

File Edit Search Help

Арксинус и решение уравнения $\sin t = a$

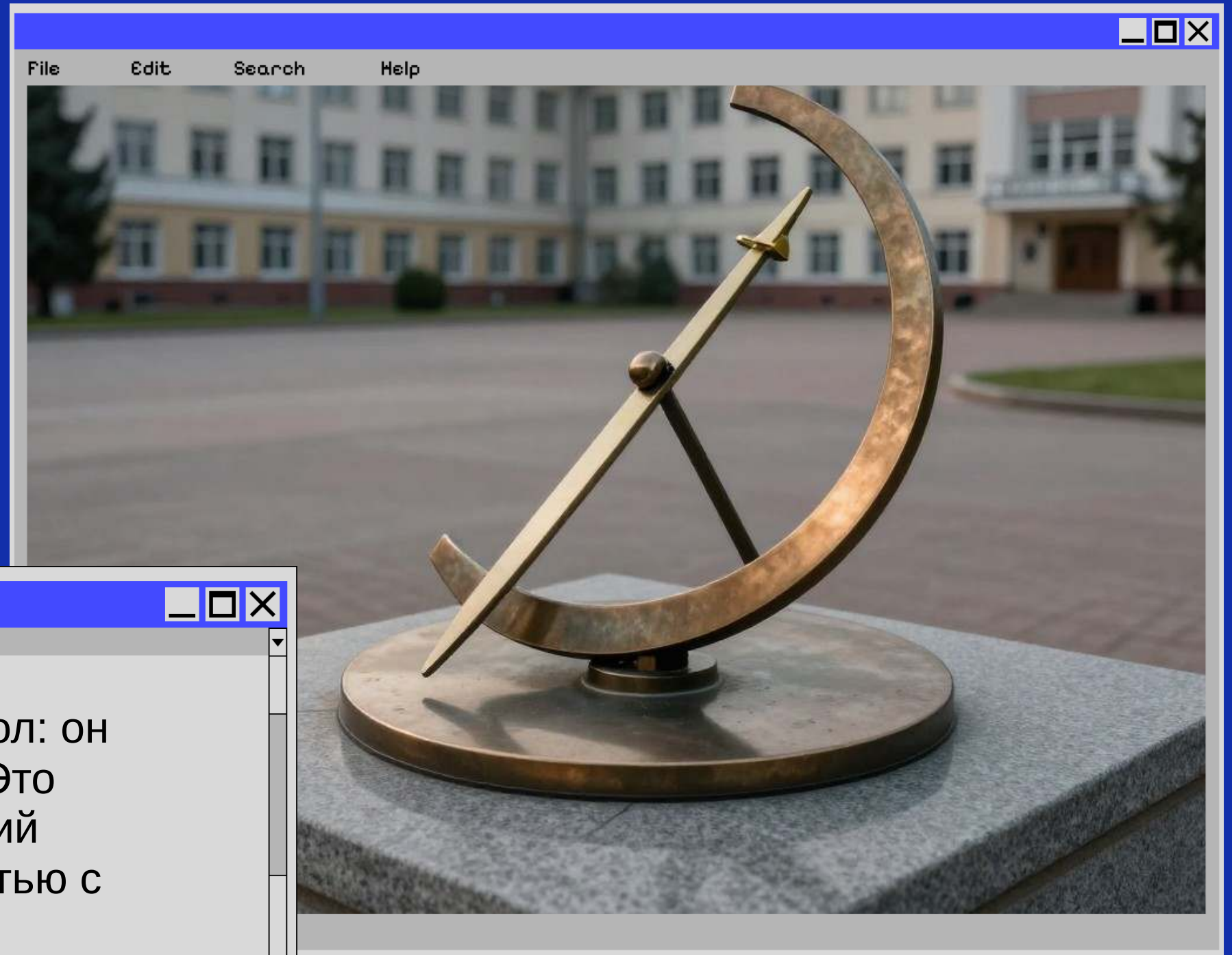
Арксинус восстанавливает угол по синусу; решения существуют только при $|a| \leq 1$.

