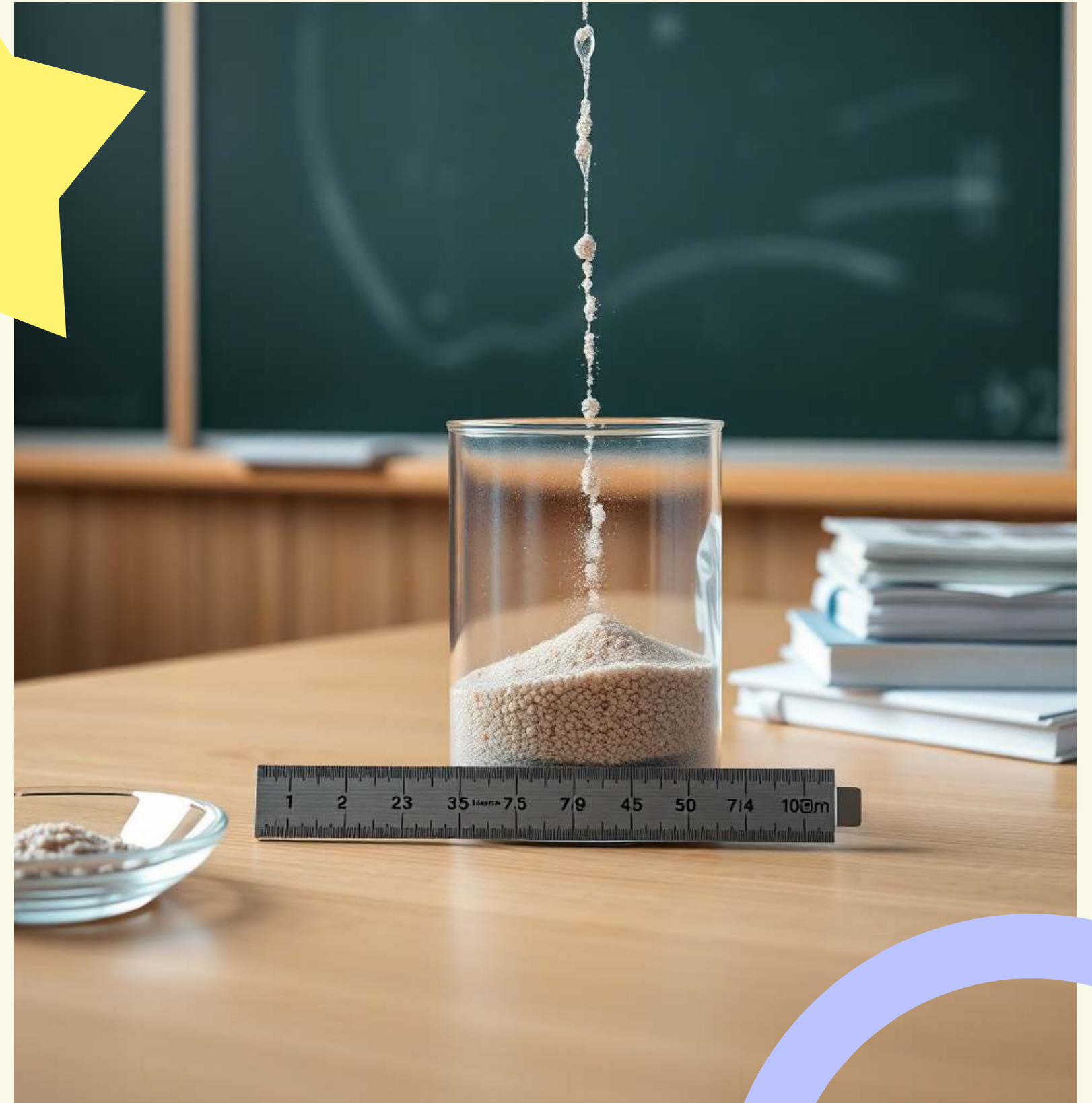


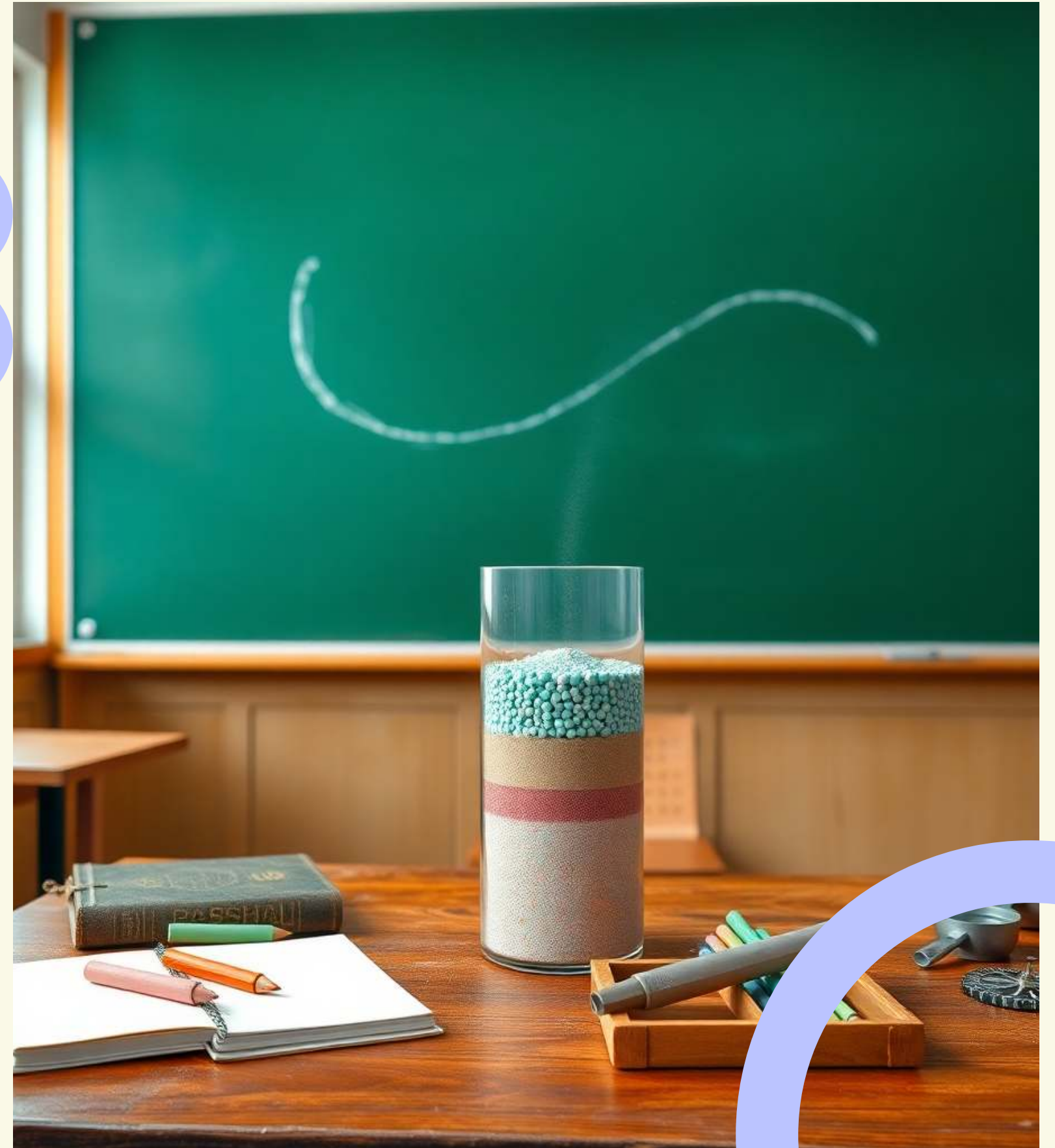
Интеграл как основная идея накопления в алгебре

Изменение, накопление, измерение — одна идея.



Интеграл в 11 классе

Интеграл появляется после производной и показывает, как из мгновенных значений получить целый результат. Он связывает график функции с площадью, путём, объёмом и другими величинами, которые нельзя увидеть по одной точке.



Первообразная и неопределенный интеграл

Что называют первообразной

Первообразной функции $f(x)$ называют такую функцию $F(x)$, для которой $F'(x)=f(x)$. Это означает, что интегрирование восстанавливает исходную функцию по её производной.

Почему появляется C

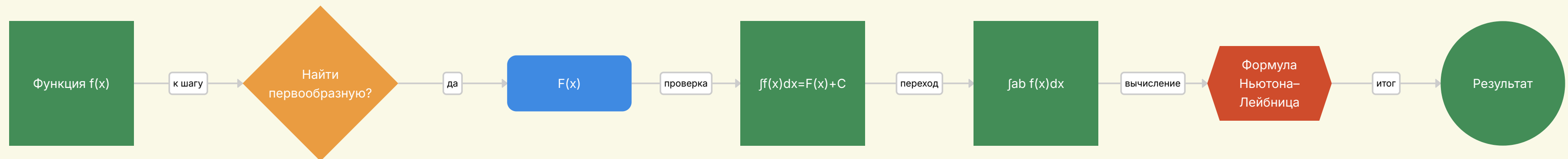
Если одна функция является первообразной, то к ней можно прибавить любую постоянную. Поэтому все первообразные одной и той же функции отличаются лишь на константу C .

