



Логарифмическая функция: определение, свойства и график

Как понять обратную функцию и её график?

Логарифмы: ключ к обратным функциям

В 10 классе логарифмическая функция соединяет степень и логарифм, помогает исследовать графики и объясняет зависимости, которые растут медленно, но описывают очень разные явления в науке и практике.



Определение логарифмической функции

Запись функции

Логарифмической функцией называют выражение $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$. Основание и аргумент должны удовлетворять этим условиям.

Смысл логарифма

Число y показывает, в какую степень нужно возвести основание a , чтобы получить x . Поэтому равносильная форма определения записывается так: $a^y = x$.

Допустимые значения

При любом допустимом основании логарифм определён только для положительных аргументов. Для $x \leq 0$ значение $y = \log_a x$ не существует в действительных числах.

Область и значения

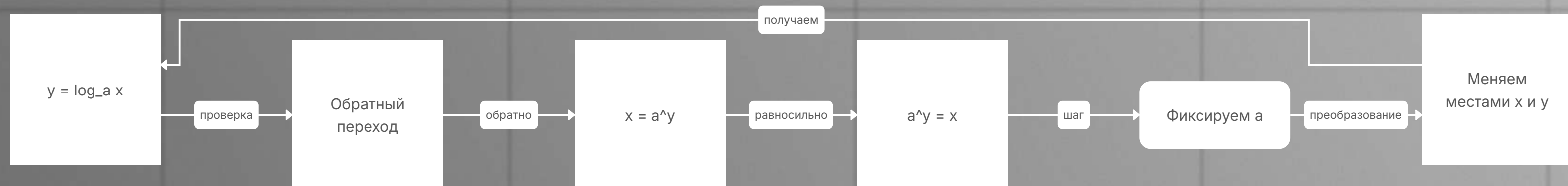
Область определения функции состоит только из положительных чисел, а множество значений охватывает все действительные числа. Это важное отличие логарифмической функции от многих элементарных функций.

Почему это важно

Логарифм позволяет по известному результату восстановить показатель степени. Именно поэтому он незаменим при решении уравнений, исследовании зависимостей и работе с измерительными шкалами.

