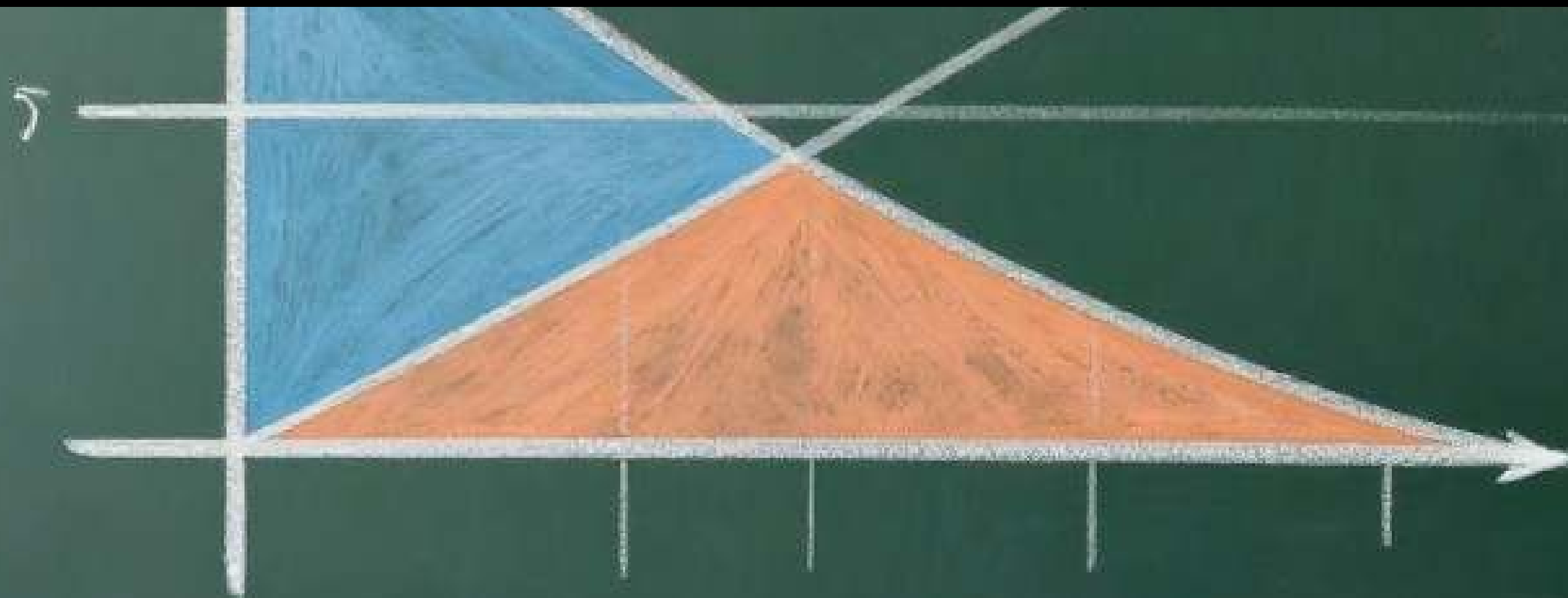


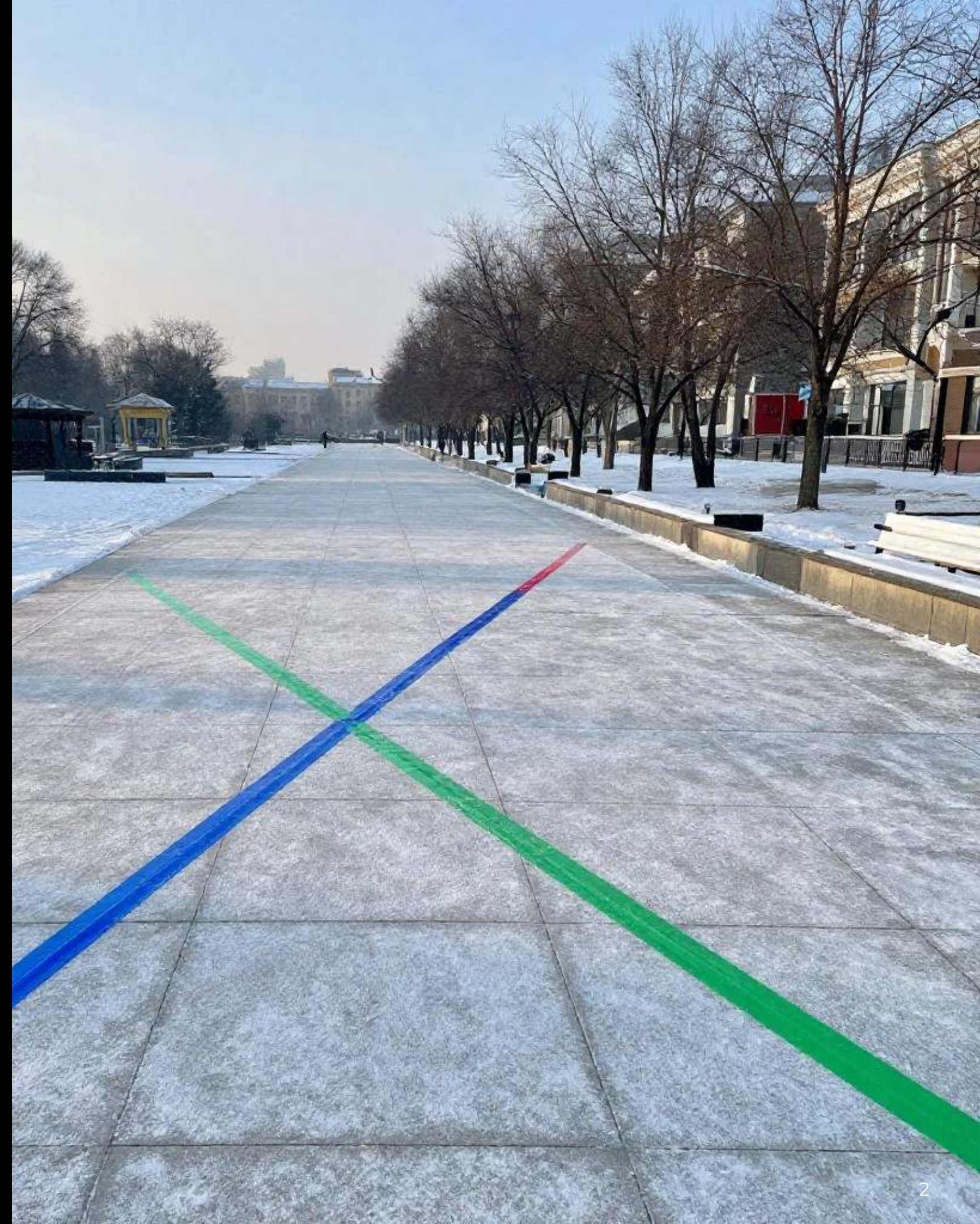
Линейные неравенства с двумя переменными и их системы

Области решений на координатной плоскости



Зачем изучать неравенства с двумя переменными

Эта тема показывает, как одно условие на x и y описывает сразу много точек. Она связывает алгебру с графиками, координатами и простыми жизненными ограничениями.



Что такое линейное неравенство с двумя переменными

1. Общий вид записи

Такие неравенства записывают через выражения $ax+by>c$, $ax+by<c$, $ax+by\geq c$ или $ax+by\leq c$. Здесь x и y — переменные, а a , b и c — числа.

2. Два коэффициента важны

Числа a и b не могут одновременно равняться нулю, иначе зависимость от двух переменных исчезнет. Тогда запись перестанет задавать линейное неравенство с двумя переменными.

3. Что считается решением

Решением является любая пара чисел $(x; y)$, при которой неравенство становится верным после подстановки. Одна пара может подходить, а другая — нет.

4. Множество решений на плоскости

Все подходящие пары образуют множество решений. На координатной плоскости его удобно показывать как область точек, а не как один-единственный ответ.

Граница решения: прямая на координатной плоскости

Как строят границу

Сначала заменяют знак неравенства на равенство и получают прямую $ax+by=c$. Эта линия отделяет точки, которые удовлетворяют условию, от точек, которые не подходят.