Ok

Где встречается арксинус и почему он изучается в 10 классе

Ok

В 10 классе арксинус связывает число и угол: он переводит заданное значение $\sin t$ в угол. Это помогает проверять существование решений уравнения $\sin t = a$ и записывать их полностью с учётом периода 2π .



Синус на единичной окружности



Координаты точки

На единичной окружности точке соответствует угол t , а координаты равны $(\cos t, \sin t)$. Поэтому синус — это просто ордината точки, найденная на окружности.

Ok



Ограничение значений

Ордината любой точки окружности всегда между -1 и 1 . Отсюда следует важный вывод: если a не попадает в $[-1; 1]$, решений у $\sin t = a$ нет.

Ok



Опорные углы

Углы 0 , $\pi/2$, π и $3\pi/2$ дают синусы 0 , 1 , 0 и -1 . Эти точки удобно использовать, чтобы быстро проверять формулы и рисунки.

Ok



Симметрия графика

Из-за геометрической симметрии окружности график $\sin t$ отражается и повторяется. Эта симметрия объясняет, почему одному уровню $y = a$ обычно соответствуют две точки за один период.

Ok

График $y = \sin t$ и поиск уровня $y = a$

Ok

■ Решения уравнения $\sin t = a$ — это точки пересечения графика $y = \sin t$ с горизонтальной прямой $y = a$. Если $|a| > 1$, пересечений нет, потому что $\sin t$ всегда в $[-1; 1]$.

■ При $|a| < 1$ прямая $y = a$ пересекает синусоиду в двух точках на одном периоде 2π . Для $a = 1$ и $a = -1$ происходит касание в верхней и нижней экстремальных точках.



Определение арксинуса

- 1 Число $\arcsin a$ — это угол x из промежутка $[-\pi/2; \pi/2]$, для которого $\sin x = a$. Поэтому арксинус определён только при $a \in [-1; 1]$, иначе такой угол не существует.
- 2 Уравнение $\sin t = a$, в отличие от функции, может иметь бесконечно много решений: из-за периодичности синуса все они повторяются с шагом 2π . Главное значение позволяет избежать неоднозначности.
- 3 Выбор главного значения делает обратную функцию однозначной: каждому a соответствует ровно один угол из $[-\pi/2; \pi/2]$. Именно поэтому $\arcsin a$ — это функция, а не список ответов.

Основные свойства функции $\arcsin a$

Таблица фиксирует ключевые свойства: область определения, область значений, нечётность и монотонность на главном промежутке.

Главное значение выбирается так, чтобы функция стала однозначной: каждому допустимому a соответствует один угол из $[-\pi/2; \pi/2]$.

Школьная теория тригонометрических функций и свойства обратных функций.	
File Edit Search Help	
Свойство	Запись
Область определения	$a \in [-1; 1]$
Область значений	$x \in [-\pi/2; \pi/2]$
Нечётность	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$
Монотонность	$\arcsin a$ возрастает

