

Признак коллинеарности векторов

Один коэффициент k показывает, совпадают ли направления векторов.



u

z

3

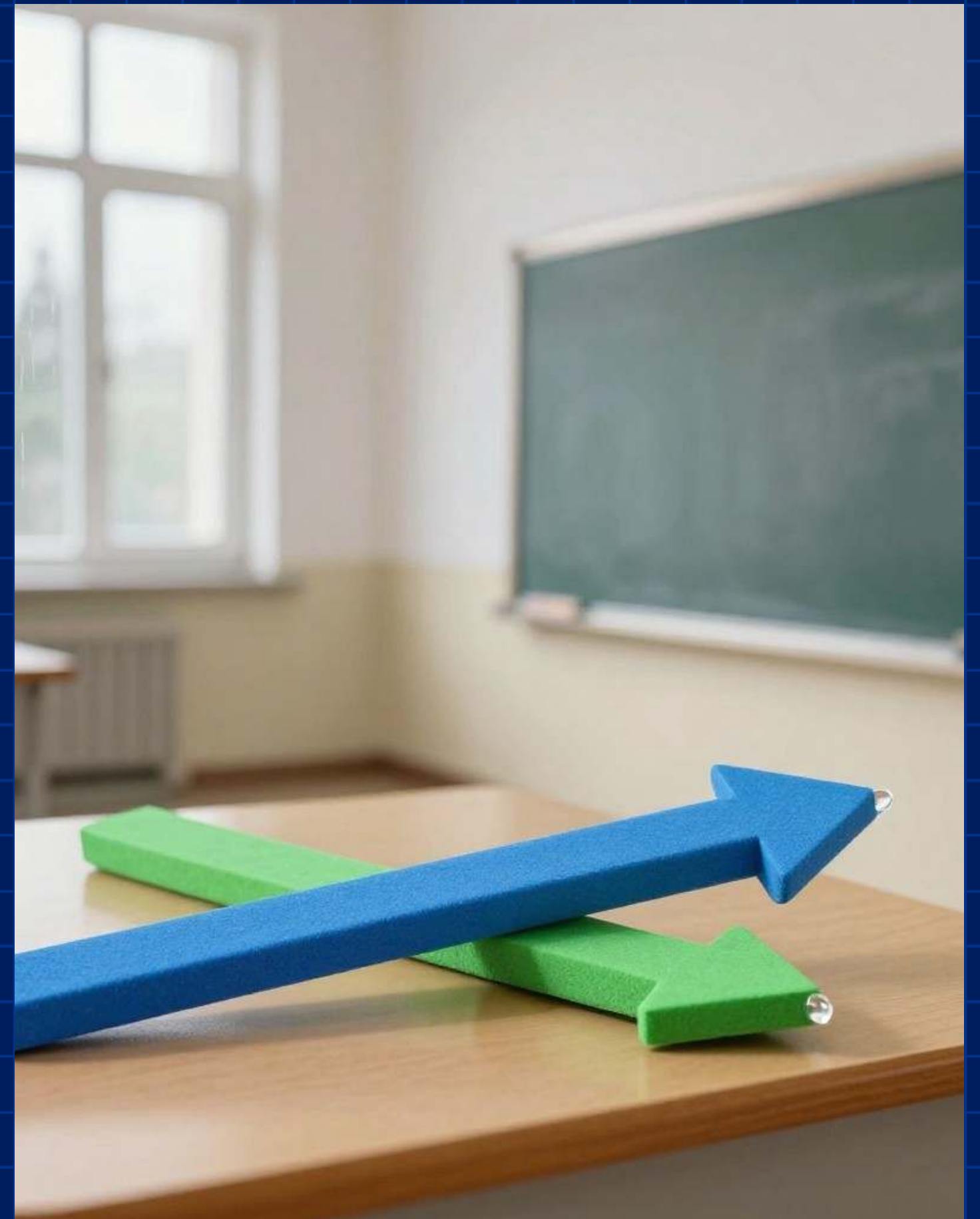
2

$\sqrt{9}$

1

Как понять направление векторов

Коллинеарность помогает быстро определить, смотрят ли векторы в одну сторону или в разные. Этот признак нужен в координатах, уравнениях прямой, геометрии фигур и простых задачах на движение.



Что называют коллинеарными векторами

Одна прямая

Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Их длины могут отличаться, но направление связи остаётся тем же.