Когда линия пунктирная

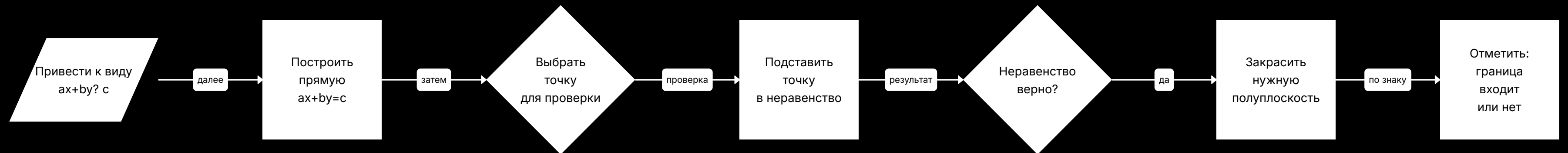
Если в неравенстве стоят знаки $>$ или $<$, граничные точки не входят в ответ. Поэтому прямую изображают пунктиром, чтобы подчеркнуть исключение линии из решения.

Когда линия сплошная

Если используются знаки $\geq$ или $\leq$, точки на границе тоже подходят. В этом случае прямую рисуют сплошной линией и включают в область решений.

Алгоритм решения одного неравенства

Пошаговая схема построения области решений на плоскости



Как выбрать точку для проверки



Начать с (0; 0)

Чаще всего удобно проверить точку (0; 0), если она не лежит на границе. Подстановка этой пары быстро показывает, какую полуплоскость нужно закрасить.



Если точка подошла

Когда (0; 0) удовлетворяет неравенству, выбирают ту полуплоскость, где находится эта точка. Значит, все точки этой области тоже будут решениями.



Если нужна другая точка

Если начало координат не подходит или лежит на прямой, берут простую точку: (1; 0), (0; 1) или (1; 1). Такие точки легко подставлять.



Одна точка — вся область

Проверка одной точки достаточна, потому что внутри одной полуплоскости все точки ведут себя одинаково. Поэтому не нужно проверять каждую точку отдельно.

Как знак неравенства связан с видом границы



На диаграмме видно, какие знаки требуют пунктирной линии, а какие — сплошной. Это помогает быстро выбрать правильный способ изображения.

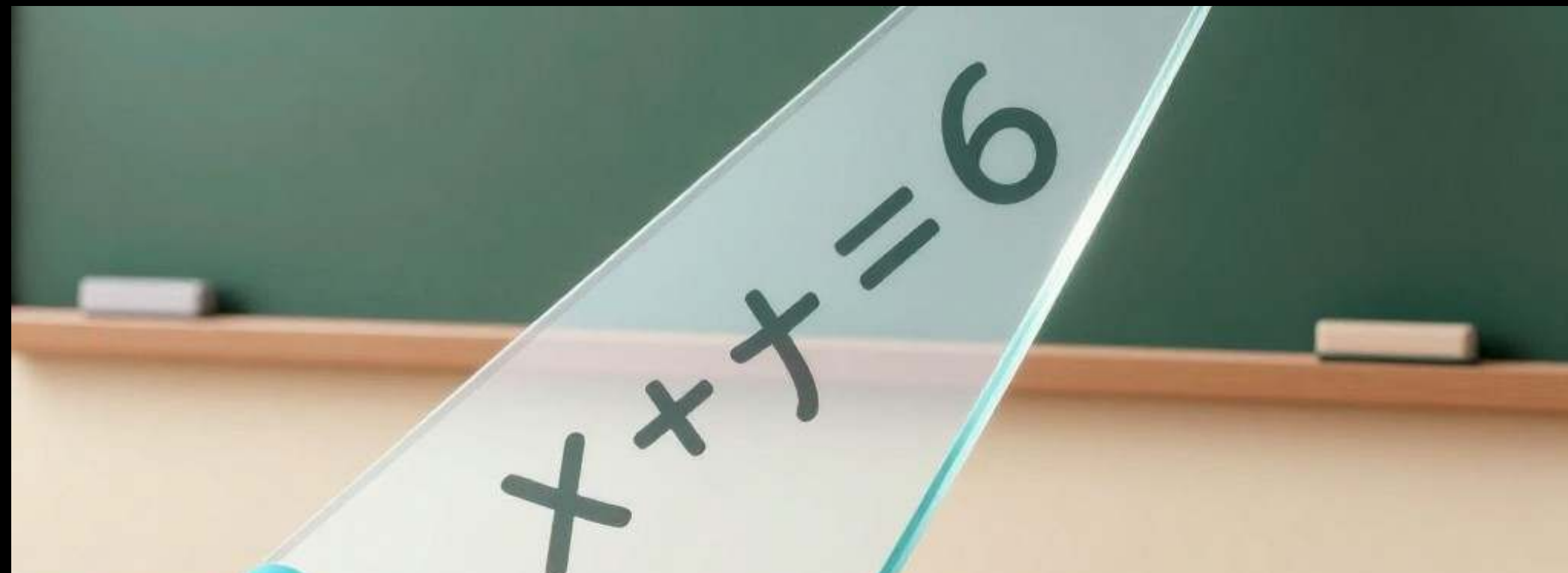
Строгие знаки связаны с исключением граничных точек, нестрогие — с их включением. Значит, линия и область всегда определяются вместе.