Связь показательной и логарифмической функций

Переход от уравнения $a^y = x$ к записи $y = \log_a x$ и обратная проверка



Основные свойства функции $y = \log_a x$

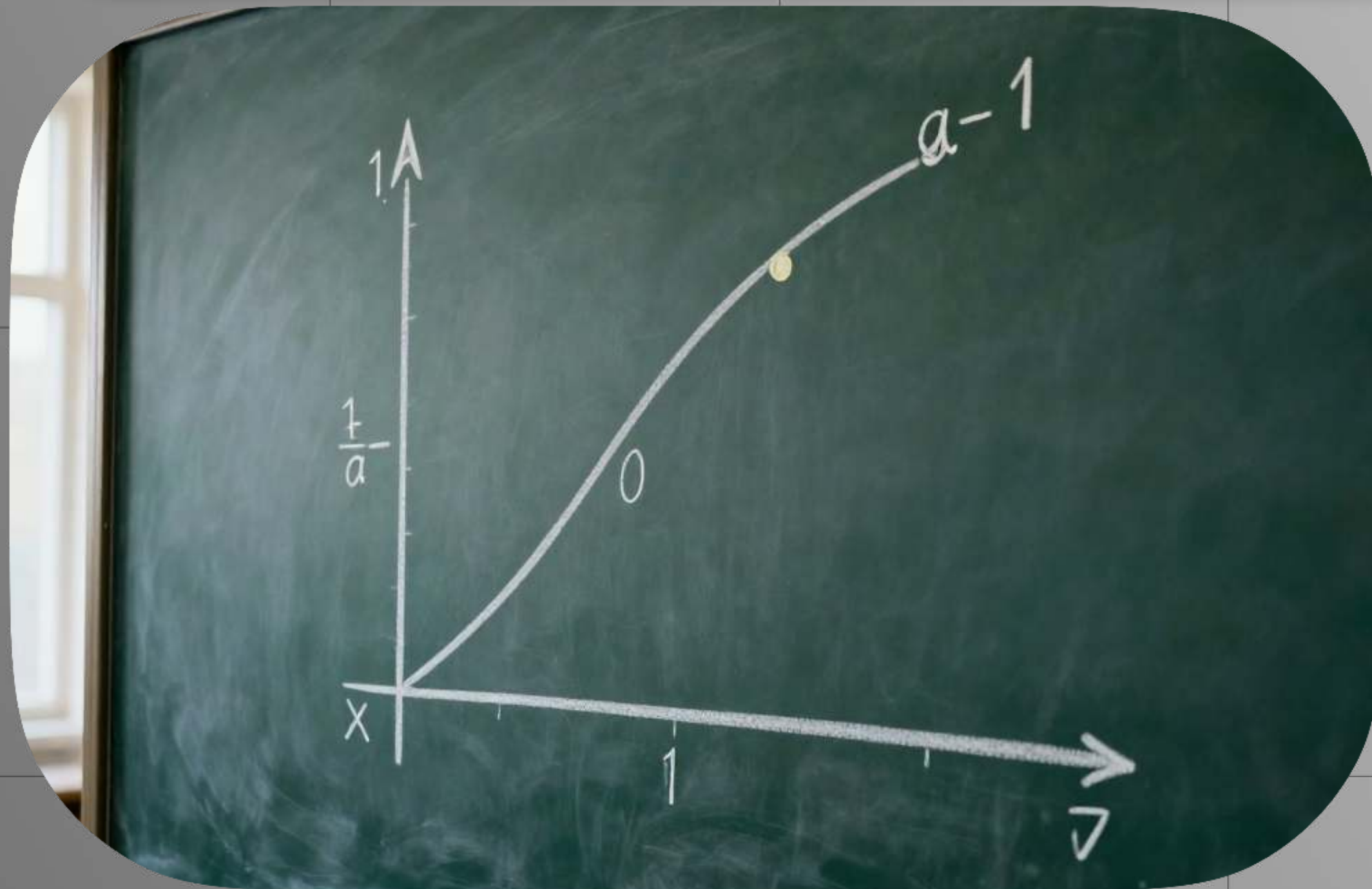
Свойство	Вид
Область	$x > 0$
Значения	$\mathbb{R}$
Точка	$(1; 0)$
Асимптота	$x = 0$
$a > 1$	возрастает
$0 < a < 1$	убывает

Краткая сводка свойств помогает быстро читать график, определять поведение функции и проверять вычисления.

Все ключевые характеристики выводятся из определения: график начинается только при $x > 0$, проходит через $(1; 0)$ и ведёт себя по-разному в зависимости от основания.

Определение логарифмической функции и её стандартные свойства

График логарифмической функции при $a > 1$



Опорные точки

График обязательно проходит через точки $(1; 0)$, $(a; 1)$ и $(1/a; -1)$. Эти координаты удобно использовать как ориентиры при построении без лишних вычислений.

Рост функции

При основании $a > 1$ функция возрастает, но делает это очень постепенно. Чем дальше вправо расположен аргумент, тем медленнее заметен подъём графика.

Поведение у нуля

Если x стремится к 0 справа, значения y уходят к $-\infty$. Поэтому прямая $x = 0$ служит вертикальной асимптотой и график её не пересекает.

