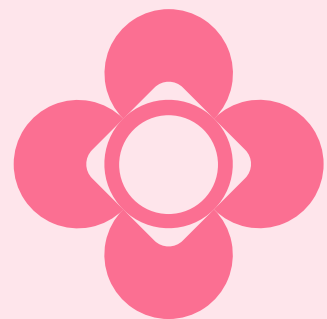




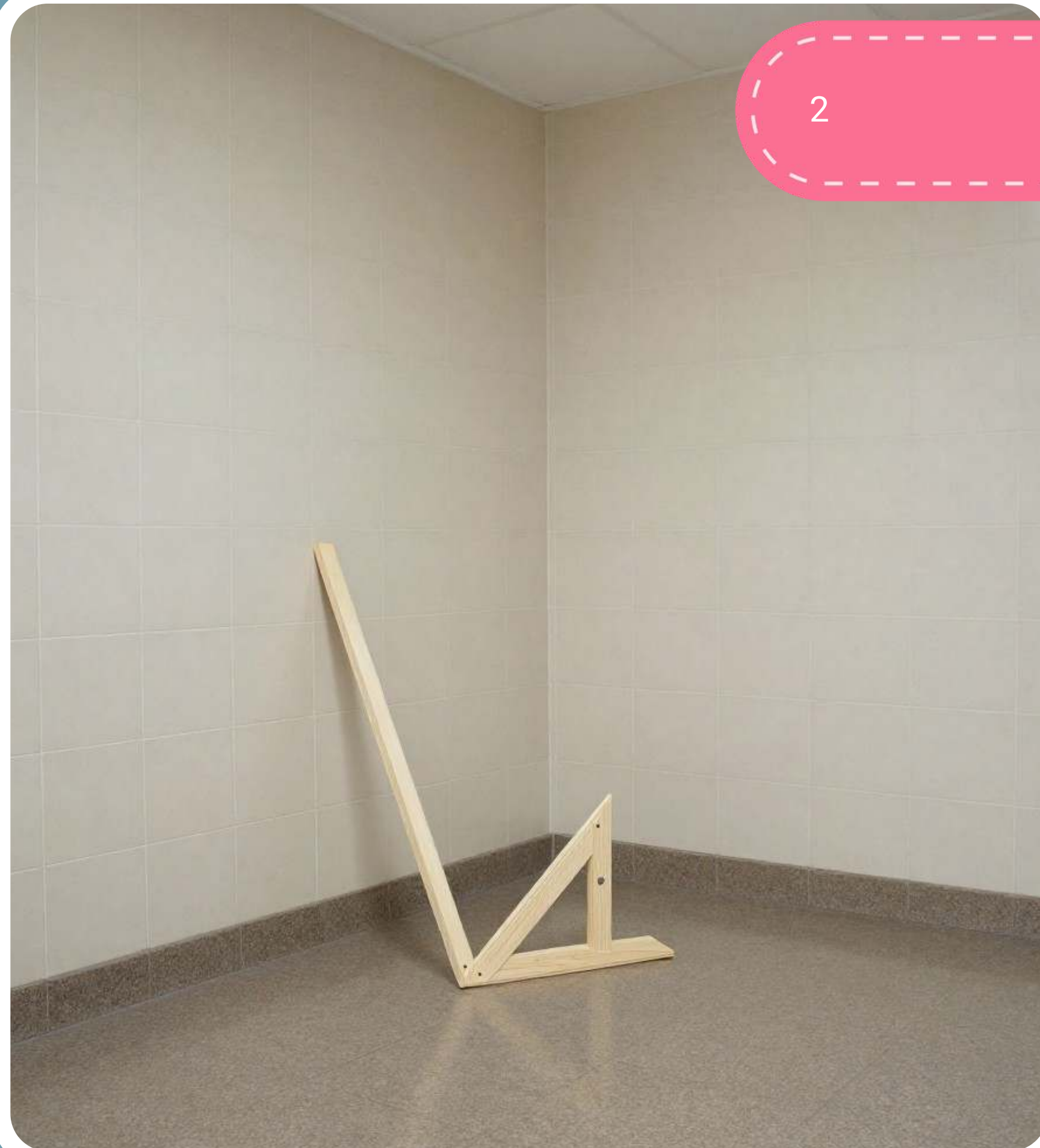
Угол в пространс тве

Угол в объёме: как отличать его от плоского, и разбирать по рёбрам, граням и проекциям.