Запись неопределенного интеграла

Неопределённый интеграл $\int f(x)dx$ обозначает семейство всех первообразных данной функции и записывается как $F(x)+C$. Эта запись отражает не одно число, а целый класс решений.

Связь производной и интеграла

Переход от скорости изменения к накопленному результату через первообразную и определённый интеграл.

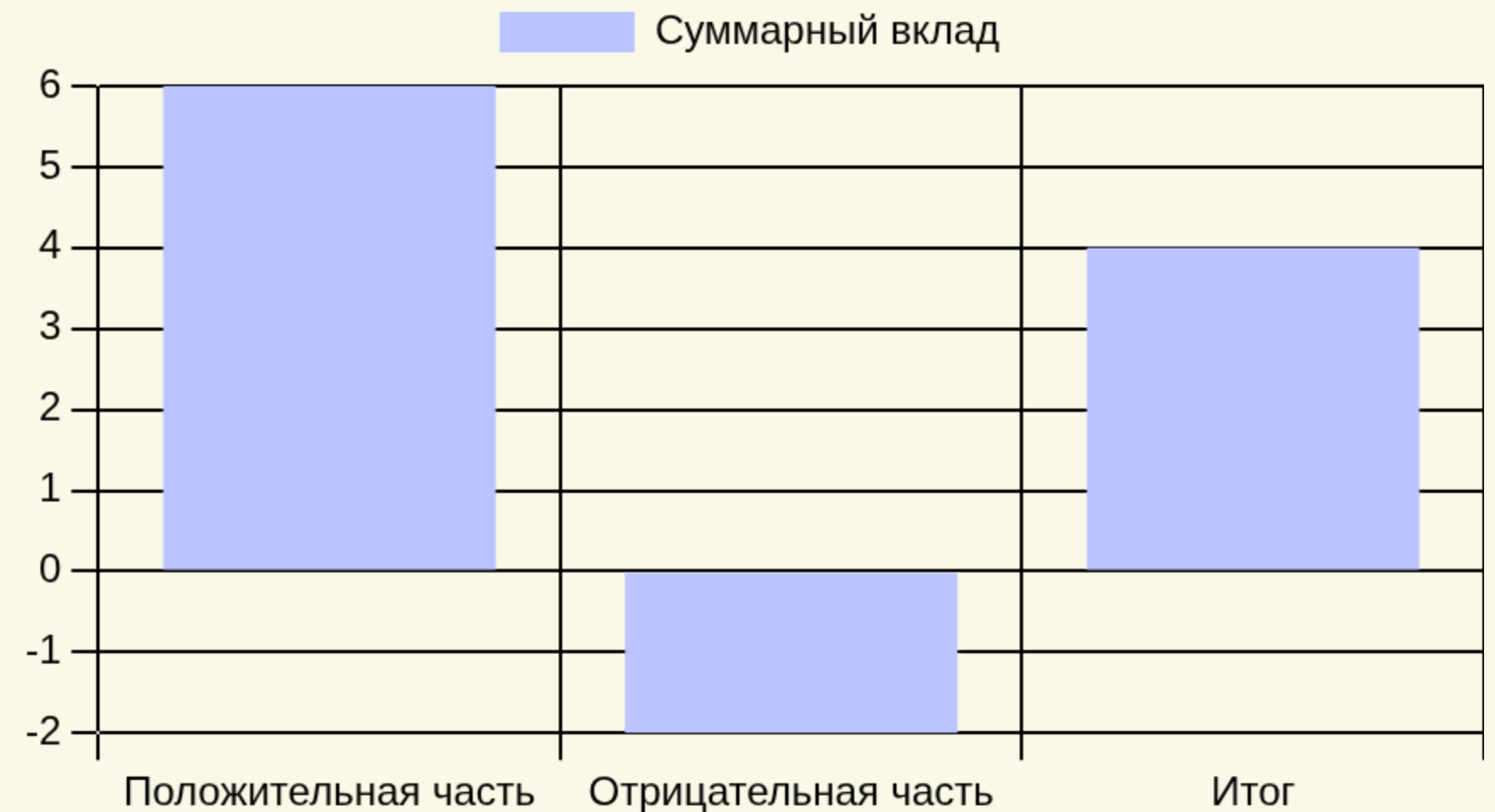


Геометрический смысл определенного интеграла

На схеме показано, что знак функции влияет на вклад площади: участки ниже оси Ox уменьшают итоговое значение.