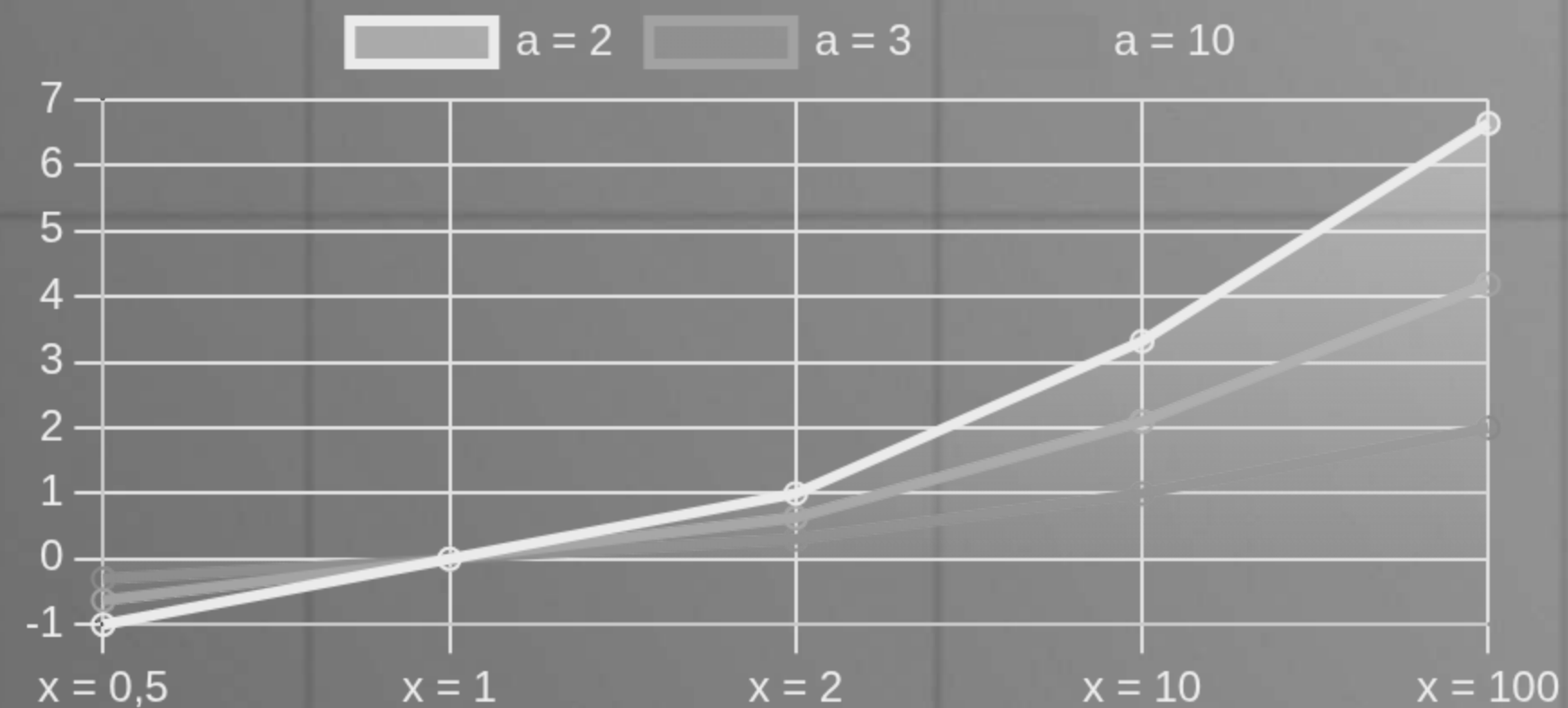
Неограниченный рост

При увеличении x значения логарифма продолжают расти, но без верхней границы. Это делает график плавным и вытянутым по горизонтали.

Что видно на рисунке

На координатной плоскости особенно важно отметить асимптоту и опорные точки: именно они показывают форму кривой и помогают увидеть её связь с показательной функцией.

Сравнение графиков при разных основаниях



Вычисления по формуле $y = \log_a x$ для $a = 2, 3, 10$

На графике удобно сравнить, как меняется скорость роста логарифма при одном и том же x . Все три функции сохраняют общую структуру, но различаются крутизной.

Чем больше основание при $a > 1$, тем медленнее растёт $\log_a x$. Наиболее крутой график соответствует меньшему основанию.