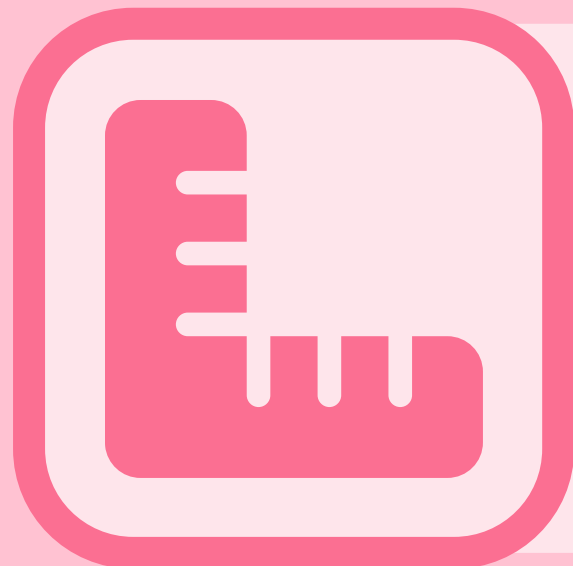
Почему эта тема нужна в 7 классе

Мы переходим от плоских рисунков к объёмным телам: кубу, параллелепипеду, призме, пирамиде и бумажным моделям. Тема помогает читать чертёж, видеть форму в пространстве и связывать рисунок с реальным предметом.



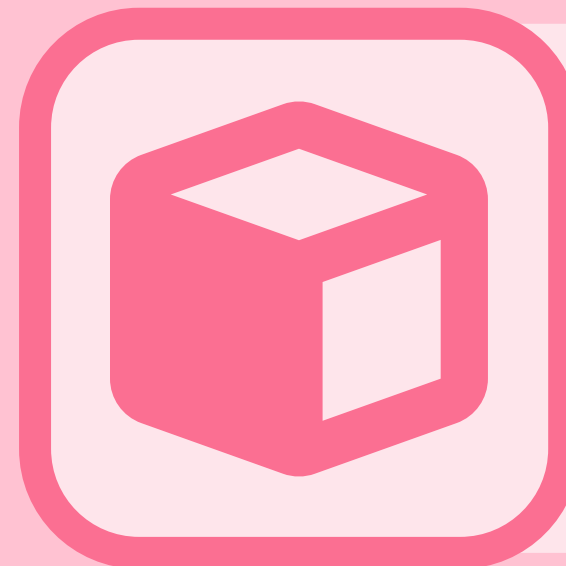
Что называют углом в пространстве

3



Угол из двух лучей

В простейшем виде угол в пространстве задают два луча с общей вершиной. Важно, где стоит вершина и в каком направлении уходят лучи относительно других объектов на рисунке.



Прямая и плоскость

Угол в объёме может быть задан между прямой и плоскостью. Его не находят «на глаз» по линии на картинке: нужно понять наклон прямой к плоскости через проекцию.



Два плоских элемента

Рассматривают и угол между двумя плоскостями, который называют двугранным. Чтобы разобраться в задаче, фиксируют линию пересечения плоскостей — именно она играет роль ребра угла.

Основные элементы угла

4

01

У угла есть вершина и стороны. В пространстве стороны могут лежать в одной плоскости или уходить в разные плоскости, поэтому важно понимать, к каким именно элементам они привязаны.

02

Для решения задач нужно аккуратно указывать обозначения точек, прямых и плоскостей. Один и тот же рисунок может соответствовать разным углам, если рассматривать разные рёбра и соседние грани.

03

Рёбра и грани многогранников задают «каркас» пространственного угла. Когда меняется выбор ребра или плоскости, меняется и сам угол — это проверяют через расположение объектов относительно каждой плоскости.

Плоский и пространственный угол

Сравните, где расположен угол, из каких объектов он образован и почему в пространстве часто нужны проекции.

Признак	Плоский угол	Пространственный угол
Где находится	В одной плоскости	В объёме, относительно нескольких плоскостей
Что образует	Два луча на плоскости	Рёбра и грани тела; возможны прямая и плоскость
Как изображается	На плоскости чертежа	Через рисунок и вспомогательные построения
Как находят	Измеряют градусы транспортиром	Обычно переходят к вспомогательному плоскому углу и затем считают по чертежу
Где встречается	Простейшие фигуры на чертеже	Многогранники, двугранные углы, наклоны
Ключевой смысл	Важно само изображение	Важно расположение объектов относительно плоскости

Пространственный угол нельзя сводить только к «картинке»: решающими становятся проекции и то, как элементы расположены относительно плоскостей.