Определённый интеграл учитывает не только величину, но и знак вклада, поэтому площадь и значение интеграла не всегда совпадают.



Иллюстративный пример для пояснения знака интеграла.

Риманова сумма как приближение площади

1 Разбиение области

Площадь под графиком заменяют набором узких прямоугольников, построенных на маленьких участках оси x . Чем аккуратнее разбиение, тем точнее приближение к искомой площади.

2 Суммирование вкладов

Высоту каждого прямоугольника берут по значению функции внутри участка или на его границе, а затем складывают все площади. Полученная сумма служит приближением интеграла.

3 Предел при уточнении

Когда ширина каждого участка стремится к нулю, разница между суммой прямоугольников и точной площадью исчезает. В этом смысле интеграл является предельным значением Римановой суммы.



Основные формулы неопределенного интеграла

Формула	Результат	Условие
$\int x^n dx$	$x^{(n+1)/(n+1)}+C$	$n \neq -1$
$\int dx/x$	$\ln x +C$	$x \neq 0$
$\int \sin x dx$	$-\cos x+C$	—

Таблица содержит самые востребованные формулы, которые помогают быстро распознавать стандартный вид подынтегрального выражения.

Большинство базовых задач решается не вычислением «с нуля», а узнаваемостью формы и точным применением известного результата.

Стандартные формулы школьного курса алгебры.

Свойства интеграла, которые используются в задачах

1

Линейность

Интеграл допускает вынесение коэффициентов и разложение суммы на отдельные слагаемые. Это позволяет сначала упростить выражение, а затем интегрировать каждую часть по отдельности.

2

Смена пределов

Для определённого интеграла порядок границ принципиален: при перестановке пределов знак меняется на противоположный. Это удобно помнить, чтобы не терять смысл ориентации отрезка.

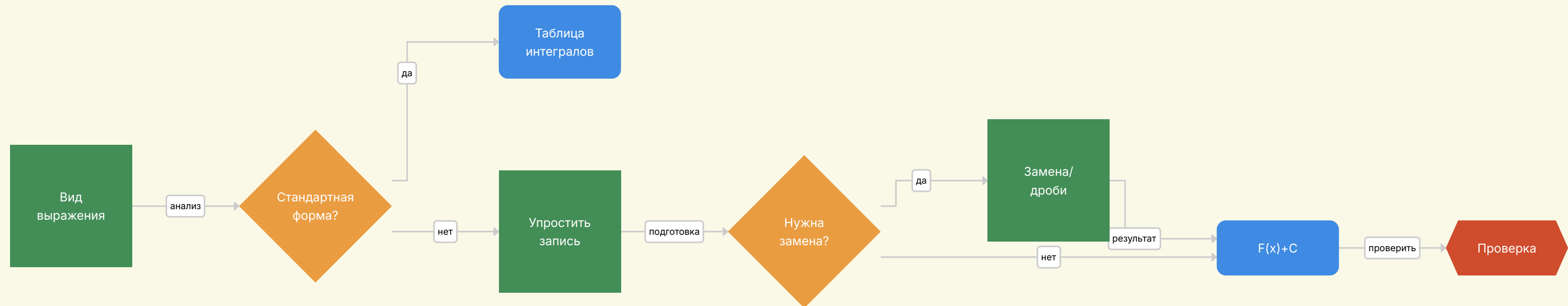
3

Симметрия функции

Если функция нечётная и интегрирование ведётся по симметричному промежутку, площади слева и справа взаимно компенсируются. В результате значение интеграла равно нулю.

