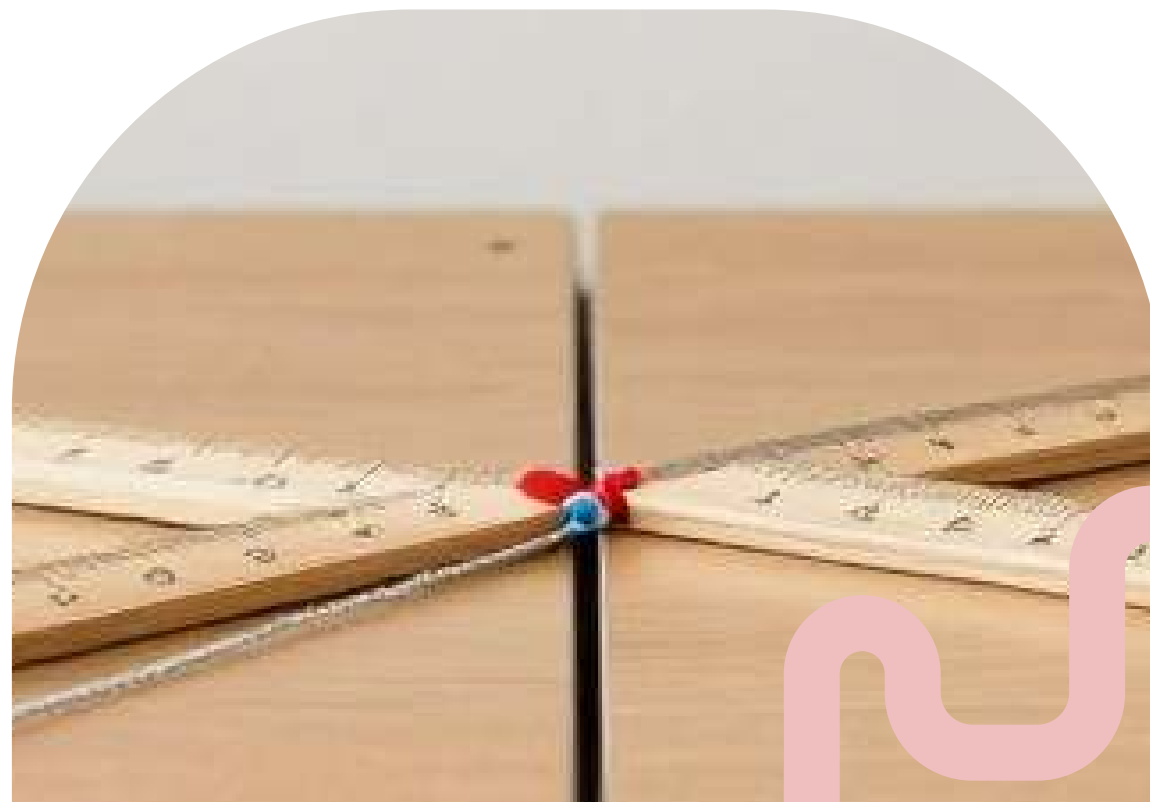
Логическая цепочка из высот и площадей в дроби для последующей проверки теорем Чебы или Менелая.



# Типичные ошибки при решении задач

Частая ошибка — смешать конкурентность и коллинеарность: в одном случае требуется пересечение трёх прямых, в другом — принадлежность трёх точек одной секущей. Из-за этого проверяют не тот критерий и получают противоречия.

Ещё одна распространённая проблема связана с направленными длинами: где нужна ориентация, применяют обычные положительные отрезки. Кроме того, неверно выбирают сторону или её продолжение, отчего знак в формуле Менелая получается неправильным.