Сопоставление понятий из школьного курса геометрии 7 класса

Угол между прямой и плоскостью

6



Наклон прямой к плоскости

Угол между прямой и плоскостью показывает, насколько прямая наклонена к этой плоскости. Его величина совпадает с углом между прямой и её проекцией на плоскость.

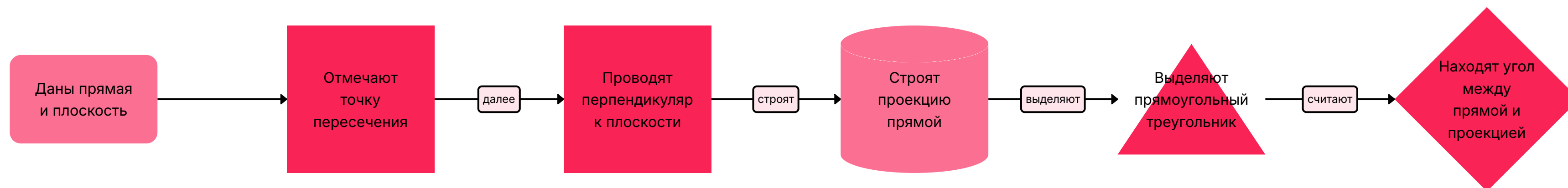
Как связать с проекцией

Такой угол удобно узнавать на примерах: лестница у стены, наклонный провод, доска в классе и скат крыши относительно основания. На иллюстрации обычно выделяют прямую, плоскость, перпендикуляр и проекцию.

Как находят угол между прямой и плоскостью

7

Логика решения сводит пространственный случай к прямоугольному треугольнику через проекцию





0°

Если плоскости совпадают, двугранный угол равен нулю, значит «раскрытия» нет.

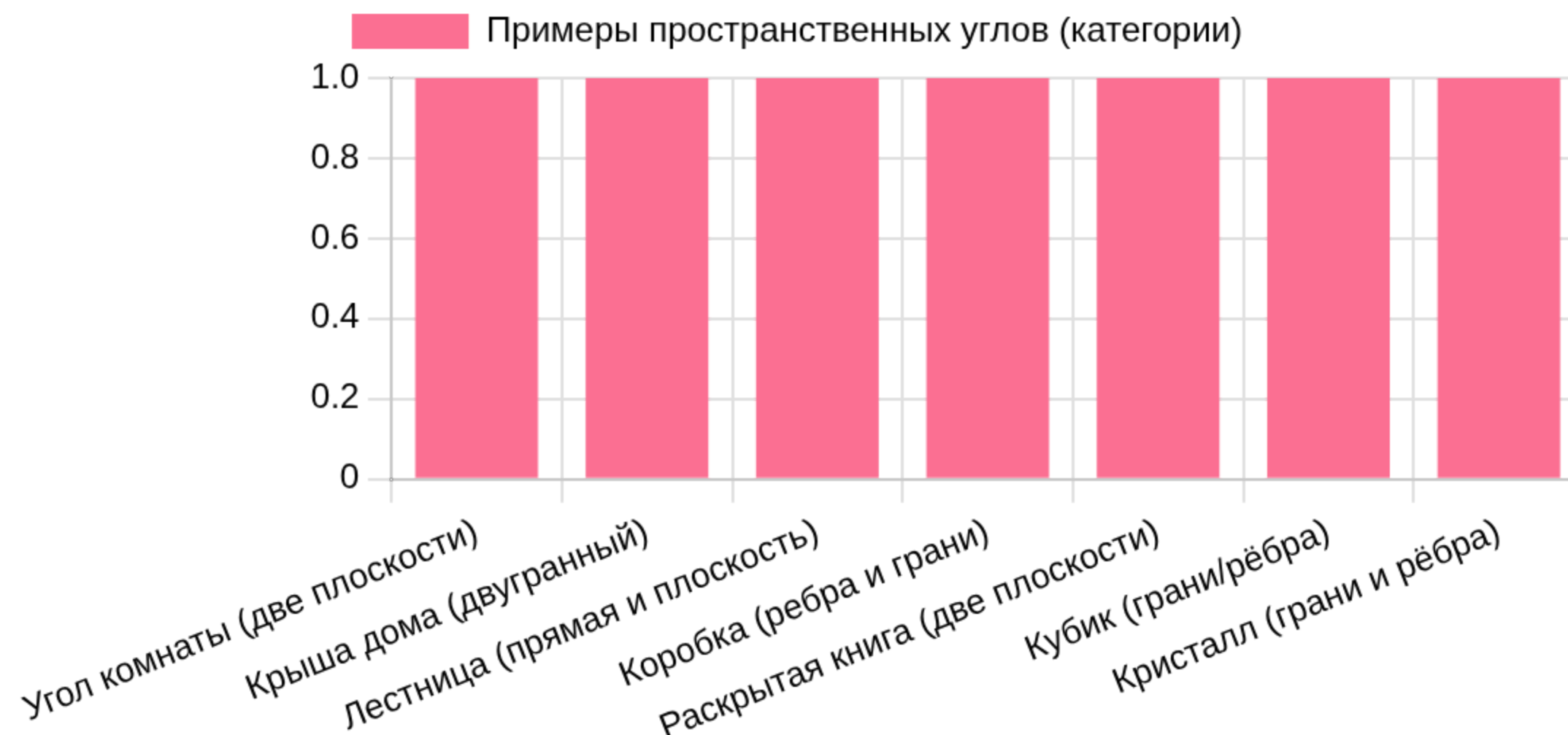
Определение величины двугранного угла в школьной геометрии