Общее решение уравнения $\sin t = a$

Ok

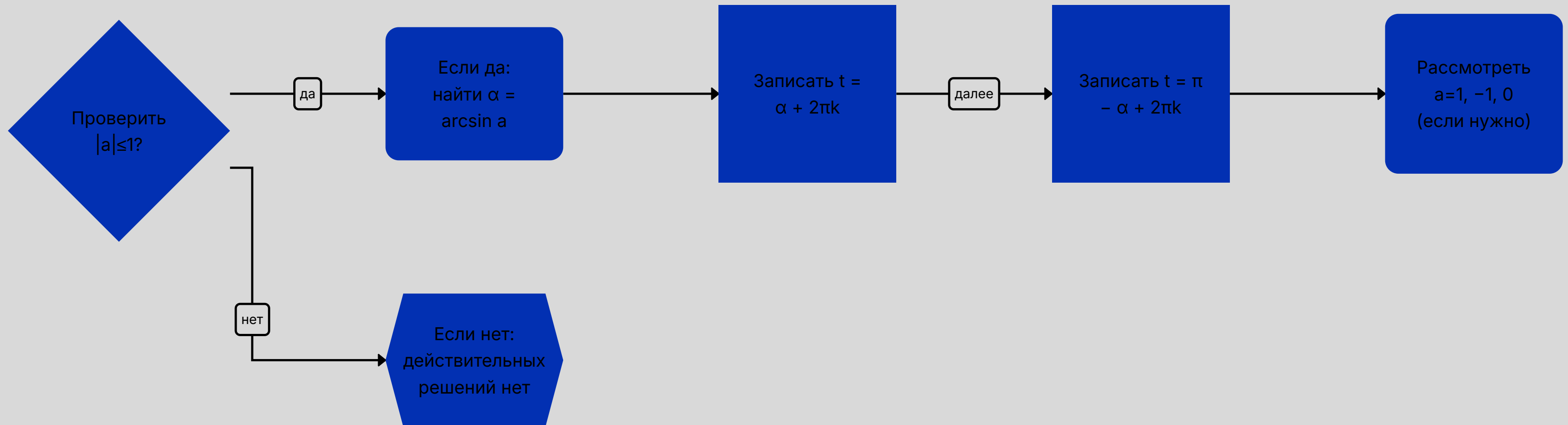
- 1 Пусть $|a| \leq 1$ и $\alpha = \arcsin a$. Тогда $\sin t = a$ решается двумя ветвями: $t = \alpha + 2\pi k$ и $t = \pi - \alpha + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, и k задаёт сдвиг по периодам.
- 2 Компактная запись часто выглядит так: $t = (-1)^k \cdot \arcsin a + k\pi$. Она объединяет обе ветви в одну формулу, но смысл остаётся тем же — два семейства решений при $|a| < 1$.

- 3 Две ветви возникают из геометрии: на окружности одной и той же ординате соответствуют две точки. Их углы дополняют друг друга до π , что и даёт переход от α к $\pi - \alpha$.
- 4 Сохраняется периодичность синуса: при любом целом k значение синуса не меняется, потому что добавление $2\pi k$ соответствует полному обороту по окружности.

Алгоритм решения уравнения $\sin t = a$

Порядок действий отражает свойства синуса и главное значение $\arcsin$.