Одинаковое направление

Коллинеарные векторы могут быть направлены в одну сторону. Тогда один из них получается из другого увеличением или уменьшением длины без изменения линии действия.

Противоположные стороны

Иногда векторы коллинеарны, но направлены навстречу друг другу. В этом случае они всё равно связаны одной прямой, хотя их стрелки показывают разные направления.

Нулевой вектор

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору. Это удобно в задачах, где одна из координат может оказаться равной нулю, и нужно сохранить общее правило.

$$x^2 + 4x - 8$$





Геометрический смысл коллинеарности

Одна линия

Если векторы лежат на одной прямой, их легко сравнить по направлению. На рисунке это видно сразу: стрелки оказываются на общем или параллельном основании.

Поворот на 180°

Противоположно направленный вектор можно получить из другого поворотом на 180° . Поэтому коллинеарность не требует одинакового направления, а только принадлежности к одной линии.

Растяжение и сжатие

Один вектор можно представить как увеличенную или уменьшенную копию другого. Геометрически это означает, что длина меняется, а направление прямой остаётся тем же.

Связь с координатами

Рисунок помогает понять, почему в координатной записи появляется один коэффициент k . Геометрическое положение векторов и их числа в координатах описывают одно и то же свойство.

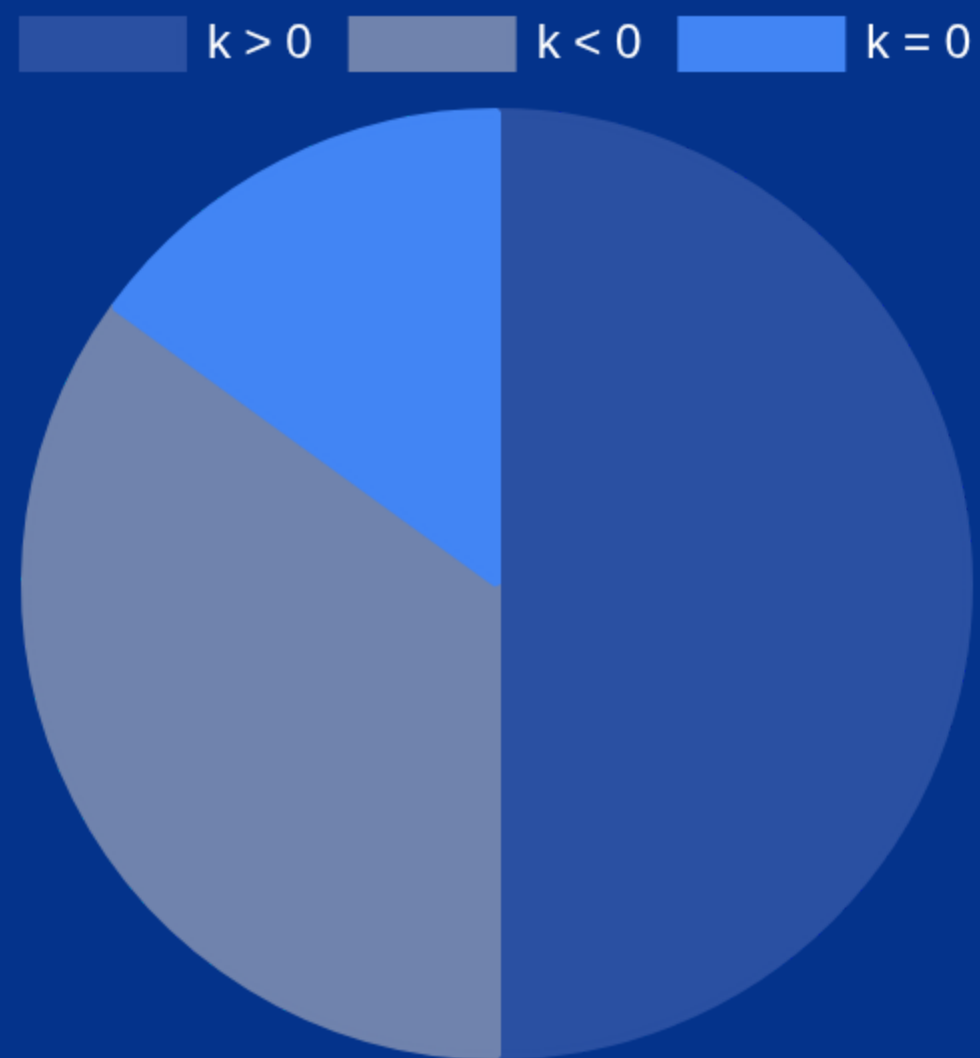
Основные формы записи признака

Форма	Условие	Смысл
$b = k \cdot a$	один множитель	общий коэффициент
$(x_2, y_2) = (kx_1, ky_1)$	одинаковый k	пропорция координат
$x_2/x_1 = y_2/y_1$	$x_1, y_1 \neq 0$	равные отношения
координаты пропорциональны	все части согласованы	векторы коллинеарны

Таблица показывает, как один и тот же признак записывают разными способами.