Алгоритм нахождения неопределенного интеграла

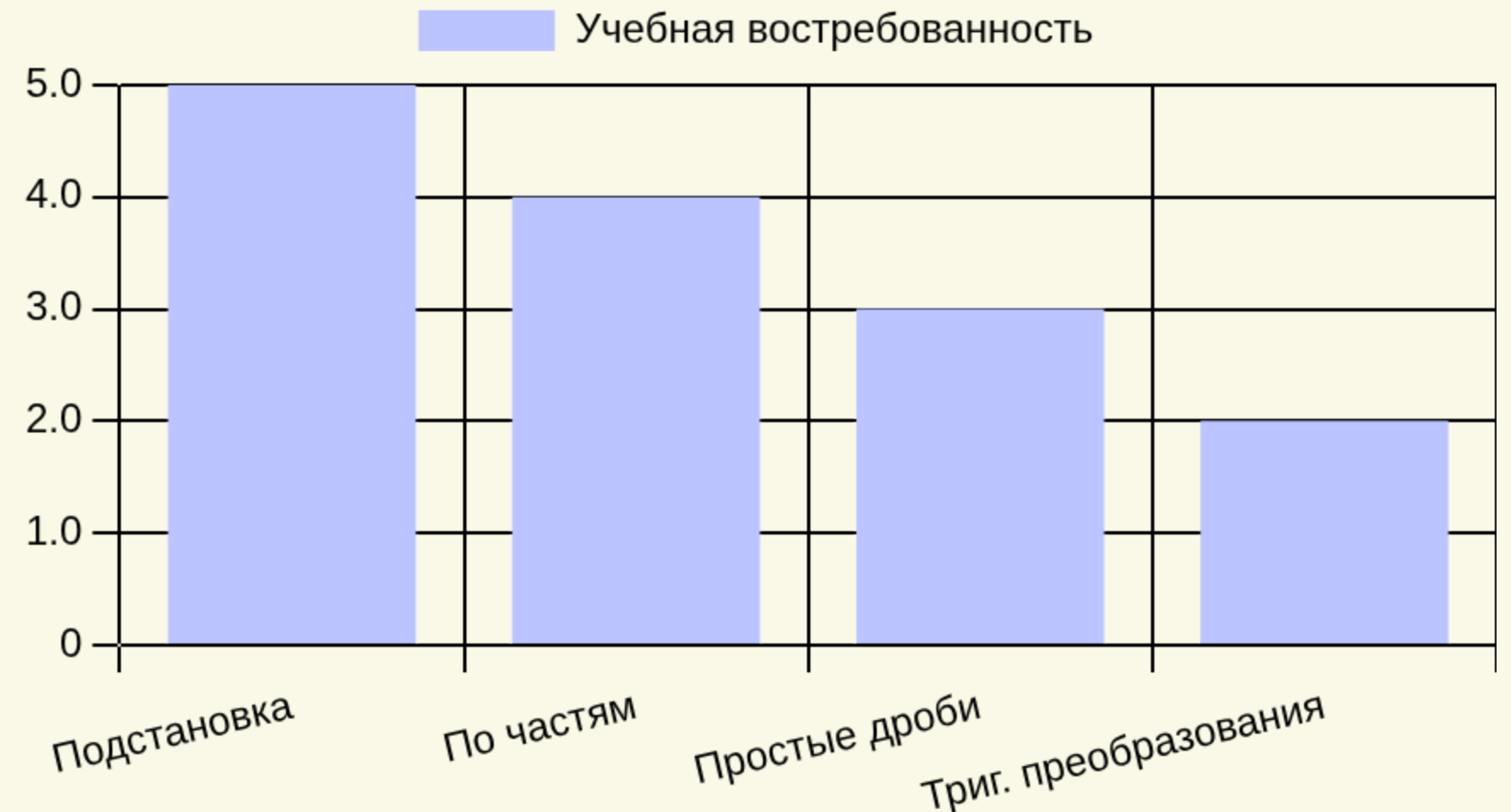
Последовательность выбора метода: от анализа вида выражения до проверки ответа дифференцированием.



Основные методы интегрирования

Диаграмма отражает учебную распространённость приёмов, а не строгую статистику: выбор метода всегда определяется видом подынтегрального выражения.

На практике чаще всего сначала проверяют подстановку, затем — по частям и разложение на простые дроби; тригонометрические преобразования помогают как вспомогательный шаг.



Схематическая учебная оценка типичных методов интегрирования.

Метод замены переменной



Распознать составную функцию

Замена переменной особенно полезна, когда под знаком интеграла есть сложная композиция. Важно увидеть внутреннюю функцию и заметить, что рядом появляется её производная или близкий множитель.



Ввести новую переменную

Переход к переменной $u=g(x)$ упрощает выражение и превращает сложный интеграл в более знакомый вид. После замены нужно корректно переписать dx через du и обновить границы, если интеграл определённый.



Свести к стандартной форме

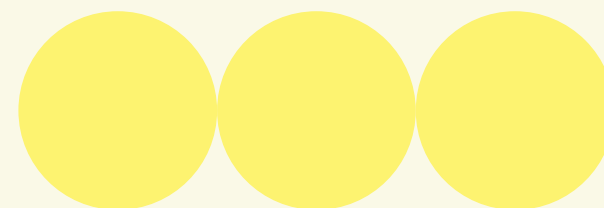
В примере $\int 2x(x^2+1)^5 dx$ замена $u=x^2+1$ даёт $du=2x dx$. Тогда интеграл становится степенным и вычисляется по обычной формуле без лишних преобразований.



Проверить результат

После вычисления полезно вернуться к исходной переменной и продифференцировать найденную первообразную. Такая проверка помогает убедиться, что замена была выполнена без ошибок и знак сохранён правильно.