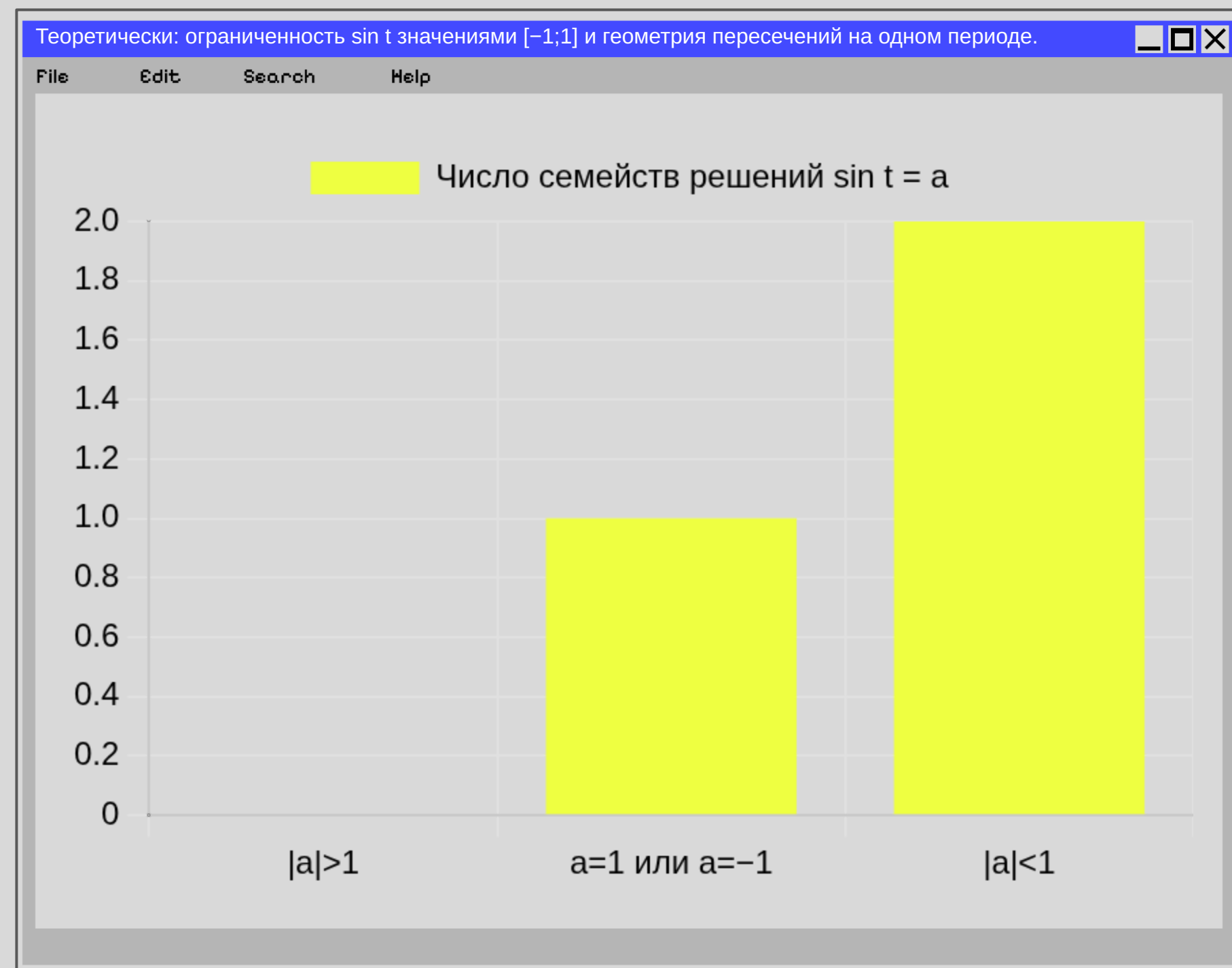
Ok



Сколько решений бывает при разных значениях a

Границы -1 и 1 — критические уровни: при переходе через них меняется количество точек пересечения прямой $y=a$ с $\sin$ -синусоидой.

По положению a относительно $[-1;1]$ однозначно определяется число семейств решений: 0, 1 или 2. Это быстрый способ контроля ответа без вычислений углов.



Частные случаи: $a = 0, 1$ и -1

1

При $a=0$ уравнение $\sin t = 0$ даёт $t = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Здесь синус проходит через ноль в точках окружности, соответствующих диаметрально расположенным углам.

2

При $a=1$ получаем $t = \pi/2 + 2\pi k$. Это вершина синуса: уровень $y=1$ достигается только в верхней точке на каждом периоде 2π .