График при $0 < a < 1$

Убывание функции

1

Если основание находится между 0 и 1, логарифмическая функция становится убывающей. При движении вправо значения уменьшаются, а не увеличиваются, как в случае $a > 1$.

Та же область определения

2

Для построения графика по-прежнему допустимы только положительные значения x . Область определения не меняется, поэтому отрицательные аргументы остаются запрещёнными.

Та же асимптота

3

Вертикальная асимптота остаётся прежней: $x = 0$. График подходит к ней справа, но не пересекает её, независимо от того, растёт функция или убывает.

Опорные точки и близость к 1

4

Точки $(1; 0)$, $(a; 1)$ и $(1/a; -1)$ сохраняются, но располагаются иначе. Чем ближе основание к единице, тем слабее меняется значение функции.

Таблица значений для построения графика

x	y
1	0
a	1
a ²	2
1/a	-1
1/a ²	-2

Подстановка характерных значений в $y = \log_a x$

Несколько характерных значений позволяют быстро восстановить форму графика и увидеть закономерность перехода по степеням основания.

Если x выражается степенями основания, значение логарифма получается целым числом. Это делает построение графика быстрым и наглядным.

Преобразования графика логарифмической функции



Сдвиг вправо и вверх

В выражении $y = \log_a(x - b) + c$ график смещается вправо на b и вверх на c . При этом сохраняется характерная форма логарифмической кривой.



Отражение относительно оси Ox

Если записать $y = -\log_a x$, график отражается относительно оси Ox . Все значения меняют знак, но вертикальная асимптота и общий вид остаются узнаваемыми.



Горизонтальное изменение

Форма $y = \log_a(kx)$ изменяет расположение графика по горизонтали. Важно следить за тем, как множитель внутри аргумента сдвигает точки и меняет расстояния.

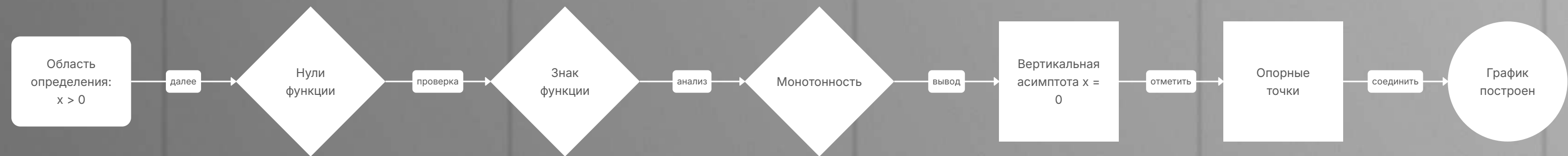


Сохранение логарифмического характера

При любых преобразованиях кривая остаётся логарифмической по виду. Если меняется аргумент, вместе с ним сдвигается и вертикальная асимптота, что помогает быстро читать новый график.

Алгоритм исследования функции $y = \log_a x$

Последовательность шагов: от области определения до построения графика и проверки опорных точек.