Интегрирование по частям



1

Выбрать множители

Сначала нужно выделить два множителя: один удобно дифференцировать, другой — интегрировать. Обычно стараются сделать выбор так, чтобы после преобразования выражение стало проще, а не сложнее.

2

Применить формулу

Основой метода служит равенство $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. Оно напрямую следует из правила производной произведения и позволяет заменить исходный интеграл новым, часто более удобным.

3

Сократить сложность

Метод особенно полезен для интегралов вида $\int x e^x \, dx$, $\int x \sin x \, dx$ и $\int \ln x \, dx$. В таких задачах один множитель теряет сложность при дифференцировании.

4

Проверить ответ

После нахождения результата стоит дифференцировать полученную первообразную. Если исходная функция восстановилась, значит выбор u и dv был удачным, а вычисления проведены без пропусков и знаковых ошибок.

Физический смысл: путь по скорости

Площадь под графиком скорости показывает, какой путь накоплен за время движения. При изменяющейся скорости интеграл учитывает все участки, а не только начальное и конечное значения.

Чем выше и длительнее значения скорости, тем больше путь. Интеграл превращает неравномерное движение в точный итог без разбиения на отдельные случаи.



Учебный пример, построенный по смыслу формулы $s = \int v(t) dt$

Применения определенного интеграла

Краткая таблица показывает, какие величины находят с помощью определенного интеграла в школьных и прикладных задачах.

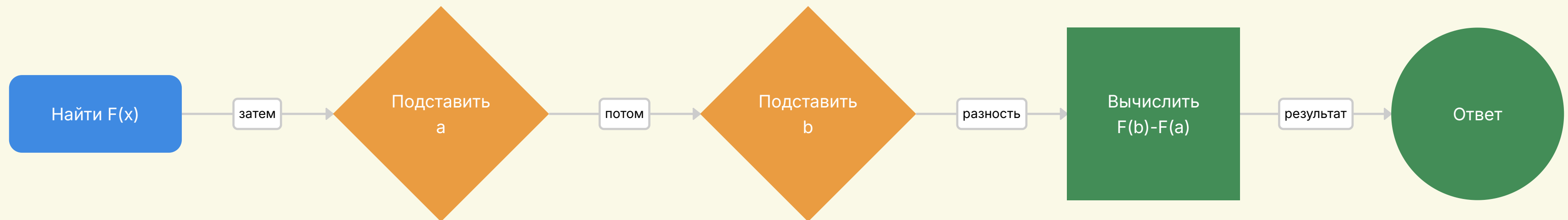
Во всех примерах интеграл суммирует малые вклады по отрезку или области. Различие только в том, что именно интерпретируется как элемент накопления.



Задача	Что находит
Площадь	Под графиком
Путь	По скорости
Объём	Тело вращения
Масса	С переменной плотн.

Теорема Ньютона–Лейбница

Алгоритм вычисления определённого интеграла через первообразную.



Интеграл в реальных моделях и графиках

Путь и перемещение

Если скорость меняется во времени, интеграл по графику скорости даёт полный путь. Это особенно важно для движения с ускорением, торможением и остановками, когда обычная формула уже не подходит.