3

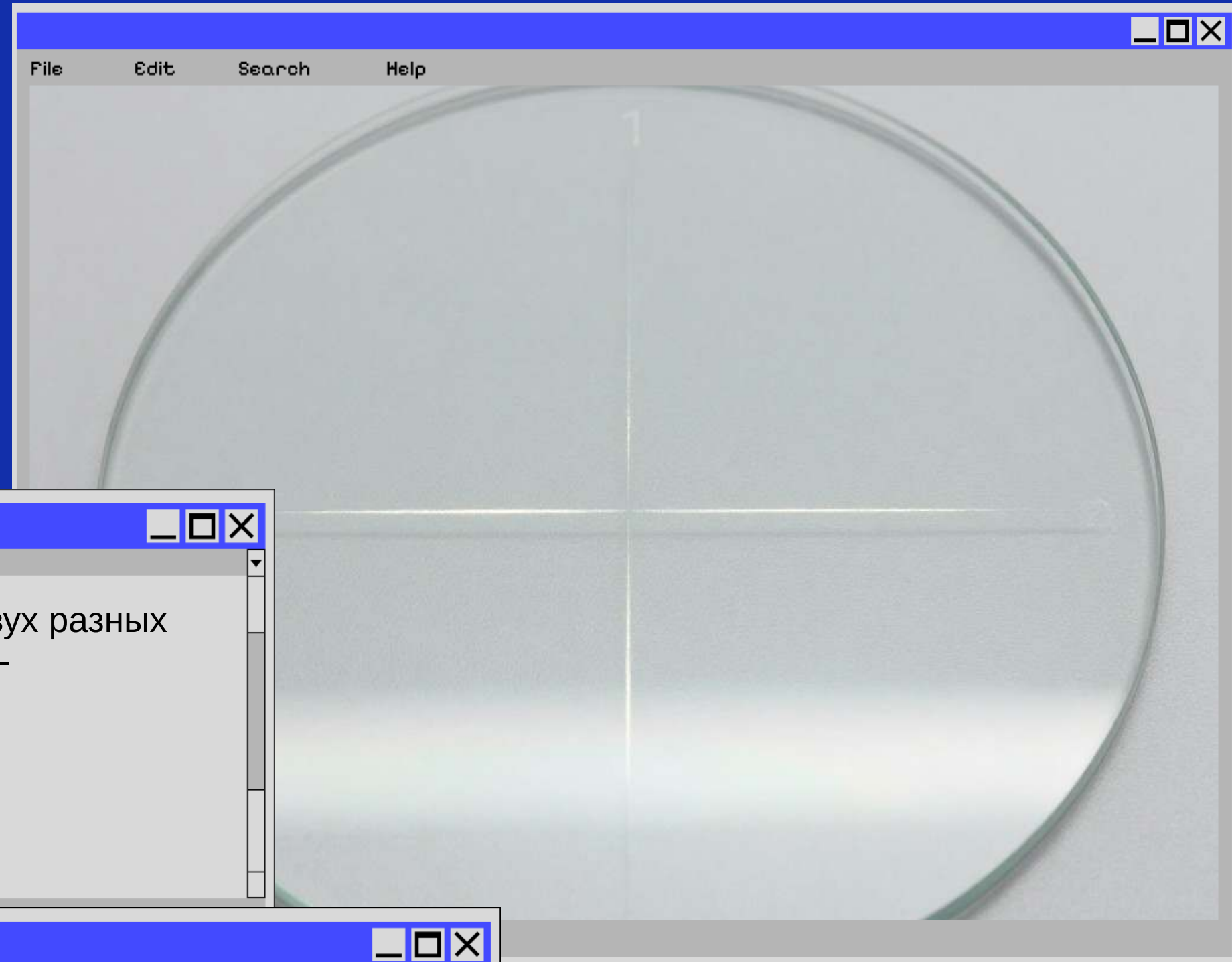
При $a=-1$ решения записываются как $t = -\pi/2 + 2\pi k$, что эквивалентно $t = 3\pi/2 + 2\pi k$. Эти опорные случаи согласуются с общим правилом через $\arcsin a$.

Симметрия решений на единичной окружности

Ok

1 Если $|a| < 1$, то на единичной окружности ордината a достигается в двух разных точках. Их углы обозначим α и $\pi - \alpha$: обе точки имеют одинаковую $\sin$ -составляющую, а значит, удовлетворяют уравнению $\sin t = a$.

2 Геометрически это симметрия относительно оси абсцисс: одна точка попадает в I четверть, вторая — во II. При отрицательных a аналогичная пара оказывается в III и IV четвертях, что и порождает два семейства решений.



arcsin a и уравнение sin t = a: что общего и в чём разница

Материалы школьного курса алгебры и тригонометрии

Параметр	arcsin a	sin t = a	Итоговая запись
Число ответов	1	бесконечно	одно значение vs множество
Область применения	$a \in [-1;1]$	$t \in \mathbb{R}$, a — параметр	условие существования
Периодичность	нет	есть: 2π	повторяемость
Ответ	угол из $[-\pi/2;\pi/2]$	углы всех ветвей	$t=\alpha+2\pi k$ или $\pi-\alpha+2\pi k$

Сравнение показывает, что arcsin a возвращает одно главное число, а уравнение sin t=a требует учёта всех углов, которые повторяются из-за периодичности синуса.

Различие в результате (одно значение или множество) объясняется тем, что arcsin выбирает главный угол, а уравнение не ограничивает ветви, поэтому даёт семейства с периодом 2π .