Правило построения границы для линейных неравенств с двумя переменными

Пример: $x + y \leq 6$

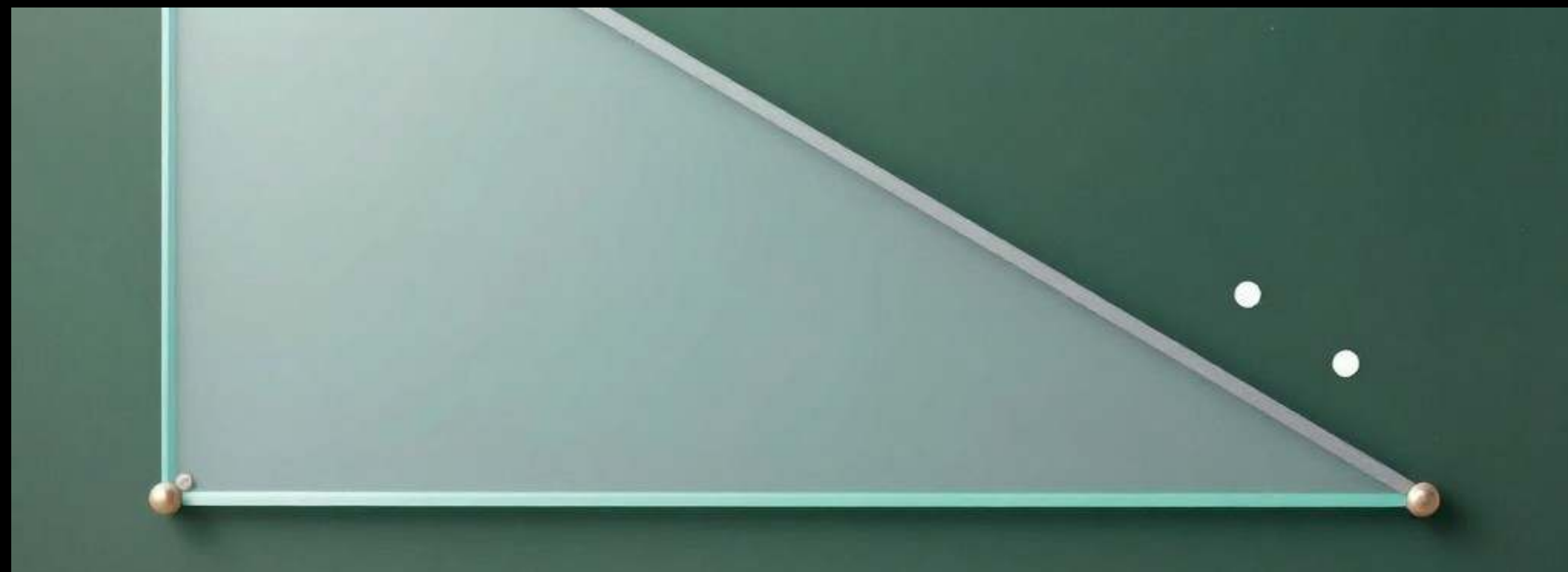
Прямая как граница

Сначала рассматривают равенство $x+y=6$. Его график проходит через точки $(0; 6)$ и $(6; 0)$, а также через все точки, у которых сумма координат равна шести. Эта прямая служит границей всей области решений.