Где в жизни встречаются пространственные углы

9

В каждом объекте угол «сидит» в разных местах: одни примеры удобнее описывать как угол между плоскостями, другие — как наклон прямой к плоскости или угол на рёбрах.



Разные бытовые ситуации по сути сводятся к ограниченному набору геометрических типов угла. Поэтому один навык — чтение проекций и ребра — помогает в разных задачах.

Схема-сопоставление школьных примеров (без измерений, категории)

Как измеряют углы

10



Основная единица измерения углов — градус. Плоские углы измеряют транспортиром, а в задачах по пространственным углам часто переходят к вспомогательному плоскому углу.



После построений измеряемая величина определяется по чертежу: находят нужный угол в прямоугольном треугольнике или используют свойства прямых и проекций, чтобы связать длины и углы.

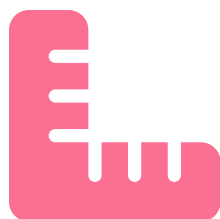


Если получился прямоугольный треугольник, то для вычислений применяют его свойства и простые соотношения. Так геометрия в объёме становится понятной через знакомые плоские фигуры.

Смежные понятия, которые нужны для темы

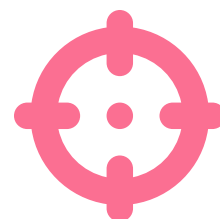
11

Параллельные прямые и плоскости



Параллельные прямые и плоскости важны, чтобы понять, когда линии не пересекаются и углы не «собираются» в одной точке. На рисунке это помогает корректно выбирать опорные прямые для построений.

Пересекающиеся и скрещивающиеся прямые



Прямые могут пересекаться или быть скрещивающимися (не лежать в одной плоскости). От этого зависит, существует ли общая вершина угла. Неверное распознавание приводит к ошибке в выборе точки отсчёта.

Перпендикулярные прямые и плоскости



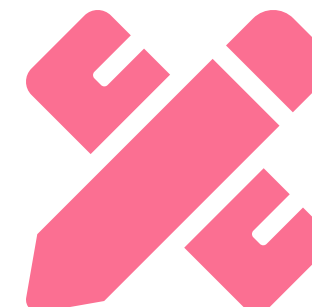
Перпендикулярность задаёт «опорный» ориентир в пространстве. Если прямая перпендикулярна плоскости, её проекция становится точкой, а треугольник — прямоугольным. Это упрощает нахождение угла по свойствам.

Проекция точки на плоскость



Проекция точки показывает, в какое место на плоскости попадает «след» перпендикуляра. С её помощью задают вершины в построениях и уточняют, где именно на рисунке лежит нужный элемент пространственного угла.