Типичные ошибки при решении

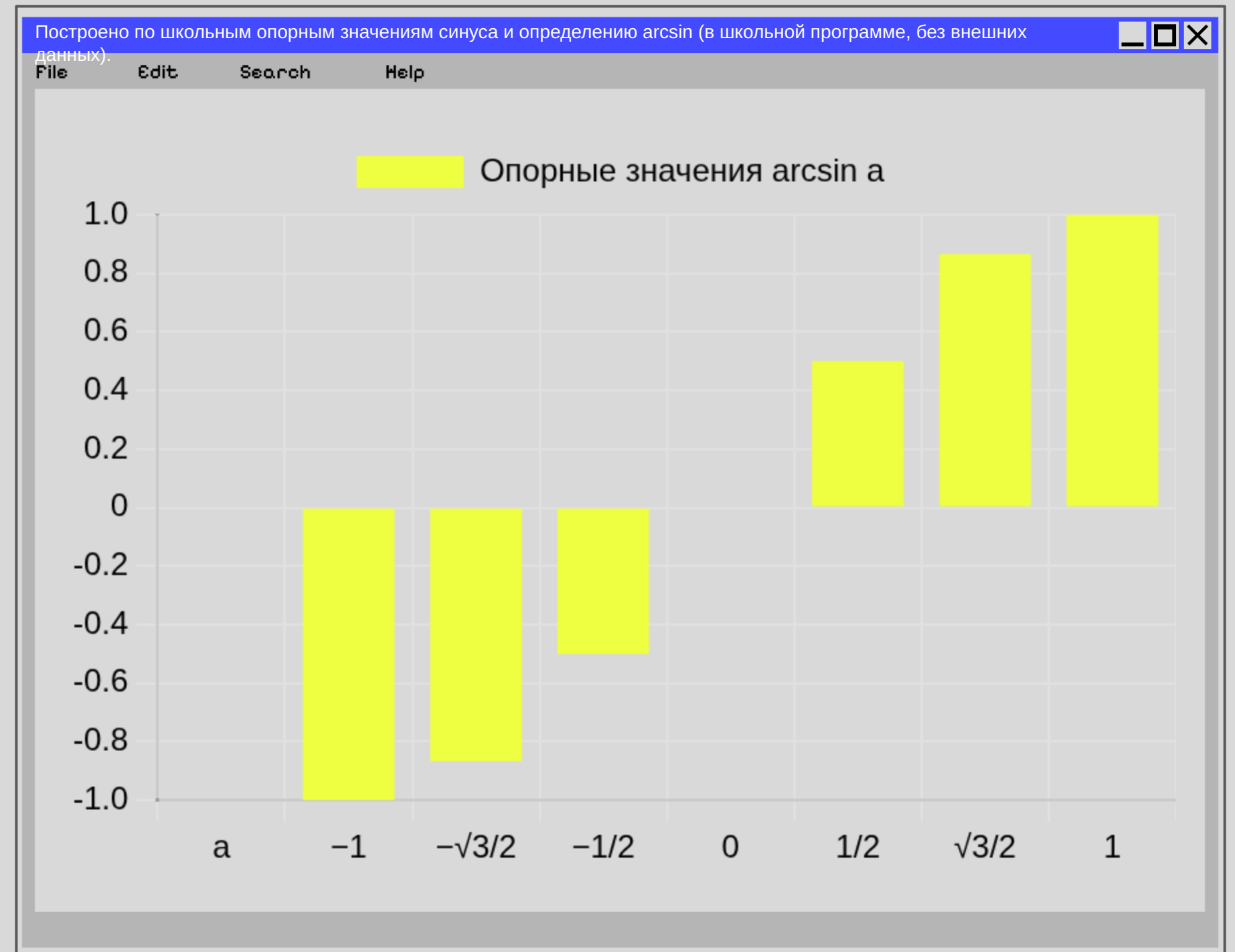
Ok

- 1 Самая распространённая ошибка — записывать только $t = \arcsin a$ и забывать вторую ветвь $\pi - \alpha$. В результате теряется второй семейств решений, хотя на окружности при $|a| < 1$ всегда находится две точки.
- 2 Вторая ошибка — не проверять условие $|a| \leq 1$. Если a выходит за отрезок значений синуса, действительных пересечений графиков нет, и любое «найденное» решение будет неверным.
- 3 Третья ошибка — путать обозначения: $\arcsin a$ — это функция, а $\sin^{-1} a$ иногда воспринимают как обратную функцию целиком. На калькуляторе важно понимать, что введение должно соответствовать именно $\arcsin$ (главный угол).
- 4 Четвёртая ошибка — терять период 2π . Даже найдя углы в одном обороте, нужно учитывать повторяемость синуса, иначе ответ становится неполным для всех t из $\mathbb{R}$.