Если все координаты связаны одним числом k , векторы коллинеарны.

Что означает коэффициент k



Правило коллинеарности векторов; дата не требуется

Знак коэффициента показывает не только связь векторов, но и их взаимное направление. Это помогает сразу понять, совпадают ли стрелки или смотрят в разные стороны.

Положительный k сохраняет направление, отрицательный — меняет его, а ноль даёт нулевой вектор.

Признак коллинеарности на плоскости

1

Записать координаты

Сначала выписывают координаты обоих векторов: $a(x_1, y_1)$ и $b(x_2, y_2)$. Аккуратная запись помогает не перепутать первую и вторую координаты в дальнейшей проверке.



2

Найти общий коэффициент

Затем по первой ненулевой координате находят число k . Оно должно переводить координаты первого вектора во второй, то есть одинаково работать и для x , и для y .



3

Сделать вывод

Если один и тот же коэффициент подходит для обеих координат, векторы коллинеарны. Если для x и y получаются разные числа, признак не выполняется.

4

Особые случаи с нулевыми координатами

Ось Ox

Если оба вектора имеют вид $(3, 0)$ и $(-6, 0)$, они лежат на оси Ox . Координаты пропорциональны, поэтому векторы коллинеарны, хотя направлены в разные стороны.

Ось Oy

Векторы $(0, 5)$ и $(0, -2)$ лежат на оси Oy . Их тоже можно считать коллинеарными, потому что они расположены на одной прямой, а знак показывает противоположное направление.

Не делить на ноль

При проверке отношений координат нельзя делить на ноль. Если одна координата равна нулю, удобнее сравнивать другую координату и помнить, что нулевая составляющая не мешает коллинеарности.

Проверка по смыслу

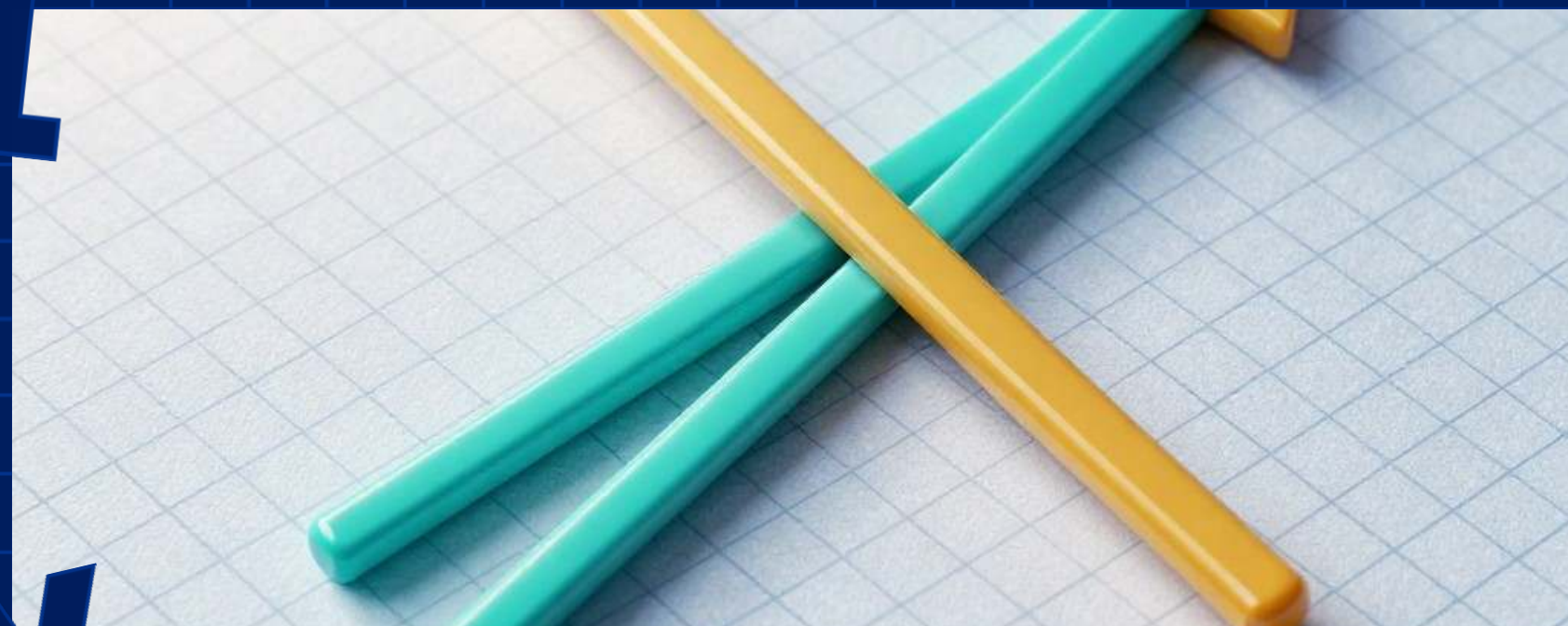
Сначала смотрят, на какой прямой лежат векторы, а потом уже подбирают коэффициент k . Такой подход защищает от ошибок и помогает верно работать с нулевыми значениями.