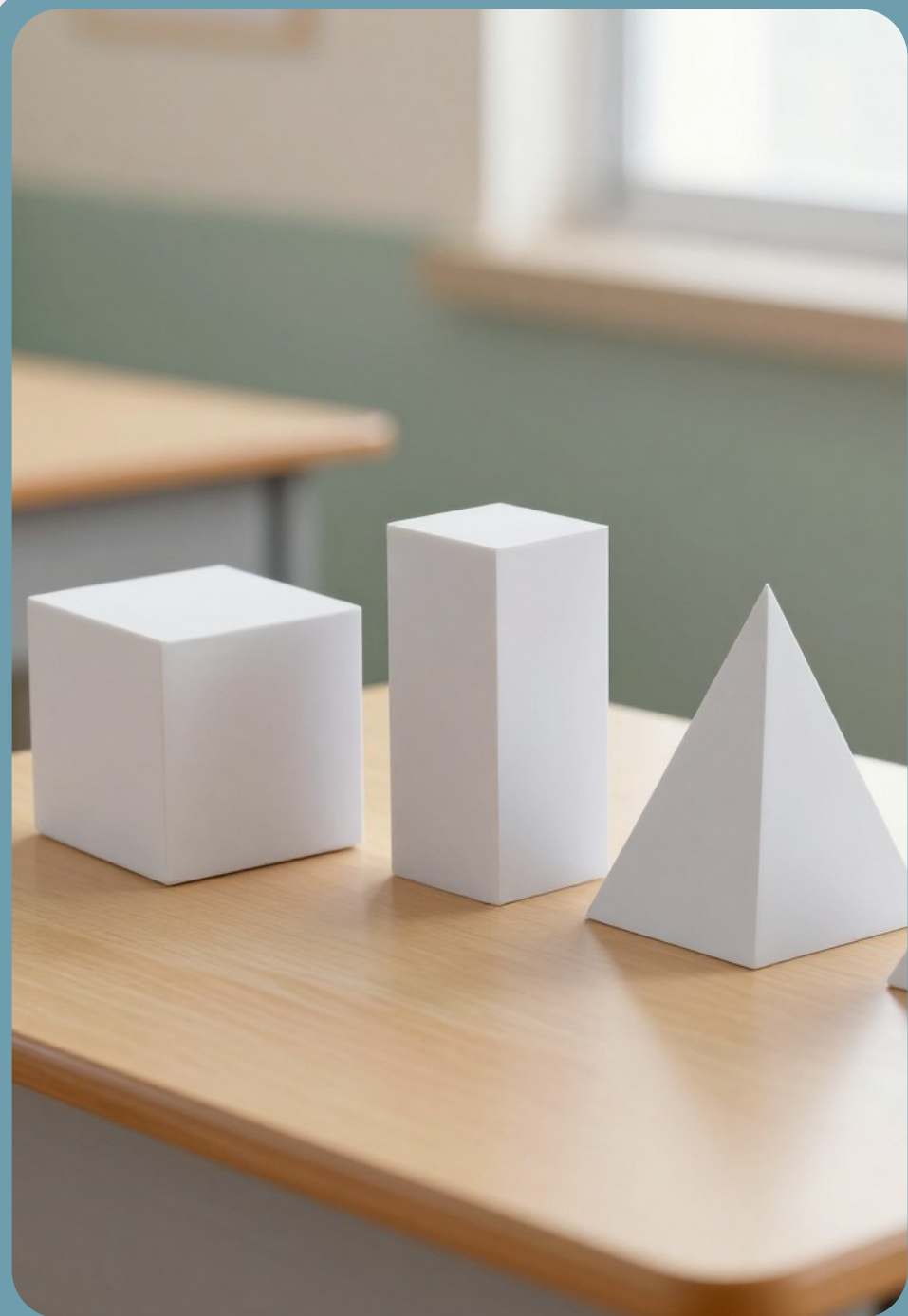
Проекция отрезка на плоскость



Проекция отрезка на плоскость строится как отрезок между проекциями его концов. Это позволяет переносить измерения из пространства на плоский чертёж. Так углы становятся удобными для вычислений.

Углы в многогранниках

12



В кубе, прямоугольном параллелепипеде, призме и пирамиде углы возникают благодаря рёбрам и граням. Например, на кубе легко увидеть прямые углы между соседними гранями: каждая грань перпендикулярна двум другим.



На таких фигурах важно различать, какой именно угол рассматривается: между гранями, между ребром и диагональю в грани или между ребром и диагональю. Чёткое выделение рёбер и граней делает задачу наглядной и точной.