Значения $\arcsin a$ в опорных точках

Для этих a значения $\arcsin$ запоминают как «главные углы» из промежутка $[-\pi/2; \pi/2]$, а знак a переносится в знак угла.

Пары a и $\arcsin a$ демонстрируют возрастание функции на области определения и симметрию относительно начала координат, что помогает быстро оценивать ответы.



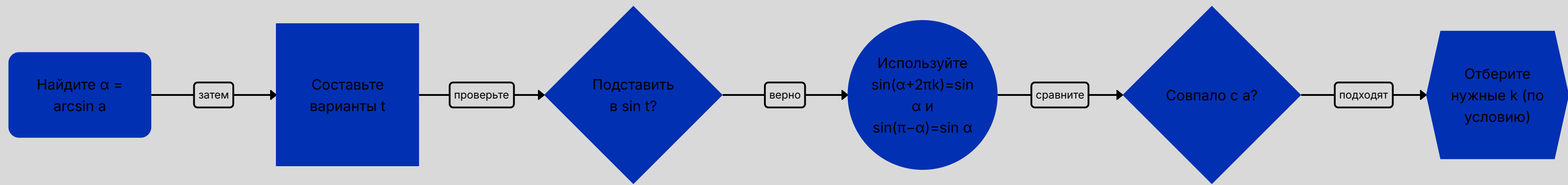
Примеры решения уравнения $\sin t = a$

- 1 Для $\sin t = 1/2$ имеем $\alpha = \arcsin(1/2) = \pi/6$. Поэтому решения образуют два семейства: $t = \pi/6 + 2\pi k$ и $t = 5\pi/6 + 2\pi k$.
- 2 Для $\sin t = -\sqrt{3}/2$ получаем $\alpha = \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$. Тогда $t = -\pi/3 + 2\pi k$ и $t = 4\pi/3 + 2\pi k$ удовлетворяют исходному уравнению для всех целых k .
- 3 Если $\sin t = 2$, то решений нет, потому что 2 не принадлежит отрезку $[-1;1]$, в котором синус принимает действительные значения. Проверка условия существования мгновенно экономит время.

Проверка найденного ответа

Последовательность действий опирается на свойства синуса и на то, что $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$.