Накопление массы

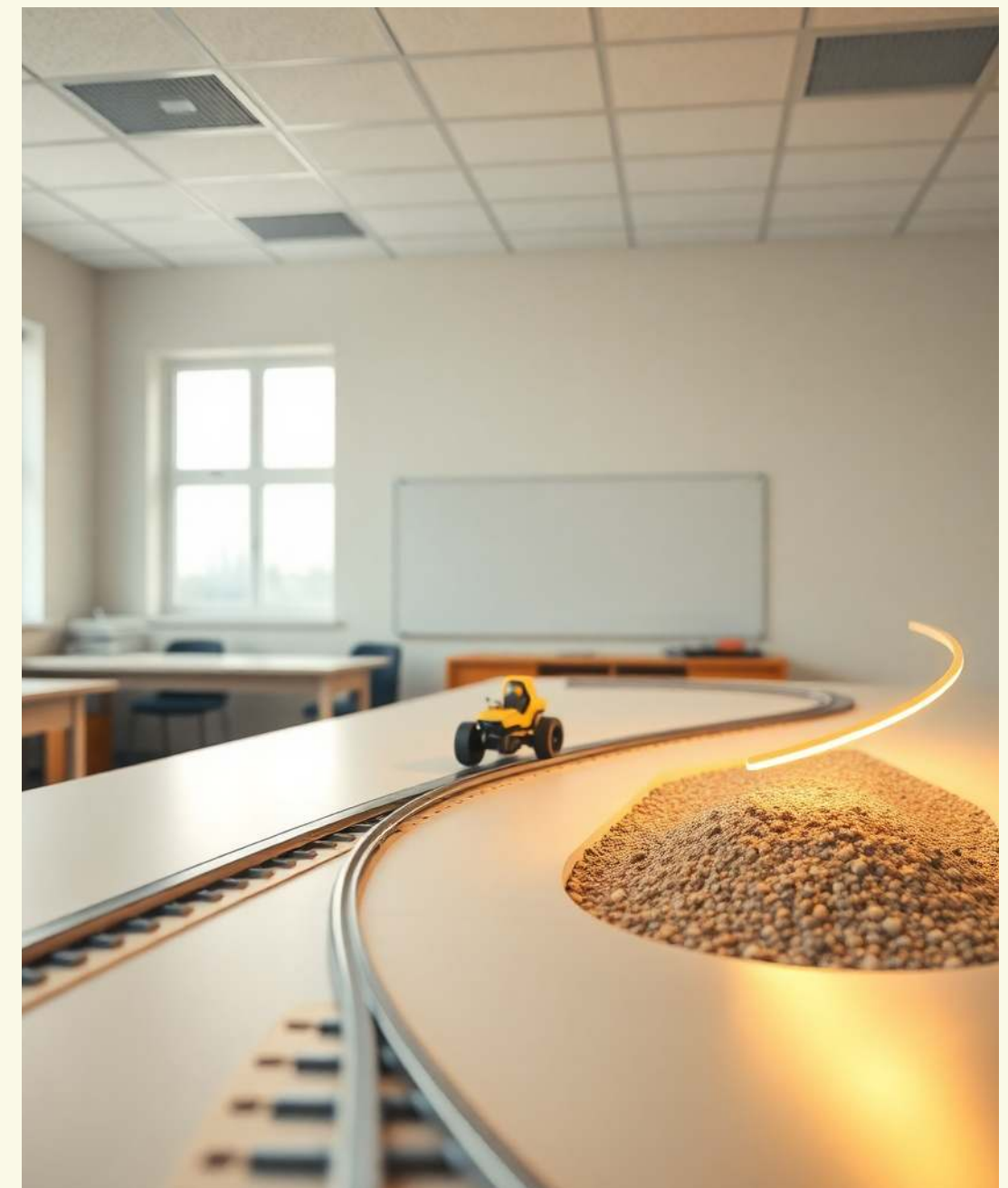
В моделях с переменной плотностью интеграл позволяет найти массу тела по частям. Так учитываются участки, где материал распределён неравномерно, хотя внешне объект выглядит одинаковым.

Измерение ресурсов

По аналогии вычисляют объём осадков, расход воды, энергию или доход за период. Интеграл переводит множество маленьких изменений в одно итоговое число, удобное для анализа.