Виды пространственных углов и их признаки

Что образует угол	Где вершина/ребро	Как находят и пример
Два луча	Общая вершина	Соединяют лучи в одной точке; угол комнаты образуется стенами и углом пола.
Прямая и плоскость	Точка или отрезок проекции	Строят перпендикуляр и рассматривают угол между прямой и её проекцией; наклонная лестница к полу.
Две плоскости	Линия пересечения	Находят линию пересечения плоскостей и рассматривают углы через вспомогательную проекцию; стык двух скатов крыши.
Двугранный угол	Ребро (линия пересечения плоскостей)	Изучают «раскрытие» двух граней; раскрытая книга, где одна страница поворачивается относительно другой.

Таблица показывает, что один и тот же «угол» в пространстве может относиться к разным объектам. Для каждого вида указаны ориентиры построения, способ поиска нужного элемента и жизненный пример.

Каждому виду соответствует своя «точка старта»: для лучей нужна общая вершина, для прямой и плоскости — перпендикуляр и проекция, для плоскостей — линия пересечения. Поэтому схема решения всегда различается.

Методические подходы к изучению углов в пространстве в школьной геометрии (ФГОС ООО, курс 7 класса).

Типичные ошибки при изучении темы

14

Часто путают угол на плоском рисунке с углом в пространстве: на картинке может быть видна «красиво» нарисованная линия, но она не образует угол выбранных объектов. Нужно проверять, где вершина и где реально лежат стороны.

Ещё одна ошибка — измерять наклон по случайной линии вместо проекции. В задачах угол обычно равен углу между прямой и её проекцией на плоскость. Если проекцию не построили, число получается «для другого угла».

Наконец, ошибки возникают при неверном определении вершины, ребра или плоскости. Помогают аккуратные обозначения точек, выделение пересечений и короткая проверка: какие именно элементы участвуют в образовании угла, и совпадает ли их расположение с чертежом.

Как меняется угол при изменении наклона

15

В реальных задачах угол с плоскостью находят через проекцию, поэтому по мере роста наклона проекция «раздвигается», и угол увеличивается. Это хорошо видно на чертежах с прямоугольным треугольником.