Как проверить коллинеарность шаг за шагом

Алгоритм основан на сравнении координат двух векторов через один коэффициент k .

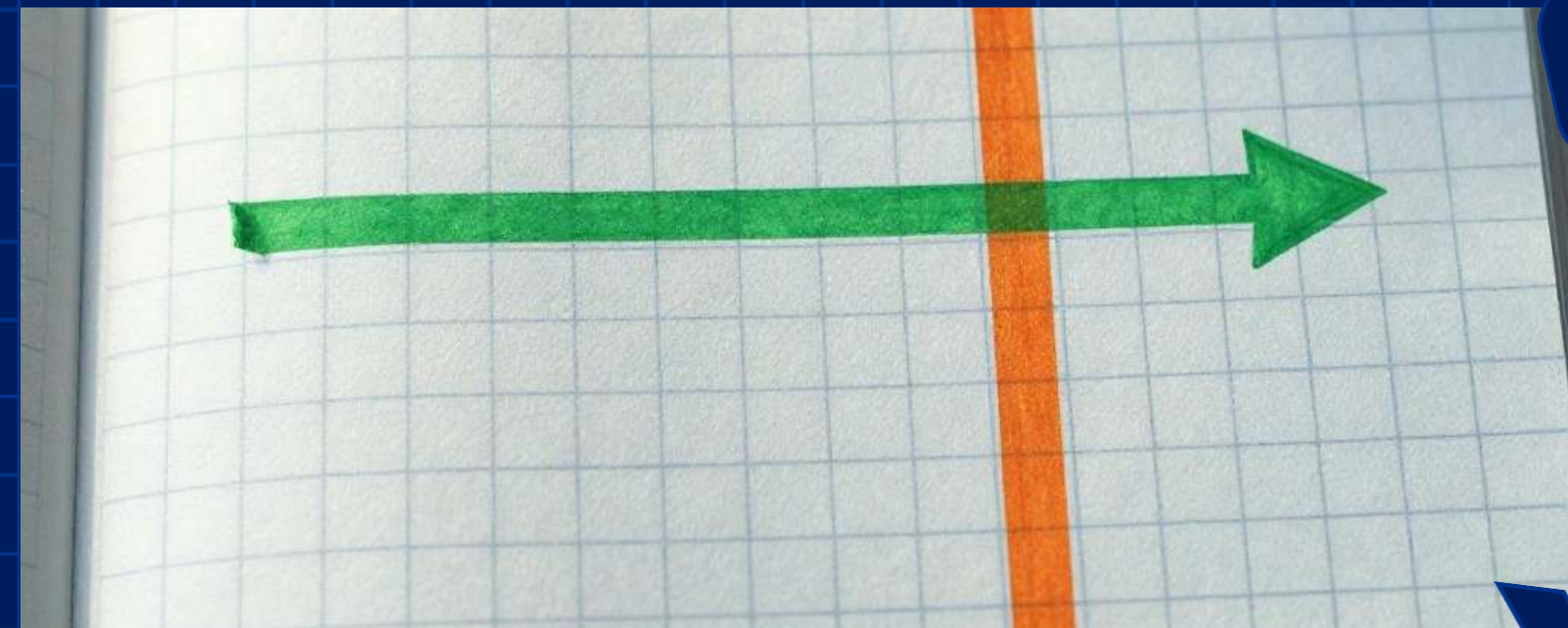


Коллинеарность на клетчатой бумаге



Одинаковый наклон

На клетчатой бумаге сразу заметно, что два вектора могут быть разной длины, но смотреть в одном направлении. Если их стрелки идут по линиям клеток с одинаковым наклоном, они остаются коллинеарными. Это удобно, когда числа в координатах ещё не записаны.