Связь с графиком

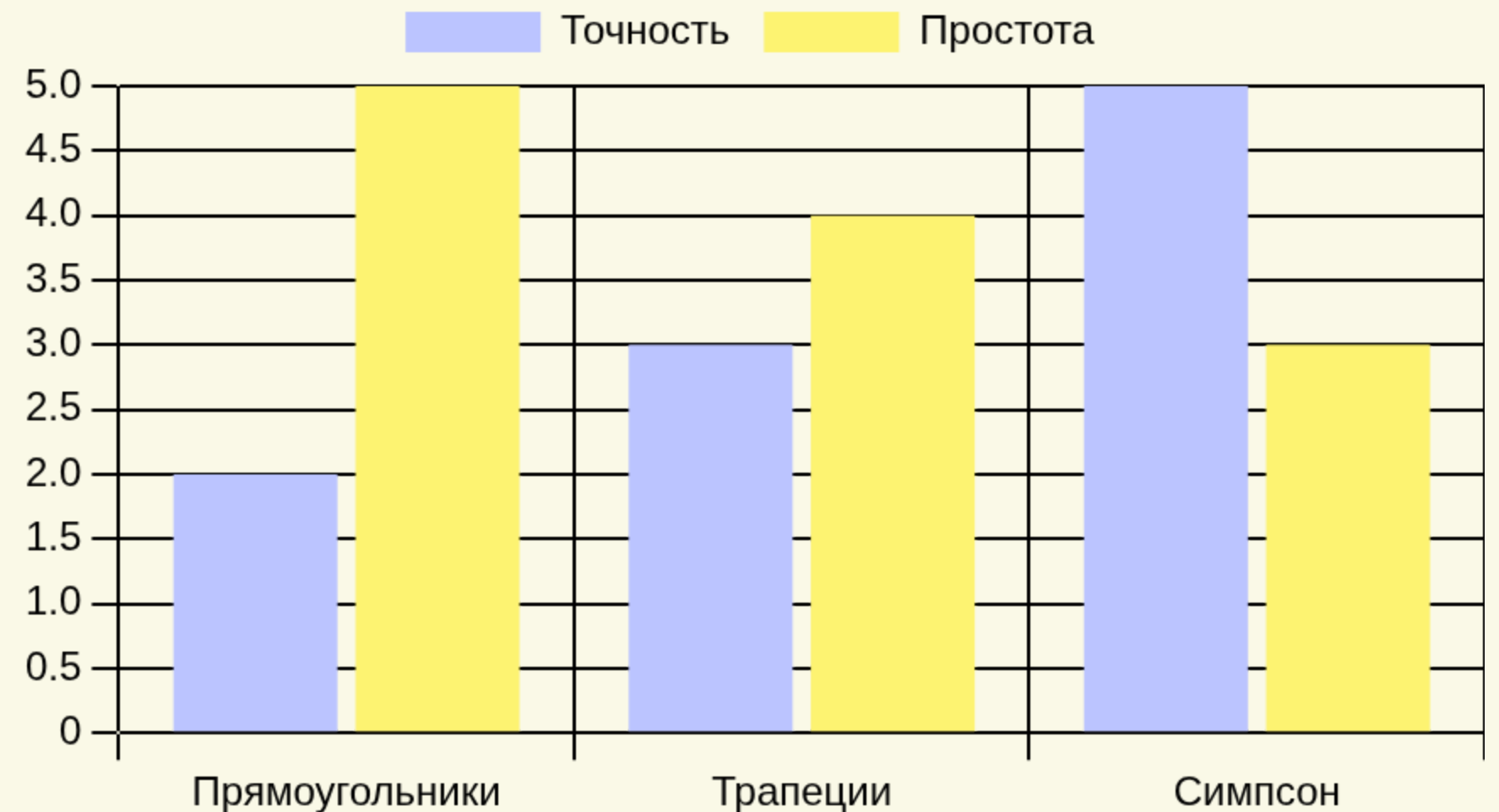
На графике мгновенные значения сами по себе не дают общего результата. Интеграл показывает, как форма кривой влияет на итог и почему площадь под графиком имеет практический смысл.



Численные методы вычисления интегралов

Численные методы полезны, когда точную первообразную найти трудно. Они заменяют непрерывную площадь суммой простых фигур и позволяют контролировать точность через шаг разбиения.

Метод Симпсона обычно точнее, но требует больше вычислений. Метод прямоугольников проще, а трапеции дают разумный баланс между скоростью и качеством приближения.



Сравнительная учебная оценка методов численного интегрирования

Типичные ошибки при работе с интегралами

1

Константа C

При нахождении неопределённого интеграла часто забывают добавить константу C. Это делает ответ неполным, потому что все первообразные одной функции отличаются именно на постоянное слагаемое.

2

Пределы интегрирования

В определённом интеграле важно не перепутать нижний и верхний пределы. Если подставить их в неверном порядке, получится неправильный знак и итоговое значение станет ошибочным.

3

Смена порядка

При перестановке пределов нельзя забывать, что знак интеграла меняется на противоположный. Ошибка особенно заметна в вычислениях, где результат должен быть положительным, а получается отрицательным.

4

Замена переменной

При подстановке новой переменной легко потерять коэффициент или неверно выразить дифференциал. Из-за этого итоговый интеграл уже не соответствует исходному выражению, даже если форма кажется похожей.

5

Логарифм и модуль

В интегралах вида $\int dx/x$ нужно писать $\ln|x|$, а не просто $\ln x$. Модуль обязателен, потому что без него формула верна не на всей области определения.

Производная, первообразная и интеграл: сравнение понятий

Понятие	Смысл
Производная	Скорость изменения
Первообразная	Обратная к производной
Неопределённый интеграл	Семейство $F(x)+C$
Определённый интеграл	Число на $[a, b]$



Таблица показывает, как связаны основные объекты математического анализа и чем они отличаются по смыслу и результату.

Производная и интеграл связываются как взаимно обратные операции. Первообразная объединяет их смысл, а определённый интеграл переводит функцию в конкретное числовое значение.



Интеграл: от формул к смыслу

Интеграл помогает увидеть за формулами накопление, измерение и движение. Он связывает алгебру с геометрией и прикладными задачами, поэтому уверенное владение им важно для дальнейшего изучения математики и физики.