Ok

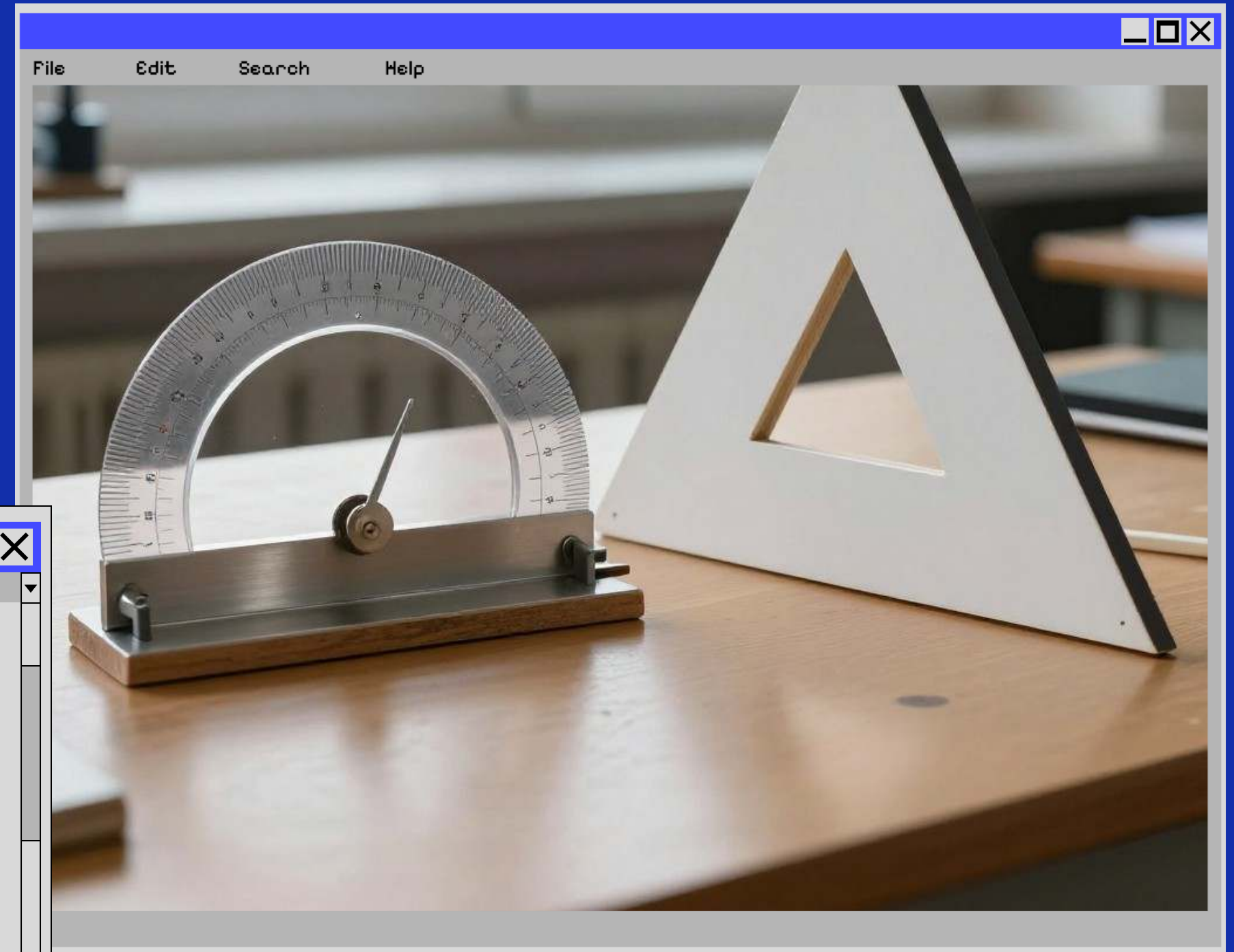


Практические применения арксинуса

Ok

■ Арксинус помогает, когда угол нужно восстановить по известному отношению величин. Типичный пример — задачи на наклон: по синусу угла находят сам угол, связывая его с координатами или длинами сторон треугольника.

■ В физике и технике арксинус встречается в моделях колебаний, волн и обработки сигналов: по измеренной «вертикальной» части находят фазовый угол. В навигации и измерениях он также применяется для вычисления угла по известной синусной зависимости.



Краткий справочник формул по теме

В таблице собраны ключевые формулы и свойства, которые нужны для существования решений, их полного описания и аккуратной проверки ответов.

Справочник объединяет три уровня: проверку возможности решений, универсальный вид ответа и свойства функции $\arcsin$, чтобы избегать типичных ошибок.

Материалы школьной тригонометрии: определение $\arcsin$, свойства синуса и значения на единичной окружности		
File Edit Search Help		
Факт	Формула/значение	Назначение
Условие существования	$ a \leq 1$	есть действительные решения
Два семейства	$t = \alpha + 2\pi k$ и $t = \pi - \alpha + 2\pi k$	полное множество
Компактно	$t = (-1)^k \cdot \arcsin a + k\pi$	краткая запись
Нечётность	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$	быстро меняют знак
Опорные	$\arcsin 0 = 0$; $\arcsin 1 = \pi/2$; $\arcsin(-1) = -\pi/2$	ориентиры для расчётов

$$|a| > 1$$

**это означает, что действительных
пересечений нет, и уравнение $\sin t = a$
не имеет решений**

При $|a| > 1$ график $y = \sin t$ не достигает уровня $y = a$, потому что синус ограничен значениями от -1 до 1 на единичной окружности.

Ок

Сводка: от $\arcsin$ к решению $\sin t = a$

Ok

$\arcsin$ задаёт главный угол из $[-\pi/2; \pi/2]$ с заданным значением синуса. Уравнение $\sin t = a$ имеет решения только при $|a| \leq 1$ и при $|a| < 1$ обычно даёт два семейства, связанных с симметрией на окружности.