Быстрая проверка по клеткам

Клетки помогают увидеть простые отношения между координатами: $1:2$, $2:3$ или $3:6$. Достаточно сравнить, сколько клеток проходит вектор по горизонтали и вертикали, чтобы понять, подходит ли один и тот же коэффициент.

Примеры проверки по координатам

Векторы	Результат	k
(2,4) и (1,2)	коллинеарны	2
(3,5) и (6,10)	коллинеарны	2
(2,3) и (4,7)	не коллинеарны	—

Учебные примеры по теме «Признак коллинеарности векторов»

В таблице показано, как один и тот же коэффициент подтверждает коллинеарность, а несовпадение отношений координат сразу даёт отрицательный ответ.

Если для всех координат получается одно и то же число, векторы коллинеарны; при разных отношениях координат признак не выполняется.

Чем коллинеарность отличается от равенства векторов

1

Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление. Если один вектор можно полностью наложить на другой без поворота и растяжения, то они равны и, значит, коллинеарны.



2

Коллинеарные, но не равные

Коллинеарные векторы могут отличаться по длине и даже быть направлены в противоположные стороны. Для коллинеарности важна только общая линия направления, а не точное совпадение размеров.



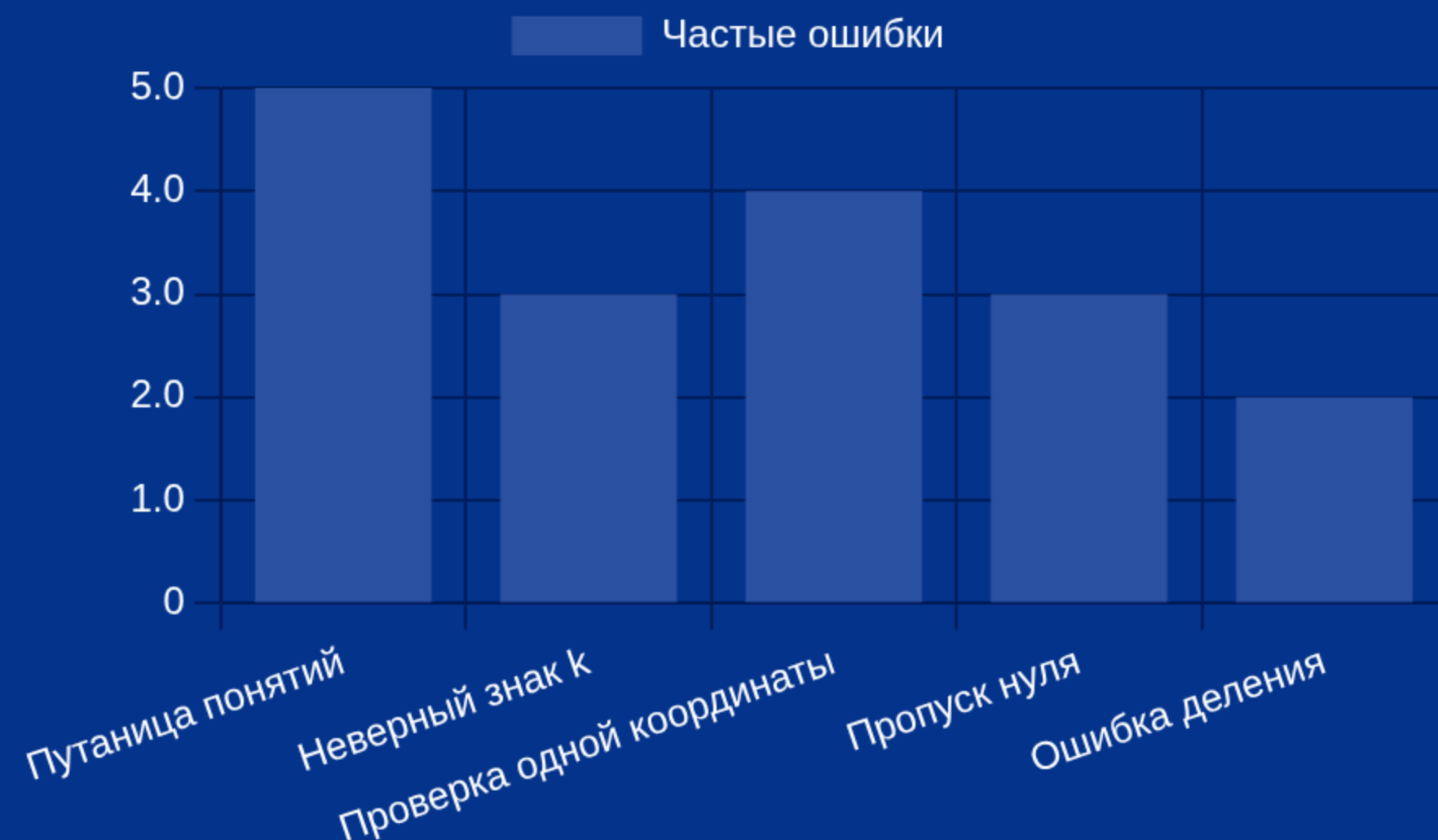
3

Главный вывод

Равенство всегда включает коллинеарность, но обратное утверждение неверно. В задачах это различие помогает не смешивать полное совпадение векторов с их параллельностью или противоположным направлением.

4

Типичные ошибки при проверке



Иллюстративная учебная схема по теме; 2025

Чаще всего ошибки возникают из-за спешки: ученик проверяет не все координаты или не замечает знак коэффициента и нулевые значения.