Какие точки подходят

Неравенство $x+y \leq 6$ выполняется для пар, у которых сумма координат не больше шести. Подходят, например, точки $(2; 3)$, $(5; 1)$ и $(0; 0)$. Все они лежат в нужной полуплоскости и включают саму границу.



Что означает множество решений

Каждая точка — это пара

На координатной плоскости любая точка соответствует одной паре чисел $(x; y)$. Поэтому график помогает видеть не одно значение, а сразу много возможных ответов.

Внутри области — да

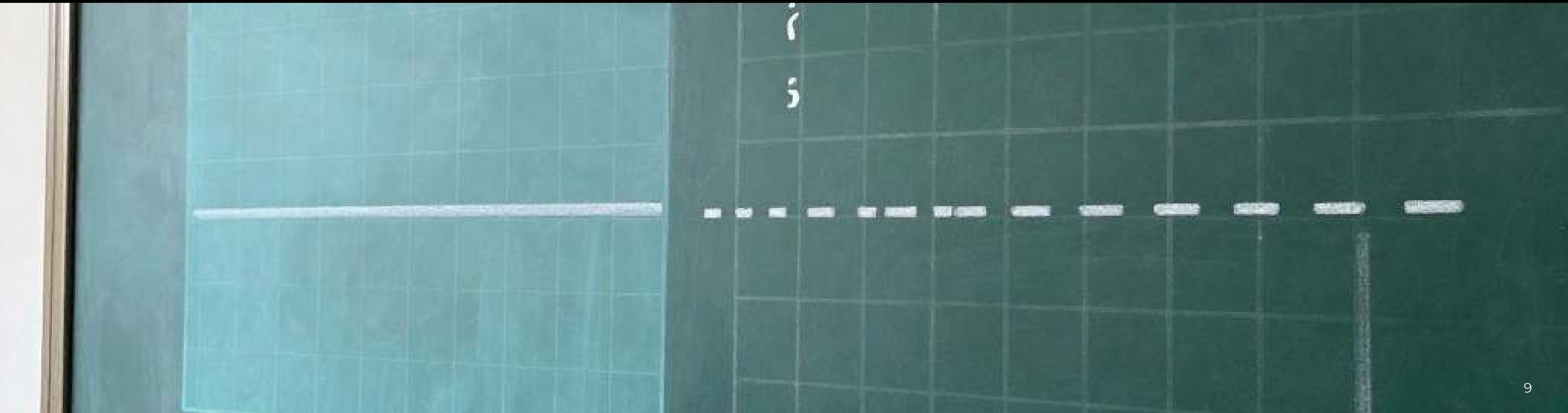
Точки внутри закрашенной части удовлетворяют неравенству. Если взять любую такую точку и подставить её координаты, условие окажется верным.

Снаружи области — нет

Точки вне выделенной области не подходят. Их координаты нарушают условие, поэтому они не входят в множество решений.

Граница зависит от знака

При строгих знаках точки на прямой не считаются ответом. При нестрогих знаках граничные точки входят в решение вместе со всей областью.



Знаки неравенств и вид области решений

Таблица показывает, как знак неравенства влияет на вид границы и выбор области.

Знак определяет сразу два признака: вид линии и то, включается ли граница в ответ.

Знак	Граница	Область
$>$	пунктир	одна
$<$	пунктир	другая
$\geq$	сплошная	одна
$\leq$	сплошная	другая

Система неравенств: смысл пересечения

Запись условий

Сначала записывают два или несколько неравенств, которые должны выполняться одновременно. Каждое из них задаёт свою область точек на плоскости.

Общая часть областей

Решением системы становятся только точки, попавшие сразу во все закрашенные области. Именно их пересечение и является ответом.