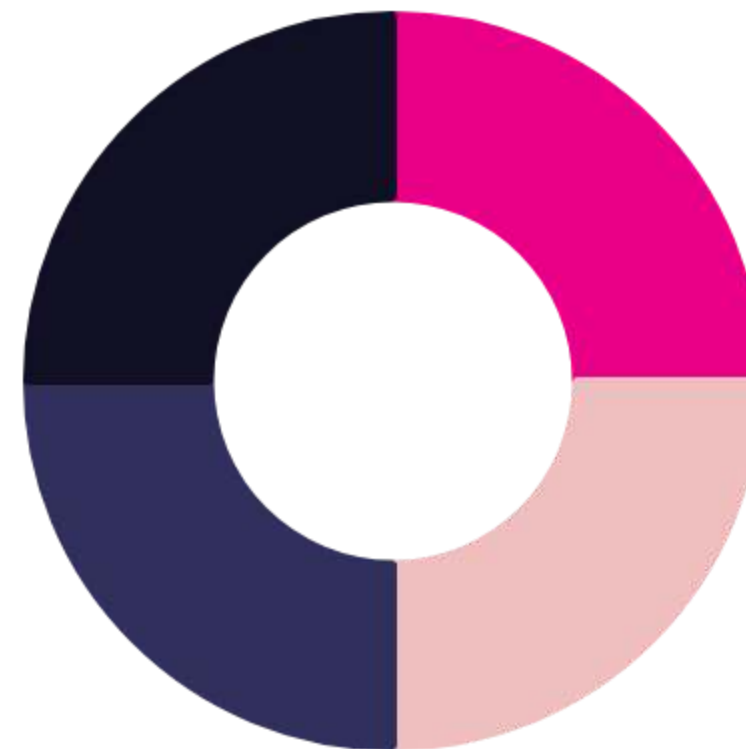
# Известные центры треугольника как примеры теоремы Чевы

Классические центры легко интерпретировать через системы чевиан: медианы, биссектрисы и высоты образуют «конкурентные» наборы. Для внешних центров используются биссектрисы, учитывающие продолжения.

Список показывает, что Чевева логика объединяет разные виды прямых: условие конкурентности работает единым языком отношений. Поэтому центр получается как точка пересечения соответствующих чевиан.

Наблюдение-обобщение школьной планиметрии: центры определяются через пересечения медиан/биссектрис/высот (точных числовых данных для диаграммы не требуется).

■ Центр тяжести (медианы) ■ Инцентр (биссектрисы) ■ Ортоцентр (высоты)  
■ Внешние центры (биссектрисы)



# Родственные идеи и более широкое значение теорем

## 01

Теоремы Чевы и Менелая — это не только «формулы для задач», а универсальные принципы связывания геометрии с алгебраическими отношениями. Они учат переводить фигуру в набор дробей и обратно.

## 02

Идеи этих теорем естественно расширяются в более сложные разделы: в аффинной и проективной геометрии значимы отношения, сохраняемые при преобразованиях. Там же возрастает роль направленных величин и корректной постановки знаков.

## 03

В задачах на многоугольники и многогранники часто появляется необходимость разбить фигуру на треугольники и затем «склеить» условия с помощью чевиан и секущих. Теоремы служат локальными критериями связности.

## 04

В школьной программе классическая треугольная форма рассматривается намеренно: она чаще всего встречается в олимпиадных построениях и доказательствах. Кроме того, именно на треугольнике легче увидеть, почему работает единая структура произведений.

# Короткая формульная памятка

В левой части — ситуация и геометрический объект, в центре — универсальное произведение из трёх дробей с направленными длинами, в правой — вывод.

Шаблон «одна и та же дробная конструкция, но разные итоги» помогает не перепутать теоремы. Проверка значения произведения — самый быстрый критерий выбора вывода.

Сводка формулировок теорем Чеvy и Менелая из школьного курса планиметрии.

| Ситуация                | Формула                                                | Вывод                             |
|-------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Теорема Чеvy            | $(BA1 / A1C) \cdot (CB1 / B1A) \cdot (AC1 / C1B) = 1$  | Три чевианы конкурентны           |
| Теорема Менелая         | $(BA1 / A1C) \cdot (CB1 / B1A) \cdot (AC1 / C1B) = -1$ | Три точки коллинеарны на секущей  |
| Частный случай: медианы | —                                                      | Их пересечение даёт центр тяжести |

# Значение темы для развития математического мышления

Теоремы развивают точность в работе с отношениями, знаками и геометрическими конфигурациями. Вы начинаете не просто чертить «по смыслу», а последовательно задавать направленность и контролировать корректность записи.

Такое доказательное мышление особенно нужно в задачах повышенной сложности: приходится выбирать вспомогательные элементы, переводить условия в алгебраическую проверку и затем возвращаться к геометрическому смыслу результата. Именно связь чертежа и формулы здесь становится ясной.

# Итог: две теоремы — единый язык отношений

Теорема Чебы описывает условие конкурентности трёх прямых, а теорема Менелая — условие коллинеарности трёх точек на сторонах треугольника и их продолжениях. Обе опираются на произведение направленных отношений отрезков и связывают геометрию с алгеброй.