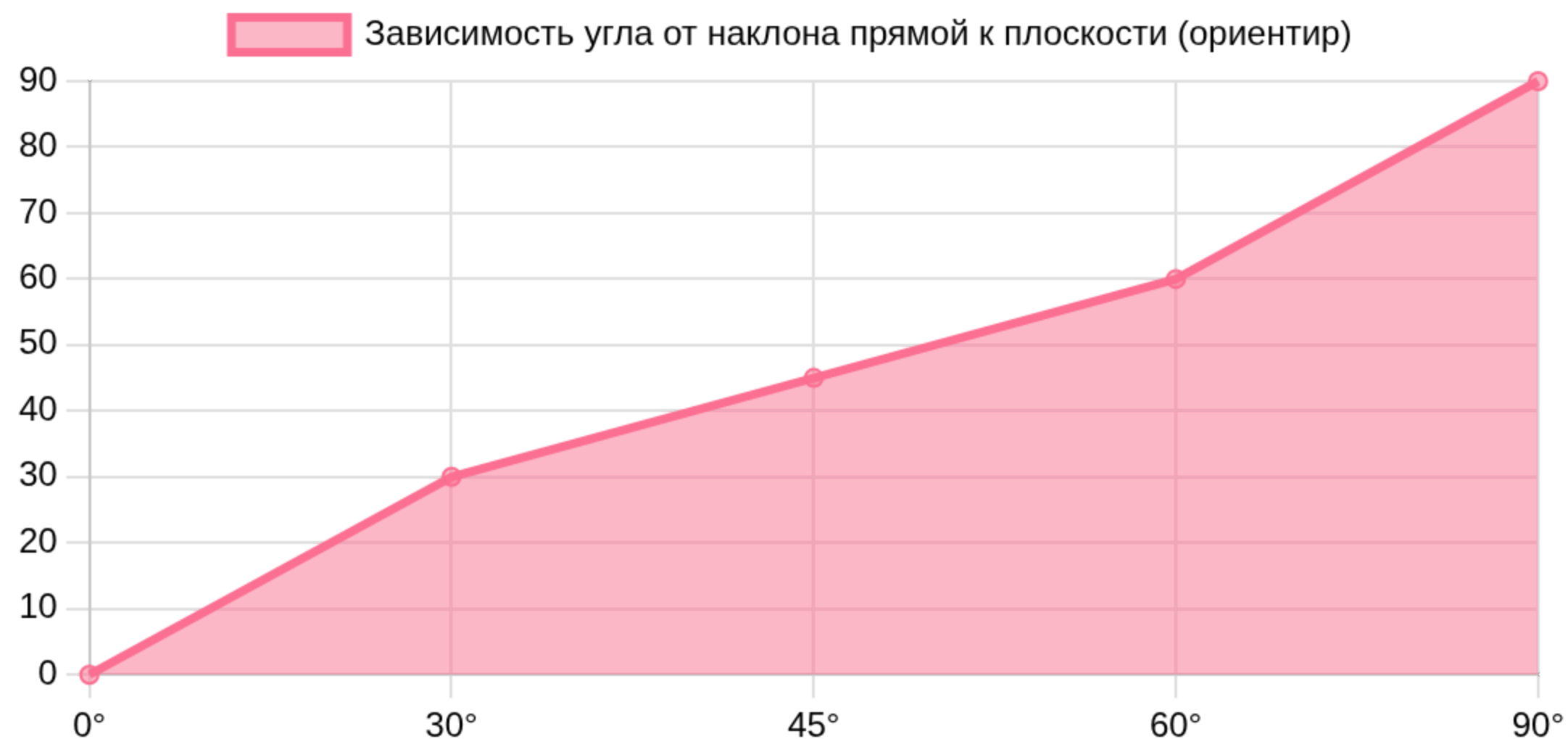


График отражает ключевую закономерность: угол между прямой и плоскостью принимает минимальное значение при параллельности и достигает 90° при перпендикулярности. Остальные значения лежат между ними и растут постепенно.

Учебная модель для иллюстрации связи наклона и угла; конкретные числа выбираются как примеры (0° , 30° , 45° , 60° , 90°).

Задачи из окружающей жизни

16



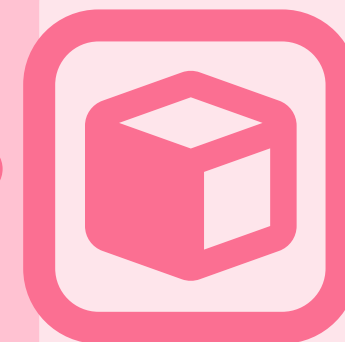
Строительство и отделка

При выборе наклона лестницы, обшивки или элементов облицовки нужно учитывать угол между прямыми и плоскостями. По чертежу и проекциям можно проверить, соответствует ли конструкция заданному уклону и не нарушит ли геометрию устойчивость.



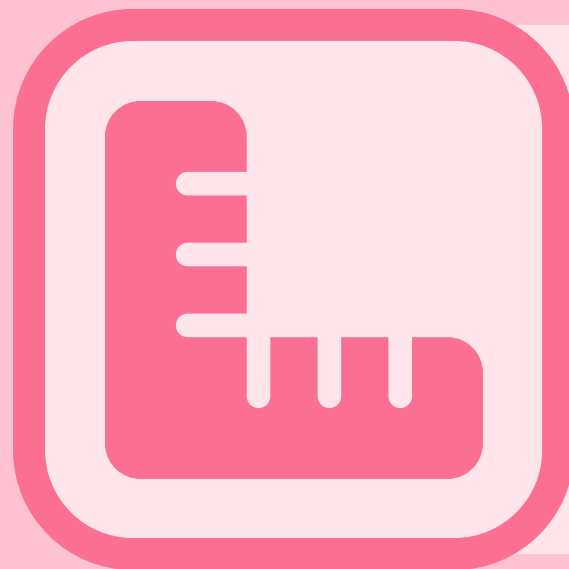
Крыша и планировка комнат

Форма крыши связана с углом между плоскостями скатов, а в комнате мы постоянно встречаем углы между стенами и полом. Точное чтение ребра двугранного угла помогает понять, как «раскрывается» крыша.