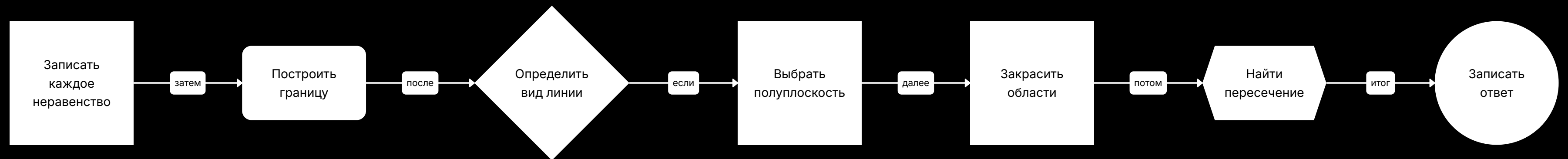
Итог на плоскости

Если общая часть есть, решений бесконечно много, потому что каждая точка этой области подходит. Если пересечения нет, система не имеет решений.



Как решать систему неравенств графически

Последовательность действий при построении областей решений на координатной плоскости



Пример системы из двух неравенств

Первая граница

Неравенство $x+y \geq 4$ задаёт все точки, лежащие выше прямой $x+y=4$ или на самой прямой. Эта линия служит границей первой области решений.

Вторая граница

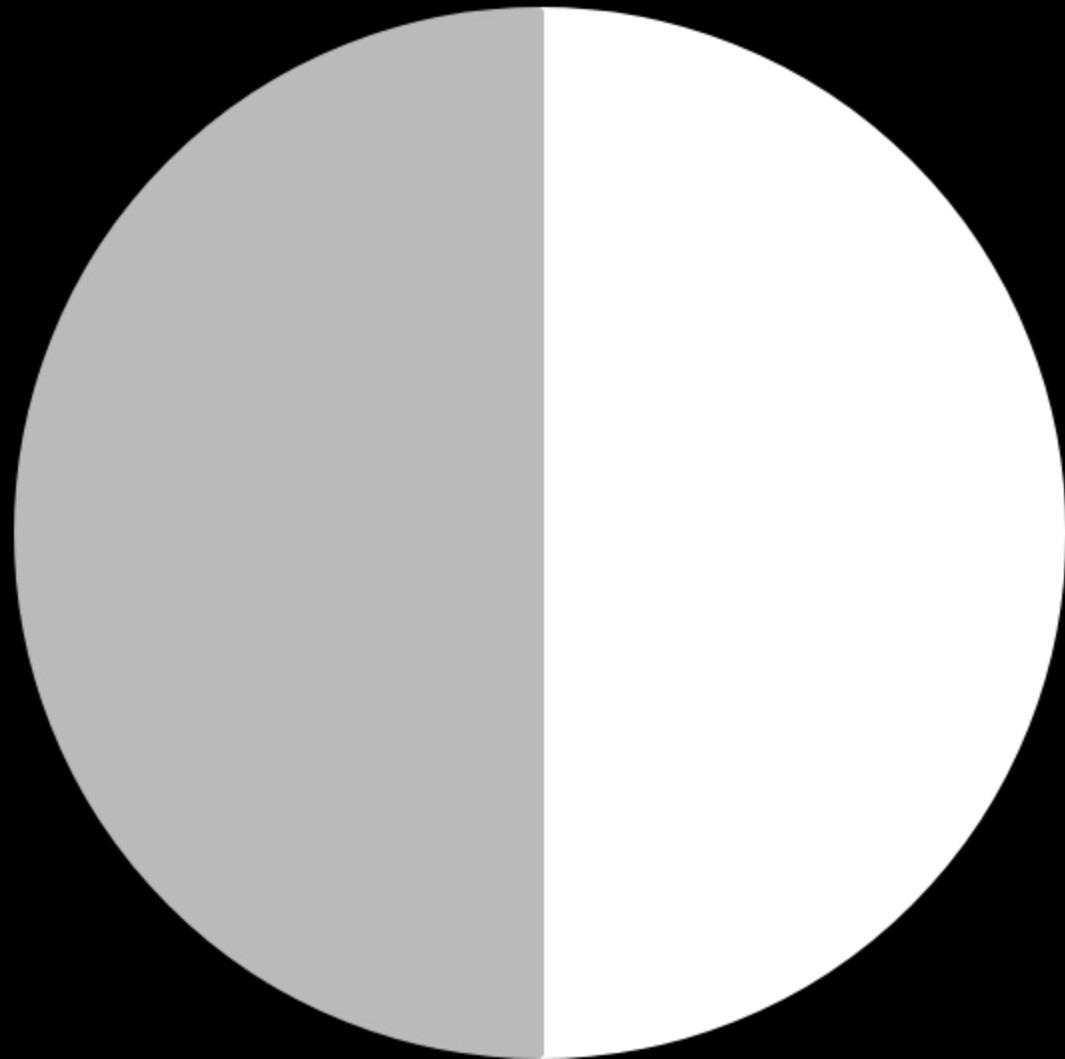
Неравенство $x \leq 3$ описывает точки слева от вертикальной прямой $x=3$, включая саму прямую. Оно ограничивает область с другой стороны.