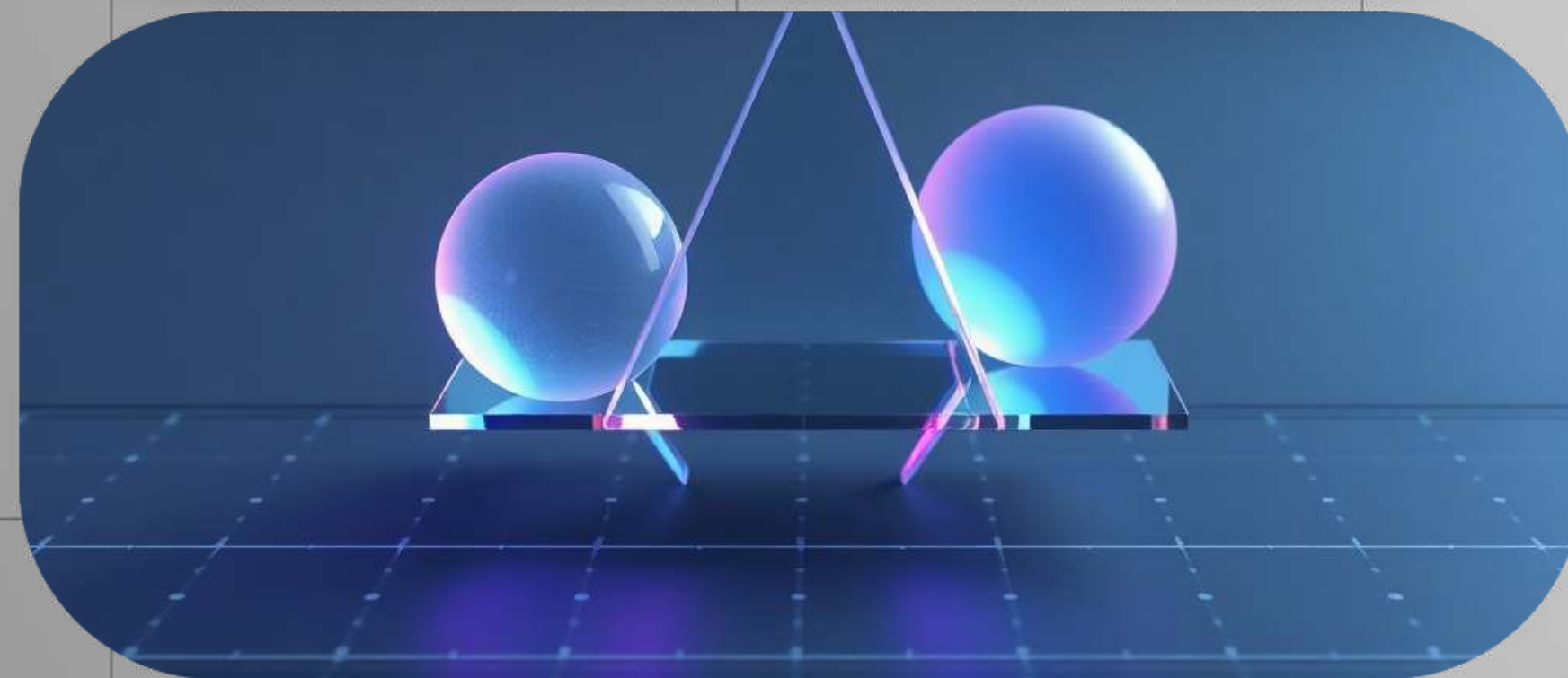
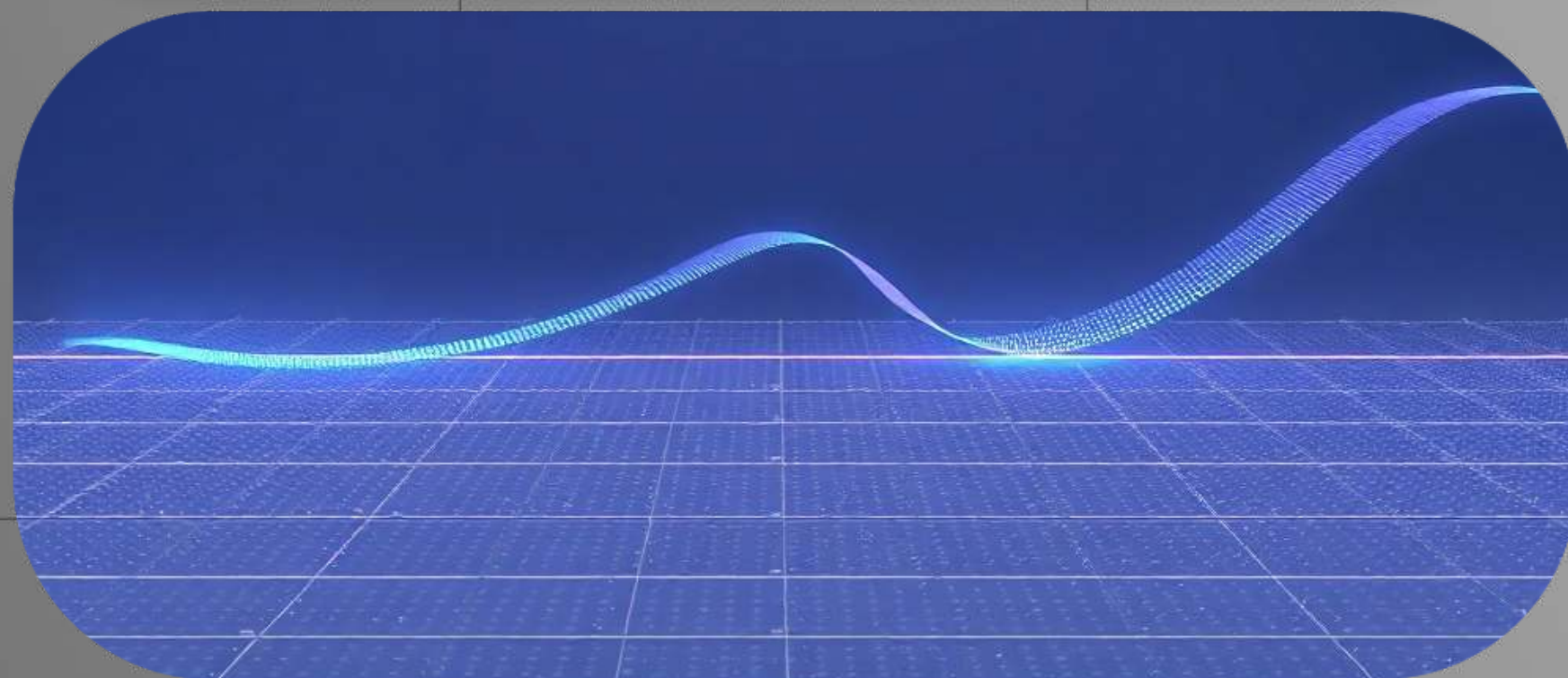
Взаимно обратные функции и симметрия графиков