Самая заметная проблема – неполная проверка координат. Чтобы избежать ошибок, нужно последовательно сравнивать все компоненты векторов.

Признак коллинеарности в пространстве

То же правило

В пространстве признак работает так же, как на плоскости: один вектор должен выражаться через другой одним и тем же числом k для всех координат.

Три координаты

Для векторов $a(x_1, y_1, z_1)$ и $b(x_2, y_2, z_2)$ нужно проверить равенства $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$ и $z_2 = kz_1$. Коэффициент должен совпадать во всех трёх записях.

Что проверять особенно внимательно

Если одна из координат равна нулю, нужно аккуратно рассматривать остальные значения и не делить на ноль. Именно одинаковый коэффициент подтверждает коллинеарность в пространстве.

Сравнение признака на плоскости и в пространстве

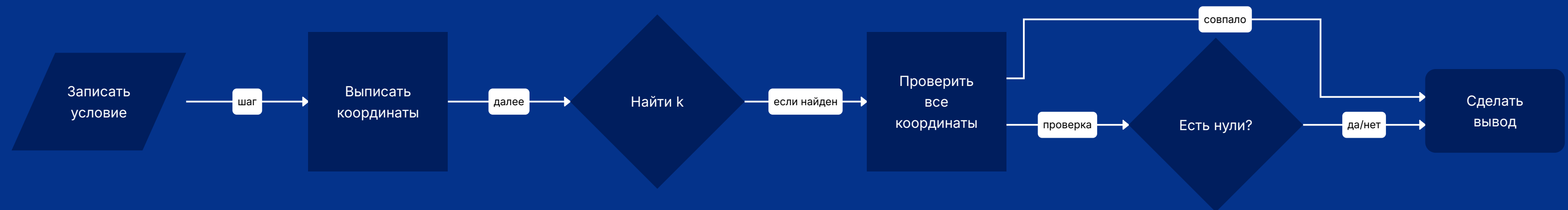
Случай	Координаты	Проверка
Плоскость	2	x и y
Пространство	3	x , y и z
Общее	k одно	все координаты

Таблица показывает, что смысл признака одинаковый, а различие связано только с числом координат, которые нужно проверить.

Чем больше координат у вектора, тем внимательнее нужно сравнивать пропорции, но сам признак остаётся тем же: один коэффициент для всех компонентов.

Как решать задачи на коллинеарность

Последовательность проверки по координатам помогает избежать ошибок в вычислениях и выводах.



Где встречается признак коллинеарности

Геометрические фигуры

Признак помогает определить, параллельны ли стороны многоугольника. Если направления сторон совпадают или противоположны, можно быстрее установить важные свойства фигуры.