Общая область

Решением системы становится наклонная полоса, где одновременно выполняются оба условия. Каждая точка этой части плоскости удовлетворяет и первому, и второму неравенству.

Сколько решений бывает у системы неравенств

■ Бесконечно много решений ■ Нет решений



Для линейных систем на плоскости важно не число записанных условий, а наличие общей части областей. Именно она определяет ответ.

Если пересечение существует, решений бесконечно много; если общей области нет, система не имеет решений.

Обобщение свойств графического решения линейных неравенств с двумя переменными

Типичные ошибки при построении графиков

1.

Неверная граница

Путают пунктирную и сплошную линию, из-за чего на рисунке оказываются лишние или, наоборот, отсутствующие граничные точки. Знак неравенства нужно читать особенно внимательно.

2.

Не та полуплоскость

Иногда закрашивают область по другую сторону от прямой. Чтобы не ошибиться, проверяют одну удобную точку и смотрят, выполняется ли в ней неравенство.

3.

Точка на прямой

Для проверки нельзя брать точку, лежащую на границе, потому что она не помогает выбрать нужную сторону. Лучше выбрать простую точку вне прямой.

4.

Один ответ вместо множества

Некоторые ищут одно число, хотя решение задаётся парой чисел и может включать множество точек. На плоскости ответ всегда читается как область.

5.

Игнорирование системы

При работе с системой нужно учитывать все неравенства сразу. Если подходит только одно из них, точка не считается решением всей системы.

Проверка точек: подходит ли пара чисел

Точка	$x+y\leq 5$	$x-y>1$	Система
(1; 2)	да	нет	нет
(3; 1)	да	да	да
(4; 2)	нет	да	нет
(0; 0)	да	нет	нет

Проверка подстановкой в линейные неравенства с двумя переменными

Сравнение нескольких точек для системы двух неравенств показывает, что решение должно удовлетворять обоим условиям одновременно.

Только точка (3; 1) удовлетворяет обоим условиям. Если одно из неравенств не выполняется, вся система не имеет для этой точки решения.

Связь с реальными ограничениями

Практический смысл

Неравенства описывают обычные ограничения: сколько вещей можно взять, сколько денег потратить или какое расстояние разрешено пройти. Поэтому они часто встречаются в задачах с жизненным сюжетом.

Удобная модель

Запись $x+u \leq 10$ означает, что сумма двух величин не должна превышать 10, а $x \geq 2$ задаёт минимально допустимое значение. Такие условия легко представить на плоскости.



Как записывают ответ

1. Через условия

Ответ часто записывают как набор неравенств, например $x+y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Такая запись сразу показывает, какие ограничения должны выполняться одновременно.