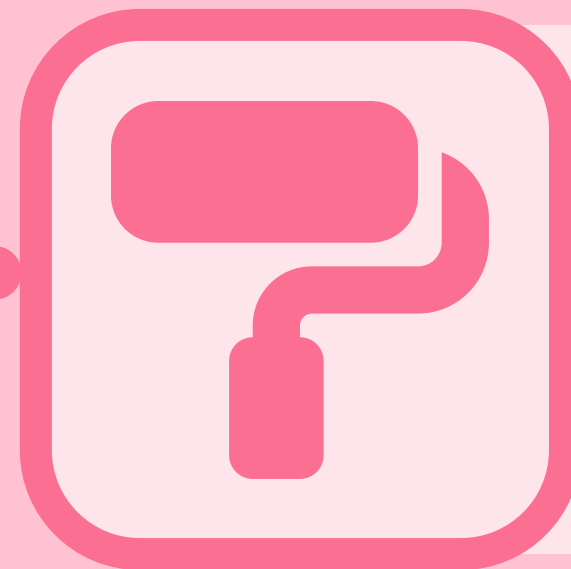
Упаковка и коробки

В коробках и упаковке важно, какие грани соединяются и под каким углом. Даже в школьных моделях из бумаги можно проследить, как ребро определяет двугранный угол между крышкой и основанием.



Техника и крепления

Когда детали крепят кронштейнами, устанавливают опоры и направляющие, требуется контроль углов наклона. Геометрия помогает перевести реальную установку в задачу с проекциями и перпендикулярами.



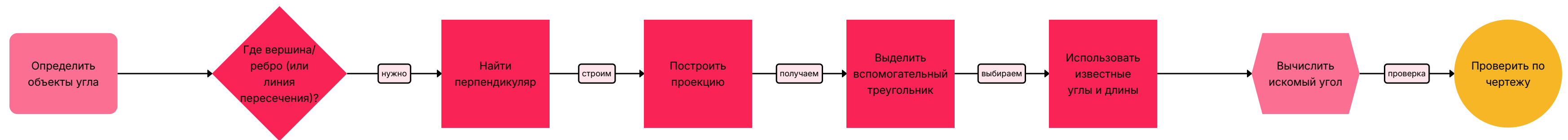
Дизайн и предметы мебели

В мебели углы задают форму полок, спинок и соединений элементов. Часто достаточно научиться находить нужный угол между ребром и гранью, чтобы по рисунку понять, как будет выглядеть изделие и как оно «сядет» на плоскость.

Алгоритм решения задач на пространственный угол

17

Пошаговая схема для типовых задач: угол между прямой и плоскостью, а также угол между двумя плоскостями.



Модель для изучения углов в пространстве

18



Куб из бумаги: где «живёт» угол

Сложите кубик из бумажных граней и отметьте одно выбранное ребро. Затем выделите две соседние грани: так становится видно, что двугранный угол раскрывается именно вокруг ребра. Поворачивая модель, сравнивайте, как меняется «раскрытие» угла.



Коробка-кубик и проекции наклонного ребра

Сделайте небольшую коробку с крышкой и основанием. К наклонному ребру проведите перпендикуляр к основанию и постройте проекцию на плоскость. Когда проекция готова, угол удобно сравнить с прямоугольным треугольником, который получается на чертеже.



Раскрытая книга: двугранный угол в жизни

Возьмите книгу и отметьте точки на двух страницах ближе к корешку. Мысленно или с помощью линий обозначьте линию ребра — там, где страницы соединяются. По мере раскрытия книги меняется двугранный угол, и вы увидите, что он связан с поворотом плоскостей.

Главные выводы по теме

19

.1 • • •

Угол в пространстве соединяет плоскую геометрию и объёмную геометрию. Он рассматривается между прямыми, а также между прямой и плоскостью или между двумя плоскостями, где участвуют вершина, ребро и грани.

.2 • • •

Для решения задач ключевыми инструментами становятся проекции и перпендикуляры. Именно через проекцию прямой на плоскость получают прямоугольный треугольник и связывают пространственный угол с понятными формулами из 7 класса.

.3 • • •

Важно уметь читать чертёж: точные обозначения точек, прямых и плоскостей позволяют не перепутать «видимый» рисунок с настоящим расположением объектов в пространстве. Тогда вершина и стороны угла определяются однозначно.

.4 • • •

Тема углов — базис для дальнейшего изучения многогранников и построений в пространстве. Освоив типовые схемы, школьник легче решает задачи на призмы, пирамиды и двугранные углы, а также выполняет практические задания.



Урок окончен: угол в пространстве — ваш инструмент

Понимание пространственных углов помогает решать школьные задачи по геометрии и распознавать объёмные фигуры в окружающем мире. Тема развивает пространственное мышление, аккуратность в чертежах и уверенную работу с моделями.