От показательной формы к логарифму

Показательная функция задаёт значение через степень, а логарифм отвечает на обратный вопрос: какой показатель нужен, чтобы получить данное число. Поэтому при переходе от одной записи к другой меняются местами аргумент и значение. На графике это проявляется как симметрия относительно прямой $y = x$.

Зеркальная пара точек

Если на графике $y = a^x$ отмечена точка $(m; n)$, то на графике $y = \log_a x$ ей соответствует точка $(n; m)$. Такой обмен координат показывает, что функции не просто связаны формулой, а точно отражают друг друга. Именно поэтому их удобно рассматривать вместе.



Логарифмические шкалы в реальной жизни

■ pH ■ Децибелы ■ Шкала Рихтера
■ Двоичный логарифм



Учебные примеры: pH, децибелы, шкала Рихтера, информатика

Эти шкалы используют общий принцип: сравнение величин по порядкам, а не по абсолютной разнице. Это делает большие диапазоны значений удобными для анализа.

Логарифмическая запись особенно полезна там, где изменения слишком велики для обычной линейной шкалы.

Типичные ошибки при работе с логарифмами

Игнорирование области определения

В формулу логарифма нельзя подставлять ноль и отрицательные числа. Условие $x > 0$ обязательно для любого основания, иначе выражение не имеет смысла.

Путаница между основанием и аргументом

Основание показывает, в какую степень возводят число, а аргумент — какое значение получают. Если перепутать эти части, дальнейшие вычисления становятся неверными.

Неверное значение $\log_a 1$

Логарифм единицы всегда равен нулю, потому что $a^0 = 1$. Утверждение $\log_a 1 = 1$ противоречит определению и часто приводит к ошибкам в уравнениях.