Движение по прямой

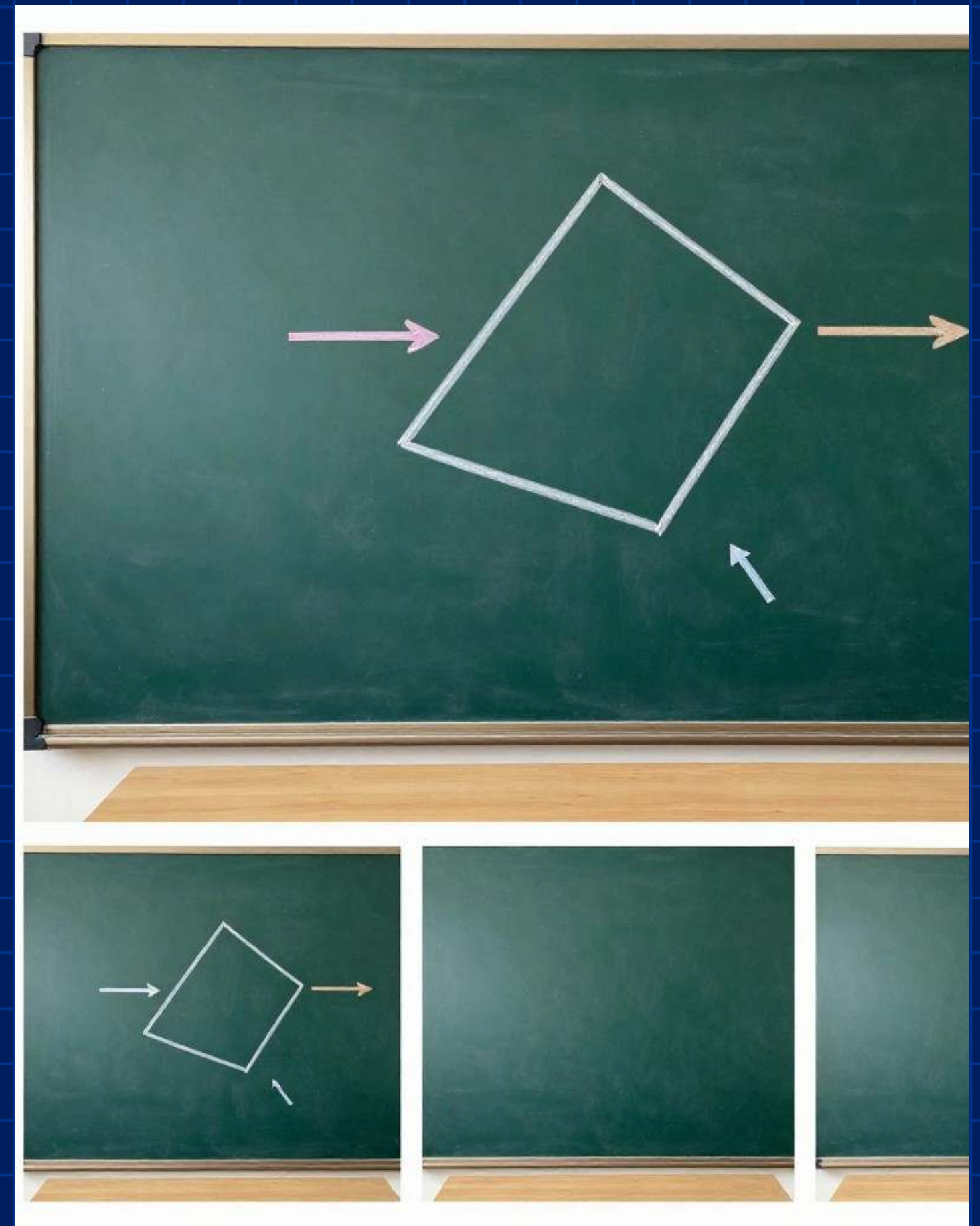
В задачах на движение коллинеарность показывает, идёт ли объект по одной линии. Это удобно при сравнении маршрутов, скорости и направления перемещения.