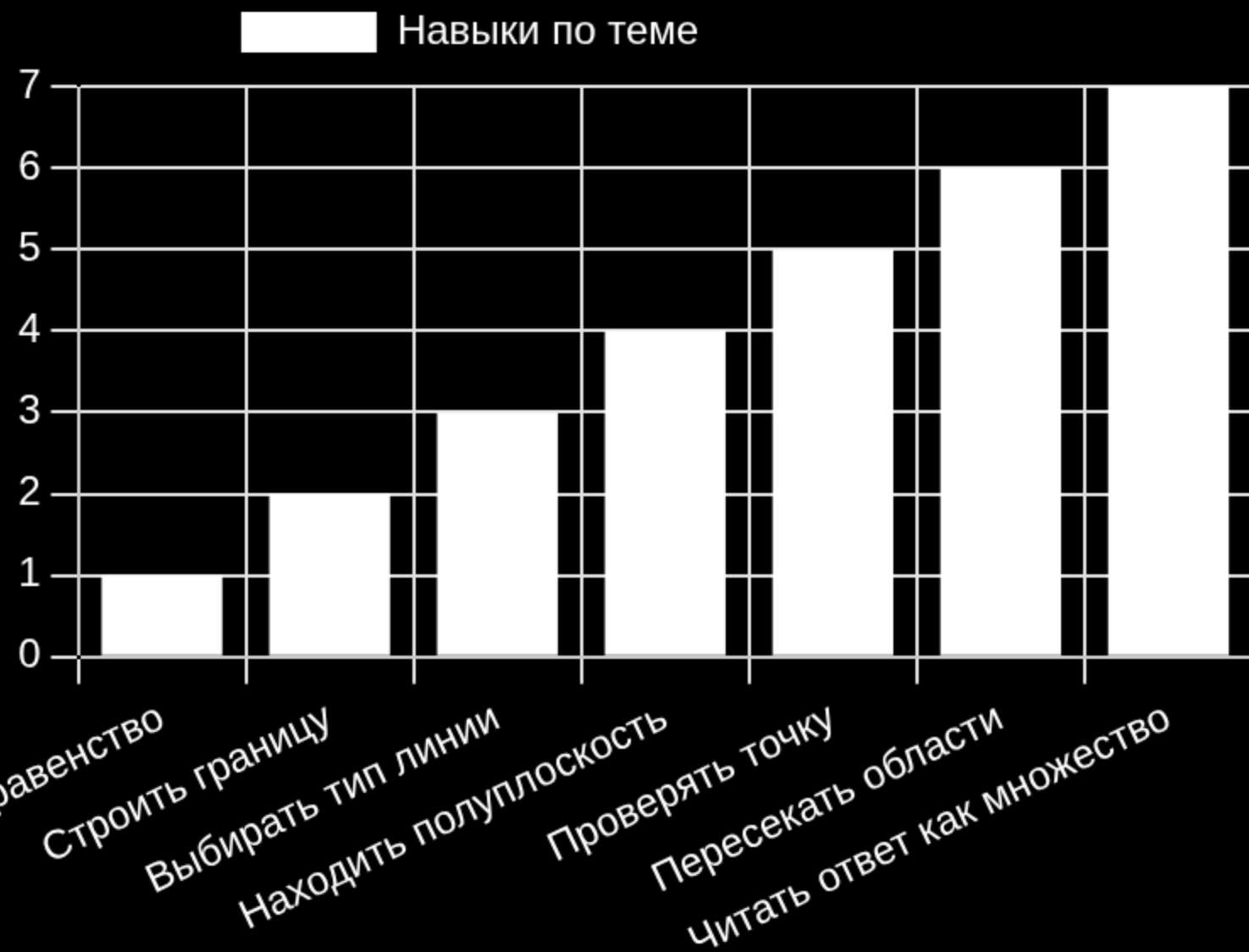
2. Через область

Можно указать и геометрически: подходят все точки первой четверти, лежащие под прямой $x+y=6$ или на ней. Это удобно для проверки рисунка.

3. Связь двух языков

Алгебраическая запись и геометрическое описание говорят об одном и том же. Первое помогает вычислять, второе — видеть решение наглядно.

Что нужно уметь по теме



Эти навыки выстраиваются в один понятный порядок: от чтения записи к построению рисунка и проверке решения. Каждый шаг опирается на предыдущий.

Если школьник умеет все семь действий, он может решать и одно неравенство, и систему графически без пропусков.

Алгоритм графического решения линейных неравенств с двумя переменными

От записи к области решений

Линейные неравенства с двумя переменными превращают обычное условие в область на плоскости, а система показывает, где эти области пересекаются. График помогает быстро увидеть все подходящие точки.