Неверная монотонность

При $a > 1$ функция возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает. Если не учитывать это правило, легко ошибиться при сравнении значений логарифма.

Забывтая асимптота

График не пересекает ось Oy , потому что $x = 0$ является вертикальной асимптотой. Поэтому при построении нельзя пытаться вычислять значение функции в этой точке.

Сравнение свойств логарифмической функции при разных основаниях

Свойство	Осн. 2	Осн. $\frac{1}{2}$
Область	$x > 0$	$x > 0$
Точка	(1; 0)	(1; 0)
Монотонность	возрастает	убывает
Асимптота	$x = 0$	$x = 0$

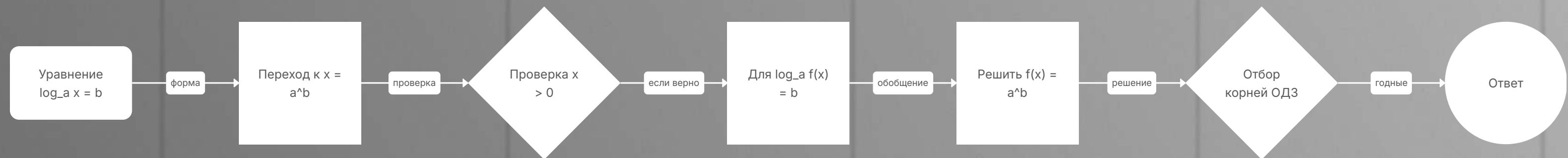
Сравнение трёх распространённых оснований помогает увидеть общие свойства функции и отличие в направлении изменения графика.

Общие характеристики сохраняются при любом допустимом основании, а главным отличием остаётся направление монотонности.