Чертежи и схемы

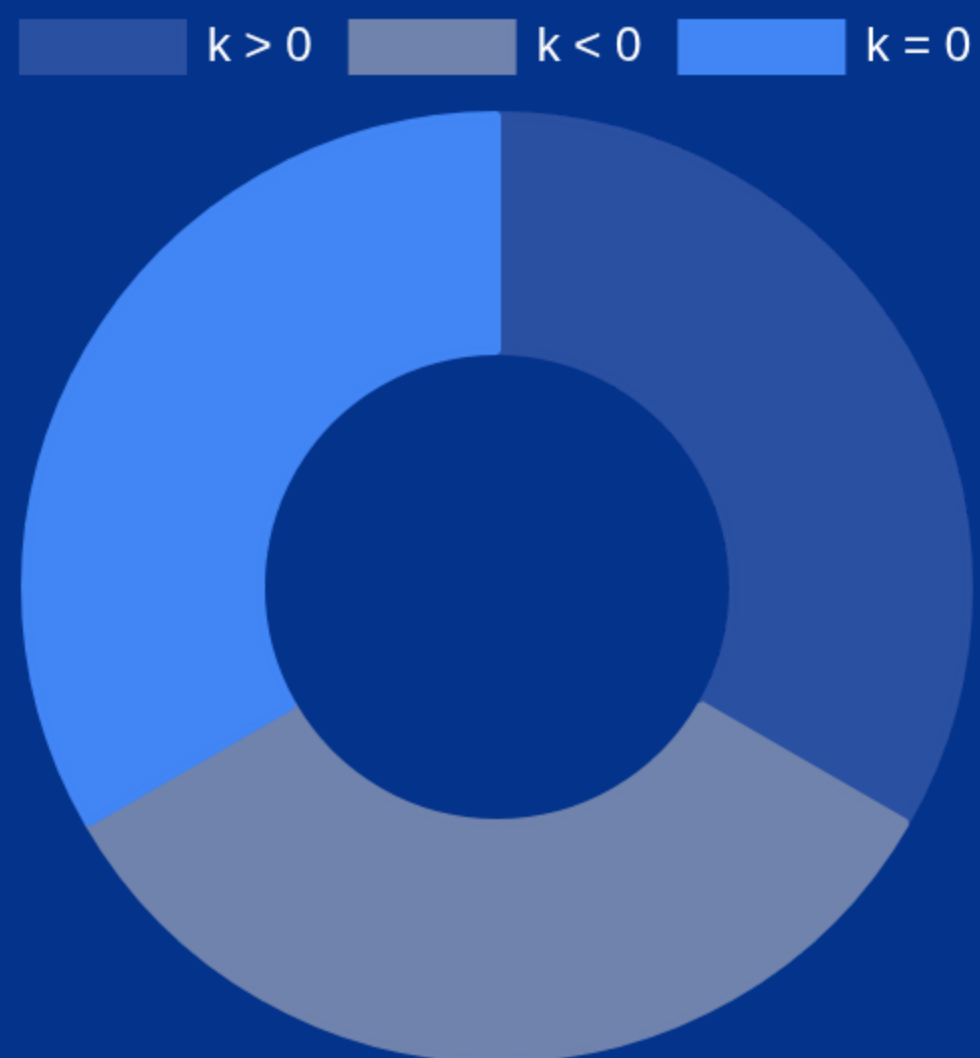
На схемах коллинеарные векторы изображают стрелками одинакового или противоположного направления. Такой рисунок помогает увидеть связь между элементами без длинных вычислений.

Лучи и отрезки

При работе с лучами света, отрезками и направленными линиями признак позволяет быстро проверить, лежат ли объекты на параллельных или одной и той же прямой.



Краткая формула для запоминания



Учебная памятка по признаку коллинеарности; 2025

Формула $b = k \cdot a$ связывает геометрию и координаты в одном коротком правиле, поэтому её удобно использовать и в устных ответах, и в вычислениях.

Знак коэффициента сразу подсказывает направление векторов, а сама запись показывает, что коллинеарность проверяется через одно общее число.

Практическая проверка в три шага

1

Записать координаты

Сначала аккуратно выписывают координаты обоих векторов. Ошибка в знаке или порядке чисел сразу меняет ответ, поэтому этот шаг нужно выполнять особенно внимательно.



2

Найти общий коэффициент

Затем по первой ненулевой координате находят число k . После этого проверяют, подходит ли тот же коэффициент для остальных координат и не возникает ли противоречий.



3

Сделать вывод

Если во всех координатах получается один и тот же коэффициент, векторы коллинеарны. Если хотя бы одно отношение не совпадает, признак не выполняется.

4

Главное о коллинеарности векторов

Коллинеарность удобно проверять через одно число k : оно связывает координаты и показывает направление векторов. Этот признак работает на плоскости и в пространстве, помогая решать геометрические задачи быстрее и точнее.



$\cos$

$\sin$

1

tg

ctg