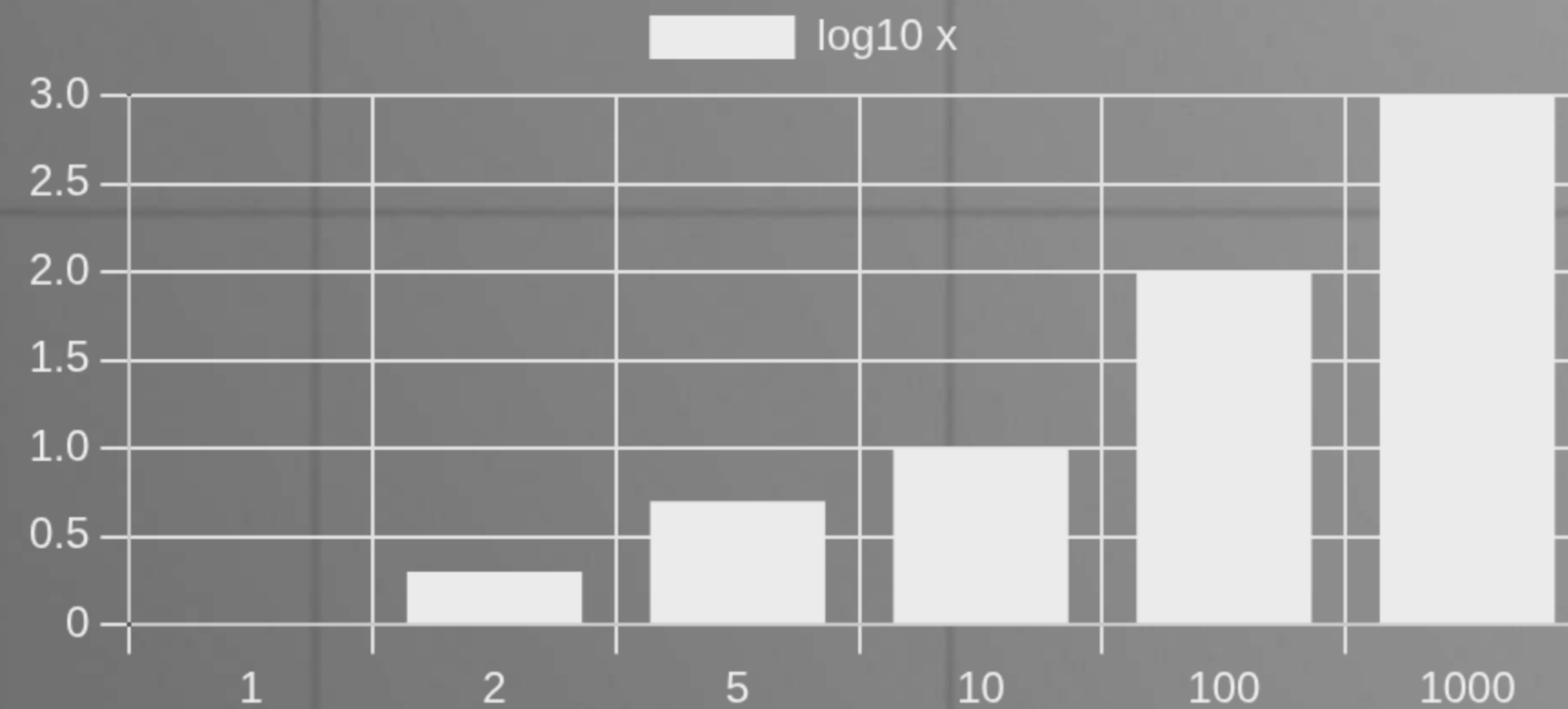
Свойства функции $y = \log_a x$

Решение простых логарифмических уравнений

Базовый алгоритм перехода от логарифмической формы к показательной с последующей проверкой корней.



Медленный рост логарифма



Расчёт по определению $\log_{10} x$

Даже при росте аргумента в сотни и тысячи раз значение функции увеличивается на единицы. Это наглядно показывает сжатие больших чисел логарифмической шкалой.

Логарифм растёт гораздо медленнее линейной и тем более показательной функции, поэтому удобен для больших диапазонов значений.

Практическая значимость логарифмов в учебных предметах



Химия

В химии логарифм используется при вычислении pH. Такая запись позволяет удобно описывать кислотность растворов, когда различия в концентрации ионов водорода очень велики.



Физика

В физике логарифмические формулы применяют при изучении звука и землетрясений. Они помогают сравнивать интенсивности и энергии, которые отличаются на многие порядки.



Информатика

В информатике логарифм связан с оценкой сложности алгоритмов и анализом быстрого роста данных. Он показывает, как меняются вычислительные затраты при увеличении объема задачи.



Статистика

В статистике логарифмические преобразования используют для работы с сильно разбросанными данными. Это облегчает сравнение величин и делает зависимость более наглядной.



Математика

В школьной математике логарифмы нужны для преобразования выражений, решения уравнений и исследования функций. Здесь они служат связующим звеном между степенями и графиками.

Минимальный набор формул для запоминания

1 Логарифм единицы и основания

Формулы $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ задают начальные ориентиры. Они прямо следуют из определения и помогают быстро проверять правильность вычислений.

2 Переход к показательной записи

Равенство $a^{(\log_a x)} = x$ показывает, что логарифм и степень взаимно уничтожают друг друга. Это основной инструмент при решении уравнений и упрощении выражений.

3 Сумма и произведение

Формула $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ позволяет разложить произведение на сумму логарифмов. Она особенно полезна, когда нужно упростить длинные выражения.

4 Частное и разность

Равенство $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ помогает работать с дробями. Оно удобно там, где прямое вычисление затруднено или громоздко.

5 Степень под логарифмом

Формула $\log_a(x^k) = k \log_a x$ выносит показатель степени перед логарифмом. При её применении важно помнить об условиях $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$.

Логарифмы: краткий вывод

Логарифмическая функция связывает степени, графики и числовые шкалы. Если помнить её область определения, асимптоту, монотонность и базовые формулы, тема становится понятной и удобно применимой.